

## 数列较难

1 已知数列 $\{a_n\}$ 中,  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 4$ ,  $a_{n+1} + 2a_{n-1} = 3a_n$  ( $n \geq 2$ ).

(1) 求证: 数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是等比数列.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(3) 设 $b_n = a_n - 1$ ,  $S_n = \frac{a_1}{b_1 b_2} + \frac{a_2}{b_2 b_3} + \cdots + \frac{a_n}{b_n b_{n+1}}$ ,  $\exists n \in \mathbf{N}^*$ , 使 $S_n \geq 4m^2 - 3m$ 成立, 求实数 $m$ 的取值范围.

2 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$  , 且  $\sqrt{a_n}$  是  $\sqrt{a_{n+1}}$  和  $-1$  的等差中项 .

(1) 证明 : 数列  $\{\sqrt{a_n} + 1\}$  是等比数列 .

(2) 证明 :  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq \frac{4}{3} \left( 1 - \frac{1}{4^n} \right)$  .

3 已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 = 1$ ， $(2n+1)^2 a_n = (2n-1)^2 a_{n+1}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ )，正项数列 $\{c_n\}$ 满足：对每个 $n \in \mathbf{N}^*$ ， $c_{2n-1} = a_n$ ，且 $c_{2n-1}$ ， $c_{2n}$ ， $c_{2n+1}$ 成等比数列。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{c_n\}$ 的通项公式；

(2) 当 $n \geq 2$ 时，证明：

$$\frac{5}{3} - \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \cdots + \frac{1}{c_n} < \frac{7}{4}.$$

4 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = 2a_n + (-1)^n (n \in \mathbf{N}^*)$ .

(1) 若 $b_n = a_{2n-1} - \frac{1}{3}$ , 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列并求其通项公式.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(3) 求证:  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 3$ .

5 已知数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足 $b_{n+1}a_n + b_na_{n+1} = (-2)^n + 1, b_n = \frac{3 + (-1)^{n-1}}{2}, n \in \mathbf{N}^*$ , 且 $a_1 = 2$ .

(1) 求 $a_2, a_3$ 的值;

(2) 设 $c_n = a_{2n+1} - a_{2n-1}, n \in \mathbf{N}^*$ , 证明 $\{c_n\}$ 是等比数列;

(3) 设 $S_n$ 为 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和, 证明 $\frac{S_1}{a_1} + \frac{S_2}{a_2} + \cdots + \frac{S_{2n-1}}{a_{2n-1}} + \frac{S_{2n}}{a_{2n}} \leq n - \frac{1}{3} (n \in \mathbf{N}^*)$ .

6 已知各项都是正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$  ,  $S_n = a_n^2 + \frac{1}{2}a_n$  ,  $n \in \mathbf{N}^*$  .

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 :  $b_1 = 1$  ,  $b_n - b_{n-1} = 2a_n (n \geq 2)$  , 求数列 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$  .

(3) 若 $T_n \leq \lambda(n+4)$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立 , 求 $\lambda$ 的取值范围 .

7 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$ ，数列 $\{b_n\}$ 为等差数列， $b_1 = -1$ ， $b_n > 0 (n \geq 2)$ ， $b_2 S_n + a_n = 2$ 且

$$3a_2 = 2a_3 + a_1 .$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式 .

(2) 设 $c_n = \frac{1}{a_n}$ ， $T_n = \frac{b_1}{c_1 + 1} + \frac{b_2}{c_2 + 1} + \cdots + \frac{b_n}{c_n + 1}$ ，证明： $T_n < \frac{5}{2}$  .

8 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+2} = \begin{cases} a_n + 2, n \text{ 为奇数} \\ 2a_n, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ , 且  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式.

(2) 设  $b_n = a_n a_{n+1}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $2n$  项和  $S_{2n}$ .

(3) 设  $c_n = a_{2n-1} a_{2n} + (-1)^n$ , 证明:  $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \cdots + \frac{1}{c_n} < \frac{5}{4}$ .

9 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ ，满足 $a_4 - a_2 = 12$ ， $S_4 + 2S_2 = 3S_3$ ，数列 $\{b_n\}$ 满足

$$nb_{n+1} - (n+1)b_n = n(n+1), n \in \mathbf{N}^*, \text{ 且 } b_1 = 1.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设
$$c_n = \begin{cases} \frac{\log_2 a_n}{n^2(n+2)}, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{2\sqrt{b_n}}{a_n}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}, T_n \text{ 为 } \{c_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和, 求 } T_{2n}.$$

10 已知数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足： $b_n a_n + a_{n+1} + b_{n+1} a_{n+2} = 0$ ,  $b_n = \frac{3 + (-1)^n}{2}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ , 且

$$a_1 = 2, a_2 = 4.$$

- (1) 求 $a_3, a_4, a_5$ 的值；
- (2) 设 $c_n = a_{2n-1} + a_{2n+1}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ , 证明： $\{c_n\}$ 是等比数列；
- (3) 设 $S_k = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k}$ ,  $k \in \mathbf{N}^*$ , 证明： $\sum_{k=1}^{4n} \frac{S_k}{a_k} < \frac{7}{6} (n \in \mathbf{N}^*)$ .

11 已知直线  $l_n: y = x - \sqrt{2n}$  与圆  $C_n: x^2 + y^2 = 2a_n + n$  交于不同的两点  $A_n, B_n, n \in \mathbf{N}^*$ . 数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{4}|A_n B_n|^2$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式  $a_n$ .

(2) 若  $b_n = \frac{n}{4a_n}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

(3) 记数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 在 (2) 的条件下, 求证: 对任意正整数  $n$ ,

$$\sum_{k=1}^n \frac{k+2}{S_k(T_k + k+1)} < 2.$$

12 已知单调递增的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 + a_3 + a_4 = 28$ ，且 $a_3 + 2$ 是 $a_2$ ， $a_4$ 的等差中项．

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式．

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $\frac{1}{a_n} = \frac{b_1}{2+1} - \frac{b_2}{2^2+1} + \frac{b_3}{2^3+1} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{b_n}{2^n+1}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式．

(3) 在(2)条件下，设 $c_n = 2^n + \lambda b_n$ ．问是否存在实数 $\lambda$ 使得数列 $\{c_n\}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ )是单调递增数列？若存在，求出 $\lambda$ 的取值范围；若不存在，请说明理由．

13 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ ，并且 $a_2 = 2$ ， $S_5 = 15$ ，数列 $\{b_n\}$ 满足： $b_1 = \frac{1}{2}$ ，

$b_{n+1} = \frac{n+1}{2n}b_n (n \in \mathbf{N}^+)$ ，记数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $T_n$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n$ 及前 $n$ 项和公式 $S_n$ 。

(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 $b_n$ 及前 $n$ 项和公式 $T_n$ 。

(3) 记集合 $M = \left\{ n \mid \frac{2S_n(2-T_n)}{n+2} \geq \lambda, n \in \mathbf{N}^+ \right\}$ ，若 $M$ 的子集个数为16，求实数 $\lambda$ 的取值范围。

14 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比为正整数的等比数列，若 $a_2 = 2$ 且 $a_1, a_3 + \frac{1}{2}, a_4$ 成等差数列．

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n$ ．

(2) 定义： $\frac{n}{P_1 + P_2 + \cdots + P_n}$ 为 $n$ 个正数 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n (n \in \mathbf{N}^*)$ 的“均倒数”．

① 若数列 $\{b_n\}$ 前 $n$ 项的“均倒数”为 $\frac{1}{2a_n - 1} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的通项 $b_n$ ．

② 试比较 $\frac{1}{b_1} + \frac{2}{b_2} + \cdots + \frac{n}{b_n}$ 与2的大小，并说明理由．

15 已知数列 $\{a_n\}$ ,  $a_n > 0$ , 其前 $n$ 项和 $S_n$ 满足 $S_n = 2a_n - 2^{n+1}$ , 其中 $n \in \mathbf{N}^*$ .

(1) 设 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$ , 证明: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列.

(2) 设 $c_n = b_n \cdot 2^{-n}$ ,  $T_n$ 为数列 $\{c_n\}$ 的前 $n$ 项和, 求证:  $T_n < 3$ .

(3) 设 $d_n = 4^n + (-1)^{n-1} \lambda \cdot 2^{b_n}$  ( $\lambda$ 为非零整数,  $n \in \mathbf{N}^*$ ) 试确定 $\lambda$ 的值, 使得对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ , 都有 $d_{n+1} > d_n$ 成立.

16 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列， $\{b_n\}$ 是等差数列，且 $a_1 = b_1 = 1$ ， $b_2 + b_3 = 2a_3$ ，

$$a_5 - 3b_2 = 7.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数} \\ b_{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ，求 $a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_{2n}c_{2n} (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

(3) 对任意正整数 $n$ ，不等式 $a\sqrt{2n+3} \leq \left(1 + \frac{1}{b_2}\right) \left(1 + \frac{1}{b_3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{b_{n+1}}\right)$ 成立，求正数 $a$ 的取值范围。

17 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{3}$ ，且 $n \geq 2$ 时， $a_n = \frac{a_{n-1} - 1}{2 - a_{n-1} - 1}$ 。

(1) 证明数列 $\left\{\frac{1}{a_n} - 1\right\}$ 为等比数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(2) 若对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ ，不等式 $(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \leq \lambda \cdot 2^n$ 恒成立，求 $\lambda$ 的取值范围。

(3) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ ，求证：对任意的正整数 $n$ 都有 $S_n \geq \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ 。

18 设 $\{a_n\}$ 是等比数列的公比大于0，其前 $n$ 项和为 $S_n$ ， $\{b_n\}$ 是等差数列，已知 $a_1 = 1$ ， $a_3 = a_2 + 2$ ，

$$a_4 = b_3 + b_5, a_5 = b_4 + 2b_6.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \frac{a_n}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)}$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $T_n$ ，求 $T_n$ .

(3) 设 $d_n = \begin{cases} b_n, n \neq 2^k \\ b_n(\log_2 b_n + 1), n = 2^k \end{cases}$ ，其中 $k \in \mathbf{N}^*$ ，求 $\sum_{i=1}^{2^n} d_i$ .

19 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ ，满足 $S_n = 2a_n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ ，数列 $\{b_n\}$ 满足

$$nb_{n+1} - (n+1)b_n = n(n+1) (n \in \mathbf{N}^*), \text{ 且 } b_1 = 1.$$

(1) 证明数列 $\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$ 为等差数列，并求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 若 $C_n = (-1)^{n+1} \frac{4(n+1)}{(3+2\log_2 a_n)(3+2\log_2 a_{n+1})}$  求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和 $T_{2n}$ .

(3) 若 $d_n = a_n \cdot \sqrt{b_n}$  数列 $\{d_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $D_n$ ，对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ ，都有 $D_n \leq nS_n - a$ ，求实数 $a$ 的取值范围.

20 已知 $q$ 和 $n$ 均为给定的大于1的自然数，设集合 $M = \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$ ，集合

$$A = \{x \mid x = x_1 + x_2q + \dots + x_nq^{n-1}, x_i \in M, i = 1, 2, \dots, n\},$$

(1) 当 $q = 2, n = 3$ 时，用列举法表示集合 $A$ 。

(2) 设 $s, t \in A, s = a_1 + a_2q + \dots + a_nq^{n-1}, t = b_1 + b_2q + \dots + b_nq^{n-1}$ ，其中

$$a_i, b_i \in M, i = 1, 2, \dots, n,$$

证明：若 $a_n < b_n$ ，则 $s < t$ 。