

## 数列2

本段落仅教师可见

数列解答题是天津卷高考必考内容，第一问通常考察求数列通项公式，第二问考察数列求和的方法、不等式的综合应用等。这里我们分成两讲，本节主要研究分组求和以及数列与不等式应用。

| 年份   | 2019 | 2018 | 2017 | 2016  | 2015 | 2014   |
|------|------|------|------|-------|------|--------|
| 题目类型 | 分组求和 | 裂项相消 | 错位相减 | 数列不等式 | 错位相减 | 数列与不等式 |

讲义制作人：李肖肖——097395

讲义审核人：天津教研团队

### 考试数据

2014 ~ 2019 年天津卷考频 100%，模拟题共 40 套试卷中出现频率 100%

| 知识模块 | 考点             | 天津卷                                 | 一模  | 二模  |
|------|----------------|-------------------------------------|-----|-----|
| 数列   | 等差、等比数列求和公式、性质 | 2015-18;2016-18;<br>2017-18;2018-18 | 17次 | 11次 |
|      | 裂项相消           | 2016-18;2018-18                     | 11次 | 10次 |
|      | 放缩             |                                     | 4次  | 1次  |
|      | 错位相减           | 2015-18;2017-18                     | 10次 | 8次  |
|      | 分组             | 2019-19                             | 3次  | 2次  |
|      | 不等式最值          | 2014-19                             | 4次  | 2次  |

### 考点分析



#### 高频考点

- ①求等差数列、等比数列通项公式,求变形数列前 $n$ 项和（如：2018年天津卷理第18题）
- ②掌握通项公式与前 $n$ 项和公式,解决简单的变形问题,如证等式成立（如：2018年天津卷理第18题）
- ③通过通项公式求和公式,证明不等式成立（如：2016年天津卷理第18题）
- ④求新构造数列的最大项与最小项（如：2013年天津卷理第18题）



### 考试难点

- ①构造数列求通项公式（如：2018年天津卷理第18题）
- ②新设数列求前 $n$ 项和（如：2015年天津卷理第18题）
- ③证明等式不式成立（如：2016年天津卷理第18题）
- ④裂项相消方式求和（如：2018年天津卷理第18题）
- ⑤注意计算错位相减出错（如：2017年天津卷理第18题）



### 易错点

- ①计算，特别是错位相减计算出错（如：2017年天津卷理第18题）
- ②裂项注意不要丢系数（如：2018年天津卷理第18题）
- ③分组求和丢项，计算出错

## 一、分组求和

### 你先试试看

1 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ ，且 $a_2 = 8$ ， $S_4 = 40$ ．数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $T_n$ ，且

$$T_n - 2b_n + 3 = 0, n \in \mathbf{N}^*.$$

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式．
- (2) 设 $c_n = \begin{cases} a_n, n \text{ 为奇数} \\ b_n, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 $n$ 项和 $P_n$ ．

### 答案

- (1)  $a_n = 4n$ ， $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ ．
- (2)  $P_n = \begin{cases} 2^{n+1} + n^2 - 2, n \text{ 为偶数} \\ 2^n + n^2 + 2n - 1, n \text{ 为奇数} \end{cases}$ ．

### 解析

(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$ ，

$$\text{由题意，得} \begin{cases} a_1 + d = 8 \\ 4a_1 + 6d = 40 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a_1 = 4 \\ d = 4 \end{cases},$$

$$\therefore a_n = 4n,$$

$$\therefore T_n - 2b_n + 3 = 0,$$

$\therefore$  当  $n = 1$  时,  $b_1 = 3$ , 当  $n \geq 2$  时,  $T_{n-1} - 2b_{n-1} + 3 = 0$ ,

两式相减, 得  $b_n = 2b_{n-1}$ , ( $n \geq 2$ ),

则数列  $\{b_n\}$  为等比数列,

$$\therefore b_n = 3 \cdot 2^{n-1}.$$

$$(2) c_n = \begin{cases} 4n, & n \text{ 为奇数} \\ 3 \cdot 2^{n-1}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}.$$

当  $n$  为偶数时,  $P_n = (a_1 + a_3 + \cdots + a_{n-1}) + (b_2 + b_4 + \cdots + b_n)$

$$= \frac{(4 + 4n - 4) \cdot \frac{n}{2}}{2} + \frac{6 \left(1 - 4^{\frac{n}{2}}\right)}{1 - 4}$$

$$= 2^{n+1} + n^2 - 2.$$

当  $n$  为奇数时,

$$n = 1 \text{ 时, } P_1 = c_1 = a_1 = 4,$$

(法一)  $n - 1$  为偶数,

$$P_n = P_{n-1} + c_n = 2^{(n-1)+1} + (n-1)^2 - 2 + 4n = 2^n + n^2 + 2n - 1,$$

(法二)  $P_n = (a_1 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_n) + (b_2 + b_4 + \cdots + b_{n-1})$

$$= \frac{(4 + 4n) \cdot \frac{n+1}{2}}{2} + \frac{6 \left(1 - 4^{\frac{n-1}{2}}\right)}{1 - 4}$$

$$= 2^n + n^2 + 2n - 1.$$

$$\therefore P_n = \begin{cases} 2^{n+1} + n^2 - 2, & n \text{ 为偶数} \\ 2^n + n^2 + 2n - 1, & n \text{ 为奇数} \end{cases}.$$

解析:

(1) 设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ ,

$$\text{由题意, 得 } \begin{cases} a_1 + d = 8 \\ 4a_1 + 6d = 40 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a_1 = 4 \\ d = 4 \end{cases},$$

$$\therefore a_n = 4n,$$

-----3分

$$\therefore T_n - 2b_n + 3 = 0,$$

$$\therefore \text{当 } n = 1 \text{ 时, } b_1 = 3, \text{ 当 } n \geq 2 \text{ 时, } T_{n-1} - 2b_{n-1} + 3 = 0,$$

两式相减, 得  $b_n = 2b_{n-1}$ , ( $n \geq 2$ ),

则数列  $\{b_n\}$  为等比数列,

$$\therefore b_n = 3 \cdot 2^{n-1}.$$

-----6分

$$(2) c_n = \begin{cases} 4n, n \text{ 为奇数} \\ 3 \cdot 2^{n-1}, n \text{ 为偶数} \end{cases}.$$

当  $n$  为偶数时,  $P_n = (a_1 + a_3 + \cdots + a_{n-1}) + (b_2 + b_4 + \cdots + b_n)$

$$= \frac{(4 + 4n - 4) \cdot \frac{n}{2}}{2} + \frac{6 \left(1 - 4^{\frac{n}{2}}\right)}{1 - 4}$$

$$= 2^{n+1} + n^2 - 2.$$

-----9分

当  $n$  为奇数时,

$$n = 1 \text{ 时}, P_1 = c_1 = a_1 = 4,$$

$$(\text{法一}) n - 1 \text{ 为偶数}, P_n = P_{n-1} + c_n = 2^{(n-1)+1} + (n-1)^2 - 2 + 4n = 2^n + n^2 + 2n - 1,$$

-----12分

$$(\text{法二}) P_n = (a_1 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_n) + (b_2 + b_4 + \cdots + b_{n-1})$$

$$= \frac{(4 + 4n) \cdot \frac{n+1}{2}}{2} + \frac{6 \left(1 - 4^{\frac{n-1}{2}}\right)}{1 - 4}$$

$$= 2^n + n^2 + 2n - 1.$$

-----12分

$$\therefore P_n = \begin{cases} 2^{n+1} + n^2 - 2, n \text{ 为奇数} \\ 2^n + n^2 + 2n - 1, n \text{ 为偶数} \end{cases}.$$

-----13分

### 听我慢慢讲

2 设  $\{a_n\}$  是等差数列,  $\{b_n\}$  是等比数列, 已知  $a_1 = 4$ ,  $b_1 = 6$ ,  $b_2 = 2a_2 - 2$ ,  $b_3 = 2a_3 + 4$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式.

(2) 设数列  $\{c_n\}$  满足  $c_1 = 1$ ,  $c_n = \begin{cases} 1, 2^k < n < 2^{k+1} \\ b_k, n = 2^k \end{cases}$ , 其中  $k \in \mathbf{N}^*$ .

① 求数列  $\{a_{2^n}(c_{2^n} - 1)\}$  的通项公式.

② 求  $\sum_{i=1}^{2^n} a_i c_i$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ).

### 答案

(1)  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = 3n + 1$ ,  $\{b_n\}$  的通项公式为  $b_n = 3 \cdot 2^n$ .

(2) ①  $a_{2^n}(c_{2^n} - 1) = 9 \times 4^n - 1$ .

②  $\sum_{i=1}^{2^n} a_i c_i = 27 \times 2^{2n-1} + 5 \times 2^{n-1} - n - 12$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ).

### 解析

(1) 依题意得  $\begin{cases} 6q = 6 + 2d \\ 6q^2 = 12 + 4d \end{cases}$ ,

$$\text{解得} \begin{cases} d = 3 \\ q = 2 \end{cases},$$

故  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = 3n + 1$ ,  $\{b_n\}$  的通项公式为  $b_n = 3 \cdot 2^n$ .

$$(2) \quad ① \quad a_{2^n}(c_{2^n} - 1) = a_{2^n}(b_n - 1) = (3 \times 2^n + 1)(3 \times 2^n - 1) = 9 \times 4^n - 1,$$

所以, 数列  $\{a_{2^n}(c_{2^n} - 1)\}$  的通项公式为  $a_{2^n}(c_{2^n} - 1) = 9 \times 4^n - 1$ .

$$\begin{aligned} ② \quad \sum_{i=1}^{2^n} a_i c_i &= \sum_{i=1}^{2^n} [a_i + a_i(c_i - 1)], \\ &= \sum_{i=1}^{2^n} a_i + \sum_{i=1}^n a_{2^i}(c_{2^i} - 1), \\ &= \left( 2^n \times 4 + \frac{2^n(2^n - 1)}{2} \times 3 \right) + \sum_{i=1}^n (9 \times 4^i - 1), \\ &= (3 \times 2^{2n-1} + 5 \times 2^{n-2}) + 9 \times \frac{4(1 - 4^n)}{1 - 4} - n, \\ &= 27 \times 2^{2n-1} + 5 \times 2^{n-1} - n - 12 \quad (n \in \mathbf{N}^*). \\ \text{故} \sum_{i=1}^{2^n} a_i c_i &= 27 \times 2^{2n-1} + 5 \times 2^{n-1} - n - 12 \quad (n \in \mathbf{N}^*). \end{aligned}$$

3 设  $\{a_n\}$  是等差数列,  $\{b_n\}$  是等比数列, 公比大于 0, 已知  $a_1 = b_1 = 3$ ,  $b_2 = a_3$ ,  $b_3 = 4a_2 + 3$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式.

(2) 设数列  $\{c_n\}$  满足  $c_n = \begin{cases} 1, n \text{ 为奇数} \\ b_{\frac{n}{2}}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ , 求  $a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cdots + a_{2n} c_{2n} \quad (n \in \mathbf{N}^*)$ .

答案

$$(1) \quad a_n = 3n, \quad b_n = 3^n.$$

$$(2) \quad \frac{(2n-1)3^{n+2} + 6n^2 + 9}{2} \quad (n \in \mathbf{N}^*)$$

解析

(1) 设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 等比数列  $b_n$  的公比为  $q$  依题意,

$$\text{得} \begin{cases} 3q = 3 + 2d \\ 3q^2 = 15 + 4d \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} d = 3 \\ q = 3 \end{cases},$$

$$\text{故} a_n = 3 + 3(n-1) = 3n, \quad b_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n,$$

所以,  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = 3n$ ,  $\{b_n\}$  的通项公式为  $b_n = 3^n$ .

$$(2) \quad a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cdots + a_{2n} c_{2n}$$

$$\begin{aligned} &= (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}) + (a_2 b_1 + a_4 b_2 + a_6 b_3 + \cdots + a_{2n} b_n) \\ &= \left[ n \times 3 + \frac{n(n-1)}{2} \times 6 \right] + (6 \times 3^1 + 12 \times 3^2 + 18 \times 3^3 + \cdots + 6n \times 3^n) \\ &= 3n^2 + 6(1 \times 3^1 + 2 \times 3^2 + \cdots + n \times 3^n). \end{aligned}$$

$$T_n = 1 \times 3^1 + 2 \times 3^2 + \cdots + n \times 3^n, \quad ①$$

$$3T_n = 1 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + \cdots + n \times 3^{n+1}, \quad ②$$

$$\begin{aligned} \text{②}-\text{①} \text{得}, 2T_n &= -3 - 3^2 - 3^3 - \cdots - 3^n + n \times 3^{n+1} \\ &= -\frac{3(1-3^n)}{1-3} + n \times 3^{n+1} \\ &= \frac{(2n-1)3^{n+1} + 3}{2}. \end{aligned}$$

所以,  $a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_{20}c_{20}$

$$\begin{aligned} &= 3n^2 + 6T_n \\ &= 3n^2 + 3 \times \frac{(2n-1)3^{n+1} + 3}{2} \\ &= \frac{(2n-1)3^{n+2} + 6n^2 + 9}{2} (n \in \mathbf{N}^*). \end{aligned}$$

## 导图总结

分组求和模型:

①  $a_n \pm b_n$ : 组内并项求和

$$\text{② } a_n = \begin{cases} f(n) \\ g(n) \end{cases}, n \in \mathbf{N}^*,$$

【注意】(1) 所求和为  $S_n$  或  $S_{2n}$ ;

(2) 奇偶项的项数问题;

$$(3) \text{最后需写综上 } S_n = \begin{cases} S'_n, & n \text{ 为奇数} \\ S''_n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}.$$

## 你再试试看

### 1. 项内分组

4 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 2$ ,  $(n+2)a_n = (n+1)a_{n+1} - 2(n^2 + 3n + 2)$ , 设  $b_n = \frac{a_n}{n+1}$ .

(1) 求  $b_1, b_2, b_3$  的值.

(2) 证明数列  $\{b_n\}$  是等差数列.

(3) 设  $\frac{c_n}{b_n} = 2^n + 1$ , 求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n (n \in \mathbf{N}^*)$ .

答案 (1)  $b_1 = 1, b_2 = 3, b_3 = 5$ .

(2) 证明见解析.

(3)  $T_n = (2n-5) \cdot 2^n + n^2 + 6$ .

解析 (1) 由  $(n+2)a_n = (n+1)a_{n+1} - 2(n^2 + 3n + 2)$

$$\text{得}(n+2)a_n = (n+1)a_{n+1} - 2(n+2)(n+1),$$

$$\frac{a_n}{n+1} - \frac{a_{n+1}}{n+2} = -2,$$

$$\frac{a_{n+1}}{n+2} - \frac{a_n}{n+1} = 2,$$

$$\therefore b_n = \frac{a_n}{n+1},$$

$$\therefore b_{n+1} - b_n = 2,$$

$$\therefore b_1 = \frac{a_1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1,$$

$$b_2 = b_1 + 2 = 3,$$

$$b_3 = b_2 + 2 = 5.$$

(2) 由(1)知  $b_{n+1} - b_n = 2$ ,  $b_1 = 1$ ,

$\therefore$  数列  $\{b_n\}$  是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列.

(3) 由(1), (2) 知  $b_n = 2n - 1$ ,

$$\therefore \frac{c_n}{b_n} = 2^n + 1 \text{ 得 } c_n = (2n - 1)(2^n + 1)$$

$$= (2n - 1) \cdot 2^n + (2n - 1),$$

$$\therefore T_n = 1 \times 2 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \cdots + (2n - 1) \times 2^n$$

$$+ 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1),$$

$$\text{令 } T_1 = 1 \times 2 + 3 \times 2^2 + \cdots + (2n - 1) \times 2^n, \quad \textcircled{1}$$

$$\therefore 2T_1 = 1 \times 2^2 + \cdots + (2n - 3) \times 2^n + (2n - 1) \times 2^n, \quad \textcircled{2}$$

$$\therefore \textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 得 } -T_1 = 1 \times 2 + 2(2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) - (2n - 1) \times 2^n$$

$$= (5 - 2n) \times 2^n - 6,$$

$$\text{得 } T_1 = (2n - 5) \times 2^n + 6,$$

$$\text{令 } T_2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2,$$

$$\therefore T_n = T_1 + T_2 = (2n - 5) \cdot 2^n + n^2 + 6.$$

## 2. 分奇偶

5 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 数列  $\{b_n\}$  是等比数列, 满足  $a_1 = 3$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 + S_2 = 10$ ,

$$a_5 - 2b_2 = a_3.$$

(1) 求数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  通项公式.

(2) 令  $c_n = \begin{cases} \frac{2}{S_n}, & (n \text{ 为奇数}) \\ b_n, & (n \text{ 为偶数}) \end{cases}$ , 设数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ , 求  $T_n$ .

答案

(1)  $a_n = 2n + 1, b_n = 2^{n-1}$ .

(2) 当  $n$  为奇数时,  $T_n = \frac{2^n - 2}{3} + \frac{n+1}{n+2}$ ,  
当  $n$  为偶数时,  $T_n = \frac{2^{n+1} - 2}{3} + \frac{n}{n+1}$ .

解析

(1) 设数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 数列  $\{b_n\}$  的公比为  $q$ ,

则由  $a_1 = 3, b_1 = 1, b_2 + S_2 = 10, a_5 - 2b_2 = a_3$ ,

得  $\begin{cases} q + 3 + 3 + d = 10 \\ a_1 + 4d - 2q = 3 + 2d \end{cases}$ , 解得  $d = 2, q = 2$ ,

$\therefore a_n = 2n + 1, b_n = 2^{n-1}$ .

(2) 由 (1) 可得,  $S_n = n(n+2)$ ,

则  $c_n = \begin{cases} \frac{2}{n(n+2)}, n \text{ 为奇数} \\ 2^{n-1}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ , 即  $c_n = \begin{cases} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}, n \text{ 为奇数} \\ 2^{n-1}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ,

当  $n$  为奇数时,

$$\begin{aligned} T_n &= \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) + (2 + 2^3 + 2^5 + \cdots + 2^{n-2}) \\ &= 1 - \frac{1}{n+2} + \frac{2(1 - 4^{\frac{n-1}{2}})}{1 - 4} \\ &= \frac{2^n - 2}{3} + \frac{n+1}{n+2}, \end{aligned}$$

当  $n$  为偶数时,

$$\begin{aligned} T_n &= \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + (2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{2(1 - 4^{\frac{n}{2}})}{1 - 4} \\ &= \frac{2^{n+1} - 2}{3} + \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

6

已知数列  $\{a_n\}$  是等差数列,  $S_n$  为  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 且  $a_{10} = 19, S_{10} = 100$ , 数列  $\{b_n\}$  对任意  $n \in \mathbf{N}^*$

, 总有  $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_{n-1} \cdot b_n = a_n + 2$  成立.

(1) 求数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式.

(2) 记  $c_n = (-1)^n \frac{4n \cdot b_n}{(2n+1)^2}$ , 求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

答案

(1)  $a_n = 2n - 1; b_n = \frac{2n+1}{2n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$ .

(2)  $T_n = \begin{cases} -\frac{2n}{2n+1}, n \text{ 为偶数} \\ -\frac{2n+2}{2n+1}, n \text{ 为奇数} \end{cases}$ .

解析

(1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$ ,

$$\text{则 } a_{10} = a_1 + 9d = 19, S_{10} = 10a_1 + \frac{10 \times 9}{2} \times d = 100,$$

解得 $a_1 = 1, d = 2$ , 所以 $a_n = 2n - 1$ ,

$$\text{所以 } b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \dots b_{n-1} \cdot b_n = 2n + 1 \text{ ①},$$

当 $n = 1$ 时,  $b_1 = 3$ ,

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \dots b_{n-1} = 2n - 1 \text{ ②},$$

$$\text{①②两式相除得 } b_n = \frac{2n+1}{2n-1} (n \geq 2),$$

因为当 $n = 1$ 时,  $b_1 = 3$ 适合上式, 所以 $b_n = \frac{2n+1}{2n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$ .

$$(2) \text{ 由已知 } c_n = (-1)^n \frac{4n \cdot b_n}{(2n+1)^2},$$

$$\text{得 } c_n = (-1)^n \frac{4n}{(2n-1)(2n+1)} = (-1)^n \left( \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$\text{则 } T_n = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n$$

$$= -\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \dots + (-1)^n \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right),$$

当 $n$ 为偶数时,

$$\begin{aligned} T_n &= -\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \dots + (-1)^n \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \left(-1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= -1 + \frac{1}{2n+1} \\ &= -\frac{2n}{2n+1}, \end{aligned}$$

当 $n$ 为奇数时,

$$\begin{aligned} T_n &= -\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \dots + (-1)^n \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \left(-1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= -1 - \frac{1}{2n+1} \\ &= -\frac{2n+2}{2n+1}. \end{aligned}$$

$$\text{综上: } T_n = \begin{cases} -\frac{2n}{2n+1}, & n \text{ 为偶数} \\ -\frac{2n+2}{2n+1}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}.$$

## 二、数列与不等式

你先试试看



不等式最值

7 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ ，且 $S_3 = 9$ ， $a_1$ ， $a_3$ ， $a_7$ 成等比数列．

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式．

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 是递增数列，数列 $b_n$ 满足 $b_n = 2^{a_n}$ ， $T_n$ 是数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 $n$ 项和，求 $T_n$ 并求使 $T_n > 1000$ 成立的 $n$ 的最小值．

**答案** (1)  $a_n = n + 1$  或  $a_n = 3$ ．

(2)  $T_n = n \cdot 2^{n+2}$ ， $n$ 的最小值为6．

**解析** (1) 等差数列 $\{a_n\}$ 公差为 $d$ ，首项为 $a_1$ ，

$\because a_1, a_3, a_7$ 成等比数列，

$$\therefore a_3^2 = a_1 a_7,$$

$$\text{即 } (a_1 + 2d)^2 = a_1 (a_1 + 6d),$$

$$\text{化简得 } d = \frac{1}{2}a_1, \text{ 或 } d = 0.$$

$$\text{当 } d = \frac{1}{2}a_1, S_3 = 3a_1 + \frac{3 \times 2}{2} \times \frac{1}{2}a_1 = 9 \text{ 得 } a_1 = 2, d = 1.$$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + (n-1) = n+1 \text{ 即 } a_n = n+1,$$

数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = n+1$ ，

$$\text{当 } d = 0 \text{ 时, } S_3 = 3a_1 = 9, a_1 = 3,$$

$\therefore$  数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = 3$ ．

综上： $a_n = n+1$  或  $a_n = 3$ ．

(2) 因为 $\{a_n\}$ 是单调递增数列，所以 $a_n = n+1$ ，

$$\text{则 } b_n = 2^{n+1}, \text{ 则 } a_n b_n = (n+1)2^{n+1},$$

$$\text{所以 } T_n = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + (n+1) \cdot 2^{n+1} \text{ ①,}$$

$$2T_n = 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + \cdots + n \cdot 2^{n+1} + (n+1) \cdot 2^{n+2} \text{ ②,}$$

$$\text{②}-\text{①得: } T_n = (n+1) \cdot 2^{n+2} - 8 - (2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{n+1})$$

$$= (n+1)2^{n+2} - 8 - (2^{n+2} - 8) = n \cdot 2^{n+2},$$

显然 $T_n$ 在 $n \in \mathbf{N}^*$ 上单调递增，

$$\text{又 } T_5 = 5 \cdot 2^7 = 640 < 1000, T_6 = 6 \cdot 2^8 = 1536 > 1000,$$

$\therefore T_n > 1000$ 成立的 $n$ 的最小值为6．

解：

(1) 等差数列 $\{a_n\}$ 公差为 $d$ ，首项为 $a_1$ ，

$\therefore a_1, a_3, a_7$ 成等比数列，

$$\therefore a_3^2 = a_1 a_7,$$

$$\text{即}(a_1 + 2d)^2 = a_1(a_1 + 6d),$$

$$\text{化简得} d = \frac{1}{2}a_1, \text{ 或 } d = 0.$$

-----2分

$$\text{当} d = \frac{1}{2}a_1, S_3 = 3a_1 + \frac{3 \times 2}{2} \times \frac{1}{2}a_1 = 9 \text{ 得 } a_1 = 2, d = 1.$$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + (n-1) = n+1 \text{ 即 } a_n = n+1,$$

数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = n+1$ ，

-----3分

$$\text{当} d = 0 \text{ 时, } S_3 = 3a_1 = 9, a_1 = 3,$$

$\therefore$  数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = 3$ 。

-----4分

综上： $a_n = n+1$  或  $a_n = 3$ 。

-----5分

(2) 因为 $\{a_n\}$ 是单调递增数列，所以 $a_n = n+1$ ，

$$\text{则 } b_n = 2^{n+1}, \text{ 则 } a_n b_n = (n+1)2^{n+1},$$

$$\text{所以 } T_n = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + (n+1) \cdot 2^{n+1} \text{ ①,}$$

$$2T_n = 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + \cdots + n \cdot 2^{n+1} + (n+1) \cdot 2^{n+2} \text{ ②,}$$

-----8分

$$\text{②}-\text{①得: } T_n = (n+1) \cdot 2^{n+2} - 8 - (2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{n+1})$$

$$= (n+1)2^{n+2} - 8 - (2^{n+2} - 8) = n \cdot 2^{n+2},$$

-----10分

显然 $T_n$ 在 $n \in \mathbf{N}^*$ 上单调递增，

$$\text{又 } T_5 = 5 \cdot 2^7 = 640 < 1000, T_6 = 6 \cdot 2^8 = 1536 > 1000,$$

$\therefore T_n > 1000$ 成立的 $n$ 的最小值为6。

-----13分



8 设  $S_n$  是正项数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 且  $S_n = \frac{1}{4}a_n^2 + \frac{1}{2}a_n - \frac{3}{4}$ .

- (1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式.
- (2) 是否存在等比数列  $\{b_n\}$ , 使  $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = (2n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$  对一切正整数  $n$  都成立? 并证明你的结论.
- (3)  $\sqrt{C_n} = \frac{1}{1+a_n}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), 且数列  $\{C_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 试比较  $T_n$  与  $\frac{1}{6}$  的大小.

**答案** (1)  $a_n = 2n + 1$ .

(2) 存在, 证明见解析.

(3)  $T_n < \frac{1}{6}$ .

**解析** (1) 由  $S_n = \frac{1}{4}a_n^2 + \frac{1}{2}a_n - \frac{3}{4}$ ,  $S_{n+1} = \frac{1}{4}a_{n+1}^2 + \frac{1}{2}a_{n+1} - \frac{3}{4}$ , 相减并整理得

$(a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n - 2) = 0$ , 又由于  $a_{n+1} + a_n > 0$ , 则  $a_{n+1} = a_n + 2$ , 故  $\{a_n\}$  是等差数列.

$\because a_1 = S_1 = \frac{1}{4}a_1^2 + \frac{1}{2}a_1 - \frac{3}{4} > 0$ , 所以  $a_1 = 3$ , 故  $a_n = 2n + 1$ .

(2) 当  $n = 1, 2$  时,  $a_1b_1 = 2^2(2 \times 1 - 1) + 2 = 6$ ,

$a_1b_1 + a_2b_2 = 2^3(2 \times 2 - 1) + 2 = 26$ , 可解得  $b_1 = 2, b_2 = 4$ ,

猜想  $b_n = 2^n$ , 使  $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = (2n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$  成立.

证明:  $3 \cdot 2 + 5 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2^3 + \dots + (2n+1)2^n = 2^{n+1}(2n-1) + 2$  恒成立.

令  $S = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2^3 + \dots + (2n+1)2^n$  ①

$2S = 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^4 + \dots + (2n+1)2^{n+1}$  ②

②-①得:  $S = (2n+1)2^{n+1} - 2 \cdot 2^{n+1} + 2 = (2n-1)2^{n+1} + 2$ ,

故存在等比数列  $\{b_n\}$  符合题意.

(3)  $C_n = \frac{1}{(2n+2)^2} < \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right)$ ,

则

$$\begin{aligned} T_n &= c_1 + c_2 + \dots + c_n < \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right) < \frac{1}{6} \end{aligned}$$

故  $T_n < \frac{1}{6}$ .

解:

(1) 由  $S_n = \frac{1}{4}a_n^2 + \frac{1}{2}a_n - \frac{3}{4}$ ,  $S_{n+1} = \frac{1}{4}a_{n+1}^2 + \frac{1}{2}a_{n+1} - \frac{3}{4}$ , 相减并整理得

$$(a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n - 2) = 0,$$

-----2分

又由于  $a_{n+1} + a_n > 0$ , 则  $a_{n+1} = a_n + 2$ , 故  $\{a_n\}$  是等差数列.

$$\because a_1 = S_1 = \frac{1}{4}a_1^2 + \frac{1}{2}a_1 - \frac{3}{4} > 0, \text{ 所以 } a_1 = 3, \text{ 故 } a_n = 2n + 1.$$

-----3分

$$(2) \text{ 当 } n = 1, 2 \text{ 时, } a_1 b_1 = 2^2(2 \times 1 - 1) + 2 = 6,$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 2^3(2 \times 2 - 1) + 2 = 26, \text{ 可解得 } b_1 = 2, b_2 = 4,$$

-----5分

猜想  $b_n = 2^n$ , 使  $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = (2n - 1) \cdot 2^{n+1} + 2$  成立.

证明:  $3 \cdot 2 + 5 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2^3 + \dots + (2n + 1)2^n = 2^{n+1}(2n - 1) + 2$  恒成立.

$$\text{令 } S = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2^3 + \dots + (2n + 1)2^n \quad ①$$

$$2S = 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^4 + \dots + (2n + 1)2^{n+1} \quad ②$$

-----7分

$$② - ① \text{ 得: } S = (2n + 1)2^{n+1} - 2 \cdot 2^{n+1} + 2 = (2n - 1)2^{n+1} + 2,$$

故存在等比数列  $\{b_n\}$  符合题意.

-----9分

$$(3) C_n = \frac{1}{(2n + 2)^2} < \frac{1}{(2n + 1)(2n + 3)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n + 1} - \frac{1}{2n + 3} \right),$$

-----11分

$$\text{则 } T_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n < \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n + 1} - \frac{1}{2n + 3} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2n + 3} \right) < \frac{1}{6},$$

$$\text{故 } T_n < \frac{1}{6}.$$

-----13分

### 听我慢慢讲



不等式最值

9

已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = 1 - \frac{1}{4a_n}$ ,  $b_n = \frac{2}{2a_n - 1}$ , 其中  $n \in \mathbf{N}^*$ .

(1) 求证: 数列  $\{b_n\}$  是等差数列, 并求出数列  $\{a_n\}$  的通项公式.

(2)

设  $c_n = \frac{4a_n}{n+1}$ ，数列  $\{c_n c_{n+2}\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ ，是否存在正整数  $m$ ，使得  $T_n < \frac{1}{c_m c_{m+1}}$  对于  $n \in \mathbf{N}^*$  恒成立？若存在，求出  $m$  的最小值；若不存在，请说明理由。

**答案** (1)  $a_n = \frac{n+1}{2n}$  .

(2) 3

**解析** (1)  $\because a_{n+1} = 1 - \frac{1}{4a_n}$ ， $b_n = \frac{2}{2a_n - 1}$ ，

$\therefore$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{2}{2a_{n+1} - 1} - \frac{2}{2a_n - 1} = \frac{2}{2 \times \left(1 - \frac{1}{4a_n}\right) - 1} - \frac{2}{2a_n - 1} = \frac{4a_n}{2a_n - 1} - \frac{2}{2a_n - 1} = \frac{2(2a_n - 1)}{2a_n - 1} = 2$$

,

$\therefore$  数列  $\{b_n\}$  是等差数列，首项为  $b_1 = \frac{2}{2a_1 - 1} = 2$ ，公差为 2，

$\therefore b_n = 2 + 2(n-1) = 2n$  .

$\therefore \frac{2}{2a_n - 1} = 2n$ ，解得  $a_n = \frac{n+1}{2n}$  .

(2)  $c_n = \frac{4a_n}{n+1} = \frac{2}{n}$ ，

$\therefore c_n c_{n+2} = \frac{4}{n(n+2)} = 2 \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$  .

$\therefore$  数列  $\{c_n c_{n+2}\}$  的前  $n$  项和为：

$$\begin{aligned} T_n &= 2 \left[ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \right] \\ &= 2 \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right), \end{aligned}$$

假设存在正整数  $m$ ，使得  $T_n < \frac{1}{c_m c_{m+1}}$  对于  $n \in \mathbf{N}^*$  恒成立，

$\therefore 2 \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) < \frac{m(m+1)}{4}$ ，

化为  $\frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} < \frac{m(m+1)}{8}$ ，

由于数列  $\left\{ \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} \right\}$  是单调递增数列，

$\therefore \frac{3}{2} \leq \frac{m(m+1)}{8}$ ，

化为  $m^2 + m - 12 \geq 0$ ，

解得  $-4 \geq m$ ，或  $m \geq 3$ ，

因此存在正整数  $m$ ，其最小值为 3，使得  $T_n < \frac{1}{c_m c_{m+1}}$  对于  $n \in \mathbf{N}^*$  恒成立。

放缩

10 设数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ . 已知 $a_1 = 1$ ,  $\frac{2S_n}{n} = a_{n+1} - \frac{1}{3}n^2 - n - \frac{2}{3}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .

(1) 求 $a_2$ 的值.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(3) 证明: 对一切正整数 $n$ , 有 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{7}{4}$ .

答案

(1)  $a_2 = 4$ ;

(2)  $a_n = n^2$ .

(3) 证明见解析.

解析

(1) 依题意,  $2S_1 = a_2 - \frac{1}{3} - 1 - \frac{2}{3}$ ,

又 $S_1 = a_1 = 1$ , 所以 $a_2 = 4$ .

(2) 当 $n \geq 2$ 时,  $2S_n = na_{n+1} - \frac{1}{3}n^3 - n^2 - \frac{2}{3}n$ ,

$2S_{n-1} = (n-1)a_n - \frac{1}{3}(n-1)^3 - (n-1)^2 - \frac{2}{3}(n-1)$  两式相减得

$2a_n = na_{n+1} - (n-1)a_n - \frac{1}{3}(3n^2 - 3n + 1) - (2n-1) - \frac{2}{3}$ ,

整理得 $(n+1)a_n = na_{n+1} - n(n+1)$ ,

即 $\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = 1$ ,

又 $\frac{a_2}{2} - \frac{a_1}{1} = 1$ ,

故数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是首项为 $\frac{a_1}{1} = 1$ , 公差为1的等差数列,

所以 $\frac{a_n}{n} = 1 + (n-1) \times 1 = n$ , 所以 $a_n = n^2$ .

(3) 当 $n=1$ 时,  $\frac{1}{a_1} = 1 < \frac{7}{4}$ ;

当 $n=2$ 时,  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} < \frac{7}{4}$ ;

当 $n \geq 3$ 时,  $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ ,

此时 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

$< 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$

$= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{7}{4} - \frac{1}{n} < \frac{7}{4}$ ,

综上, 对一切正整数 $n$ , 有 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{7}{4}$ .

导图总结

## 数列与不等式常见题型：

- ①求最值；
- ②证明不等式成立.

## 常用方法：

- ①数列的函数性质，需注意 $n$ 的取值范围；
- ②放缩成裂项求和.

### 【常见放缩】

#### (1) 裂项放缩

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \frac{1}{n^2} &= \frac{4}{4n^2} < \frac{4}{4n^2 - 1} = 2\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \\ \textcircled{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &< 1 + 1 + \frac{1}{2 \times 1} + \frac{1}{3 \times 2} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} < \frac{5}{2} \\ \textcircled{3} \frac{1}{2^n(2^n-1)} &= \frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^n} \\ \textcircled{4} \frac{1}{\sqrt{n+2}} &< \sqrt{n+2} - \sqrt{n} \\ \textcircled{5} 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &< \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \\ \textcircled{6} \frac{1}{\sqrt{n}} &< \sqrt{2}(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+\frac{1}{2}} + \sqrt{n-\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

#### (2) 函数放缩

常见的有  $\ln x \leq x - 1 \Rightarrow \frac{\ln x}{x} \leq 1 - \frac{1}{x}$

证明  $\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} + \cdots + \frac{\ln 3^n}{3^n} < 3^n - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^n}\right)$

如： $\ln x < x$ ， $\ln x > 1 - \frac{1}{x}$ ，也是常用的函数放缩形式.

#### (3) 分式放缩

常用不等式：

$$\frac{b}{a} > \frac{b+m}{b+m} \quad (b > a > 0, m > 0) \text{ 和 } \frac{b}{a} < \frac{b+m}{a+m} \quad (a > b > 0, m > 0)$$

如： $(1+1)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right) > \sqrt{2n-1}$

利用第一个性质得：

$$\begin{aligned} \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} &> \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdots \frac{2n+1}{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} (2n+1) \\ \Rightarrow \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1}\right) &> 2n+1, \text{ 即不等式成立.} \end{aligned}$$

你再试试看



不等式最值

11 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$ 满足： $S_n = a(S_n - a_n + 1)$ ，（ $a$ 为常数， $a \neq 0$ ， $a \neq 1$ ）。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(2) 设 $b_n = a_n + S_n$ ，若数列 $\{b_n\}$ 为等比数列，求 $a$ 的值。

(3) 在满足条件(2)的情形下， $c_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)}$ ，若数列 $\{c_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $T_n$ ，且对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 满足 $T_n < \lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda$ ，求实数 $\lambda$ 的取值范围。

答案

(1)  $a_n = a^n$ 。

(2)  $a = \frac{1}{2}$ 。

(3)  $\lambda \in (-\infty, -1] \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ 。

解析

(1)  $S_n = a(S_n - a_n + 1)$ 。

$$S_{n-1} = a(S_{n-1} - a_{n-1} + 1),$$

$$a_n = a \cdot a_n - a \cdot a_n + a \cdot a_{n-1}.$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = a.$$

$$\therefore a_1 = a(a_1 - a_1 + 1) = a.$$

$\therefore \{a_n\}$ 为 $a_1 = a$ ， $q = a$ 的等比数列。

$$\therefore a_n = a \cdot a^{n-1} = a^n.$$

$$(2) S_n = \frac{a(1-a^n)}{1-a}.$$

$$b_n = a^n + \frac{a-a^{n+1}}{1-a} = \frac{a+a^n-2a^{n+1}}{1-a}.$$

$\therefore \{b_n\}$ 为等比数列。

$$\therefore b_2^2 = b_1 b_3.$$

$$\left(\frac{a+a^2-2a^3}{1-a}\right)^2 = \frac{a+a-2a^2}{1-a} \times \frac{a+a^3-2a^4}{1-a}.$$

$$(1+a-2a^2)^2 = 2(1-a)(1+a^2-2a^3).$$

$$a^2+2a+1+4a^4-4a^3-4a^2 = 2+2a^2-4a^3-2a-2a^3+4a^4.$$

$$2a^3-5a^2+4a-1=0.$$

$$(2a-1)(a-1)^2=0.$$

$$a = \frac{1}{2} \text{ 或 } a = 1 \text{ (舍)}.$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}.$$

$$(3) c_n = \frac{a^{n+1}}{(a^n+1)(a^{n+1}+1)} = \frac{1}{2^{-n-1}+1} - \frac{1}{2^{-n}+1}.$$

$$\begin{aligned}
 T_n &= \frac{1}{2^{-n-1} + 1} - \frac{2}{3} \\
 &= \frac{2^{n+1}}{1 + 2^{n+1}} - \frac{2}{3} \\
 &= \frac{2^{n+1} + 1 - 1}{2^{n+1} + 1} - \frac{2}{3} \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{1 + 2^{n+1}} \quad (n \in \mathbf{N}^*) . \\
 \therefore T_n &< \frac{1}{3}, \text{ 即 } \lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda \geq \frac{1}{3}, 3\lambda^2 + 2\lambda - 1 \geq 0 . \\
 \therefore \lambda &\in (-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right) .
 \end{aligned}$$

### 题型通解

直接求出数列和的表示式,然后求出最大值或最小值,与要求的含参函数比较,解不等式,

如  $T_n < \lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda$ , 求  $\lambda$  的取值范围, 或  $\lambda$  最小正整数.

### 放缩

12 设数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = 3a_n$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ . 设  $S_n$  为数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和, 已知  $b_1 \neq 0$ ,

$$2b_n - b_1 = S_1 \cdot S_n, n \in \mathbf{N}^* .$$

(1) 求数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  的通项公式.

(2) 设  $c_n = b_n \cdot \log_3 a_n$ , 求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

(3) 证明: 对任意  $n \in \mathbf{N}^*$  且  $n \geq 2$ , 有  $\frac{1}{a_2 - b_2} + \frac{1}{a_3 - b_3} + \dots + \frac{1}{a_n - b_n} < \frac{3}{2}$ .

**答案** (1)  $a_n = 3^{n-1}$ ,  $b_n = 2^{n-1}$ .

(2)  $T_n = (n-2)2^n + 2$ .

(3) 答案见解析.

**解析** (1)  $\because a_{n+1} = 3a_n$ ,

$\therefore \{a_n\}$  是公比为 3, 首项  $a_1 = 1$  的等比数列,

$\therefore$  通项公式为  $a_n = 3^{n-1}$ .

$\because 2b_n - b_1 = S_1 \cdot S_n$ ,

$\therefore$  当  $n = 1$  时,  $2b_1 - b_1 = S_1 \cdot S_1$ ,

$\because S_1^2 = b_1$ ,  $b_1 \neq 0$ ,  $\therefore b_1 = 1$ .

$\therefore$  当  $n > 1$  时,  $b_n = S_n - S_{n-1} = 2b_n - 2b_{n-1}$ ,

$$\therefore b_n = 2b_{n-1},$$

$\therefore \{b_n\}$  是公比为 2, 首项  $a_1 = 1$  的等比数列,

$\therefore$  通项公式为  $b_n = 2^{n-1}$ .

$$(2) c_n = b_n \cdot \log_3 a_n = 2^{n-1} \log_3 3^{n-1} = (n-1)2^{n-1},$$

$$T_n = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + \dots + (n-2)2^{2n-2} + (n-1)2^{2n-1} \dots ①$$

$$2T_n = 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \dots + (n-2)2^{2n-1} + (n-1)2^{2n} \dots ②$$

$$① - ② \text{ 得: } -T_n = 0 \cdot 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 \dots + 2^{2n-1} - (n-1)2^{2n}$$

$$= 2^n - 2 - (n-1)2^n = -2 - (n-2)2^n$$

$$\therefore T_n = (n-2)2^n + 2.$$

$$\begin{aligned} (3) \frac{1}{a_n - b_n} &= \frac{1}{3^{n-1} - 2^{n-1}} = \frac{1}{3 \cdot 3^{n-2} - 2^{n-1}} = \frac{1}{3^{n-2} + 2(3^{n-2} - 2^{n-2})} \\ &\leq \frac{1}{3^{n-2}} + \frac{1}{a_2 - b_2} + \frac{1}{a_3 - b_3} + \dots + \frac{1}{a_n - b_n} \\ &< \frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1} + \dots + \frac{1}{3^{n-2}} = \frac{1 - (\frac{1}{3})^{n-1}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{1}{3^{n-1}} \right) < \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

13 已知非单调数列  $\{a_n\}$  是公比为  $q$  的等比数列, 且  $a_1 = -\frac{1}{4}$ ,  $a_2 = 16a_4$ , 记  $b_n = \frac{5a_n}{1 - a_n}$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式.

(2) 若对任意正整数  $n$ ,  $|m - 1| \geq 3b_n$  都成立, 求实数  $m$  的取值范围.

(3) 设数列  $\{b_{2n}\}$ ,  $\{b_{2n-1}\}$  的前  $n$  项和分别为  $S_n$ ,  $T_n$ . 证明: 对任意的正整数  $n$ , 都有

$$2S_n < 2T_n + 3.$$

**答案** (1)  $a_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n$ .

(2)  $m \geq 2$  或  $m \leq 0$ .

(3) 证明见解析.

**解析** (1)  $\because$  数列  $\{a_n\}$  是公比为  $q$  的等比数列, 且  $a_1 = -\frac{1}{4}$ ,  $a_2 = 16a_4$ ,

$$\therefore q^2 = \frac{a_4}{a_2} = \frac{1}{16}, \text{ 解得 } q = \pm \frac{1}{4},$$

$$\because \text{数列是非单调数列}, \therefore q = -\frac{1}{4},$$

$$\text{则 } a_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n.$$

$$(2) \text{ 由 } b_n = \frac{5a_n}{1-a_n}, \text{ 得 } b_n = \frac{5}{\frac{1}{a_n-1}} = \frac{5}{(-4)^n - 1},$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时, } b_n = \frac{5}{-4^n - 1} < 0,$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } b_n = \frac{5}{4^n - 1} > 0, \text{ 且 } \{b_n\} \text{ 为减函数,}$$

$$\therefore \{b_n\}_{\max} = b_2 = \frac{1}{3}, \text{ 则 } |m-1| \geq 3b_n = 1, \text{ 解得 } m \geq 2 \text{ 或 } m \leq 0.$$

$$(3) \because b_{2n} - b_{2n-1} = \frac{5}{4^{2n} - 1} + \frac{5}{4^{2n-1} + 1} = \frac{5(4^{2n-1} + 4^{2n})}{(4^{2n-1} - 1)(4^{2n-1} + 1)}$$

$$= \frac{5(4^{2n-1} + 4^{2n})}{4^{4n-1} + 4^{2n} + 4^{2n-1} - 1} < \frac{5(4^{2n-1} + 4^{2n})}{4^{4n-1}} = \frac{25}{4^{2n}} = \frac{25}{16^n},$$

$$\therefore S_n - T_n = (b_2 - b_1) + (b_4 - b_3) + \cdots + (b_{2n} - b_{2n-1})$$

$$< \frac{5}{15} + \frac{5}{5} + 25 \left( \frac{1}{16^2} + \frac{1}{16^3} + \cdots + \frac{1}{16^n} \right)$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{5}{48} \left( 1 - \frac{1}{16^n} \right) < \frac{4}{3} + \frac{5}{48} = \frac{69}{48} < \frac{3}{2},$$

$$\therefore 2S_n - 2T_n < 3, \text{ 即 } 2S_n < 2T_n + 3.$$

### 题型通解

①读题时需注意“非单调性”，所以对等比数列来说  $q < 0$ ;

②第二问不等式恒成立问题需求数列  $\{b_n\}$  的最大值，通常可以利用单调性来求出；

③第三问证明不等式问题，可以想到的解决方法有：裂项相消、放缩，

此题可以通过移项将  $S_n$  与  $T_n$  放在一起转化成数列  $\{S_n - T_n\}$  求和，

此时必要问题就是求出数列  $\{S_n - T_n\}$  的通项，

再通过找合适的 裂项相消 或 放缩法 去证明不等式。

### 登堂入室

#### 不等式最值

14 数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$

(1) 已知  $a_n = 1 + (-1)^n \times \frac{1}{2^n}$ ,  $m \leq a_n \leq k$ , 求  $m$  的最大值和  $k$  的最小值

(2) 已知  $a_n = \frac{3n+1}{2^n}$ , 对  $\forall n \in N^* S_n < \lambda^2 + 6\lambda$  恒成立, 求  $\lambda$  的取值范围

答案 (1)  $m$  的最大值为  $\frac{1}{2}$ ,  $k$  的最小值为  $\frac{5}{4}$

(2)  $\lambda \in (-\infty - 7] \cup [1 + \infty)$

解析

$$(1) \text{ 解: 由题意可得 } a_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2^n} & (n \text{ 为奇数}) \\ 1 + \frac{1}{2^n} & (n \text{ 为偶数}) \end{cases}$$

当  $n$  为奇数时,  $a_n$  递增, 此时  $a_1 \leq a_n < 1$

当  $n$  为偶数时,  $a_n$  递减, 此时  $1 < a_n \leq a_2$

综上所述,  $a_1 \leq a_n \leq a_2$ , 即  $\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{5}{4}$

因此,  $m$  的最大值为  $\frac{1}{2}$ ,  $k$  的最小值为  $\frac{5}{4}$

$$(2) \text{ 解: } S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \frac{4}{2^1} + \frac{7}{2^2} + \frac{10}{2^3} + \cdots + \frac{3n-2}{2^{n-1}} + \frac{3n+1}{2^n}$$

所有项同乘  $\frac{1}{2}$  得

$$\frac{1}{2} S_n = \frac{4}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \cdots + \frac{3n-5}{2^{n-1}} + \frac{3n-2}{2^n} + \frac{3n+1}{2^{n+1}}$$

上式减下式可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} S_n &= 2 + 3 \times \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \right) - \frac{3n+1}{2^{n+1}} = 2 + 3 \times \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \right) - \frac{3n+1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{7}{2} - \frac{3n+7}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\text{则 } S_n = 7 - \frac{3n+7}{2^n} < 7$$

$S_n < \lambda^2 + 6\lambda$  恒成立可得  $7 \leq \lambda^2 + 6\lambda$ , 解得  $\lambda \in (-\infty - 7] \cup [1 + \infty)$

放缩

15 数列  $\{a_n\}$ , 前  $n$  项和为  $S_n$

$$(1) \text{ 已知 } a_n = \frac{1}{(n+1)^2}, \text{ 求证: } S_n < \frac{2}{3}$$

$$(2) \text{ 已知 } a_n = \frac{1}{3^n - 1}, \text{ 求证: } S_n < \frac{3}{4}$$

$$(3) \text{ 已知 } a_n = \ln \frac{3n+1}{3n}, \text{ 求证: } S_n < \frac{1}{3} \ln(3n+1)$$

答案

(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

(3) 证明见解析

解析

$$(1) \text{ 解: } a_n < \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$\text{则 } S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n < \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+4}$$

此时, 当  $n=20$  时,  $\frac{3}{4} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+4} = \frac{325}{462} > \frac{2}{3}$ , 放缩放过了

首项不放缩，从第二项开始放缩可得

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n < \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+4} < \frac{2}{3} \end{aligned}$$

得证

$$(2) \text{ 解: } a_n = \frac{1}{3 \times 3^{n-1} - 1} \leq \frac{1}{2 \times 3^{n-1}}$$

$$\text{则 } S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq \frac{1}{2 \times 3^0} + \frac{1}{2 \times 3^1} + \cdots + \frac{1}{2 \times 3^{n-1}} = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) < \frac{3}{4}$$

得证

$$(3) \text{ 解: 由作差法可得 } \frac{3n+1}{3n} < \frac{3n}{3n-1} < \frac{3n-1}{3n-2}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \ln \frac{4}{3} + \ln \frac{7}{6} + \cdots + \ln \frac{3n+1}{3n} = \ln\left(\frac{4}{3} \times \frac{7}{6} \times \cdots \times \frac{3n+1}{3n}\right) \\ &= \frac{1}{3} \ln\left[\left(\frac{4}{3}\right)^3 \left(\frac{7}{6}\right)^3 \cdots \left(\frac{3n+1}{3n}\right)^3\right] \\ &< \frac{1}{3} \ln\left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{6}{5} \times \frac{7}{6} \times \cdots \times \frac{3n-1}{3n-2} \times \frac{3n}{3n-1} \times \frac{3n+1}{3n}\right) = \frac{1}{3} \ln(3n+1) \end{aligned}$$

得证

### 登峰造极

16 已知数列  $\{a_n\}$  是公比为正整数的等比数列，若  $a_2 = 2$  且  $a_1, a_3 + \frac{1}{2}, a_4$  成等差数列。

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项  $a_n$ 。

(2) 定义： $\frac{n}{P_1 + P_2 + \cdots + P_n}$  为  $n$  个正数  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n (n \in \mathbf{N}^*)$  的“均倒数”。

① 若数列  $\{b_n\}$  前  $n$  项的“均倒数”为  $\frac{1}{2a_n - 1} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，求数列  $\{b_n\}$  的通项  $b_n$ 。

② 试比较  $\frac{1}{b_1} + \frac{2}{b_2} + \cdots + \frac{n}{b_n}$  与 2 的大小，并说明理由。

答案

(1)  $a_n = 2^{n-1}$ 。

(2) ①  $b_n = (n+1) \cdot 2^{n-1} - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

②  $\frac{1}{b_1} + \frac{2}{b_2} + \cdots + \frac{n}{b_n} < 2$ 。

解析

(1) 设数列  $\{a_n\}$  是公比为  $q$ ，由题意  $a_1, a_3 + \frac{1}{2}, a_4$  成等差数列，

$$\text{即为 } 2\left(a_3 + \frac{1}{2}\right) = a_1 + a_4,$$

$$\text{即 } 2\left(2q + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{q} + 2q^2,$$

$$\text{即: } (2q^2 - 1)(q - 2) = 0,$$

$\therefore q$  为正整数，

$$\therefore q = 2,$$

$$\text{故 } a_n = 2^{n-1}.$$

$$(2) \text{ ① 由题意有: } \frac{n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \frac{1}{2^n - 1},$$

$$\therefore b_1 + b_2 + \cdots + b_n = n \cdot (2^n - 1) \text{ ①},$$

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} = (n-1) \cdot (2^{n-1} - 1), n \geq 2 \text{ ②},$$

$$\text{由 ①} - \text{② 得: } b_n = (n+1) \cdot 2^{n-1} - 1 (n \geq 2),$$

$$\text{又 } b_1 = 1,$$

$$\therefore b_n = (n+1) \cdot 2^{n-1} - 1 (n \in \mathbf{N}^*).$$

$$\text{② 判断: } \frac{1}{b_1} + \frac{2}{b_2} + \cdots + \frac{n}{b_n} < 2,$$

证明如下: 由题意:  $n \geq 2$ ,

$$\text{而 } \frac{n}{b_n} = \frac{n}{(n+1) \cdot 2^{n-1} - 1} = \frac{(n+1) - 1}{(n+1) \cdot 2^{n-1} - 1} < \frac{n+1}{(n+1) \cdot 2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

$$\therefore \frac{1}{b_1} + \frac{2}{b_2} + \cdots + \frac{n}{b_n}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 2^0 - 1} + \frac{2}{3 \cdot 2^1 - 1} + \cdots + \frac{n}{(n+1) \cdot 2^{n-1} - 1}$$

$$< \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 2.$$

17 已知单调递增的等比数列  $\{a_n\}$  满足  $a_2 + a_3 + a_4 = 28$ , 且  $a_3 + 2$  是  $a_2, a_4$  的等差中项.

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式.

(2) 若数列  $\{b_n\}$  满足  $\frac{1}{a_n} = \frac{b_1}{2+1} - \frac{b_2}{2^2+1} + \frac{b_3}{2^3+1} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{b_n}{2^n+1}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的通项公式.

(3) 在 (2) 条件下, 设  $c_n = 2^n + \lambda b_n$ . 问是否存在实数  $\lambda$  使得数列  $\{c_n\} (n \in \mathbf{N}^*)$  是单调递增数列? 若存在, 求出  $\lambda$  的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

答案

$$(1) a_n = 2^n.$$

$$(2) \begin{cases} \frac{3}{2}, n=1 \\ (-1)^n \left( \frac{1}{2^n} + 1 \right), n \geq 2 \end{cases}.$$

$$(3) \left\{ \lambda \mid -\frac{128}{35} < \lambda < \frac{32}{19} \right\}.$$

解析

(1) 设等比数列为:  $a_1, a_1q, a_1q^2 \dots$  其中  $a_1 \neq 0, q \neq 0$ .

由题意知： $a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = 28$ ，①

$a_1q + a_1q^3 = 2(a_1q^2 + 2)$ ，②

联立①②解得 $q = 2$ 或 $q = \frac{1}{2}$ ，

∵等比数列 $\{a_n\}$ 单调递增，

∴ $a_1 = 2$ ， $q = 2$ ，则 $a_n = 2^n$ 。

(2) 由(1)可知， $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2^n}$ ，

由 $\frac{1}{a_n} = \frac{b_1}{2+1} - \frac{b_2}{2^2+1} + \frac{b_3}{2^3+1} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{b_n}{2^n+1}$ ，

得 $\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{b_1}{2+1} - \frac{b_2}{2^2+1} + \frac{b_3}{2^3+1} - \dots + (-1)^n \frac{b_{n-1}}{2^{n-1}+1}$ ，

两式作差得： $\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} = (-1)^{n+1} \frac{b_n}{2^n+1}$ ，

即 $b_n = (-1)^n \left( \frac{1}{2^n} + 1 \right) (n \geq 2)$ 。

当 $n = 1$ 时， $a_1 = \frac{b_1}{2+1}$ ，得 $b_1 = \frac{3}{2}$ 。

∴ $\begin{cases} \frac{3}{2}, n=1 \\ (-1)^n \left( \frac{1}{2^n} + 1 \right), n \geq 2 \end{cases}$ 。

(3) ∵ $c_n = 2^n + \lambda b_n$ 。

∴当 $n \geq 3$ 时， $c_n = 2^n + (-1)^n \left( \frac{1}{2^n} \right) \lambda$ ， $c_{n-1} = 2^{n-1} + (-1)^{n-1} \left( \frac{1}{2^{n-1}} + 1 \right) \lambda$ ，

依据题意，有 $c_n - c_{n-1} = 2^{n-1} + (-1)^n \lambda \left( 2 + \frac{3}{2^n} \right) > 0$ 。

即 $(-1)^n \lambda > -\frac{2^{n-1}}{\frac{3}{2^n} + 2}$ 。

① 当 $n$ 为大于或等于4的偶数时，有 $\lambda > -\frac{2^{n-1}}{\frac{3}{2^n} + 2}$ 恒成立，

又 $\frac{2^{n-1}}{\frac{3}{2^n} + 2} = -\frac{1}{\frac{3}{2^{2n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}}}$ 随 $n$ 增大而增大，

则当 $n = 4$ 时， $\left( \frac{2^{n-1}}{\frac{3}{2^n} + 2} \right)_{\min} = \frac{128}{35}$ ，故 $\lambda$ 的取值范围为 $\lambda > -\frac{128}{35}$ ；

② 当 $n$ 为大于或等于3的奇数时，有 $\lambda < \frac{2^{n-1}}{\frac{3}{2^n} + 2}$ 恒成立，且仅当 $n = 3$ 时，

$\left( \frac{2^{n-1}}{\frac{3}{2^n} + 2} \right)_{\min} = \frac{32}{19}$ ，故 $\lambda$ 的取值范围为 $\lambda < \frac{32}{19}$ 。

又 $n = 2$ 时，由 $c_n - c_{n-1} = c_2 - c_1 = \left( 2^2 + \frac{5}{4}\lambda \right) - \left( 2 + \frac{3}{2}\lambda \right) > 0$ ，解得 $\lambda < 8$ 。

综上所述，所求 $\lambda$ 的取值范围是 $\left\{ \lambda \mid -\frac{128}{35} < \lambda < \frac{32}{19} \right\}$ 。

### 三、试炼之地



分组求和

18 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列， $S_n$ 为其前 $n$ 项和，且 $a_5 = 3a_2$ ， $S_7 = 14a_2 + 7$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(2) 设数列 $\{a_n + b_n\}$ 的首项为1，公比为2的等比数列，求数列 $\{b_n(a_n + b_n)\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$ 。

答案

(1)  $a_n = 2n - 1$ 。

(2)  $T_n = \frac{1}{3} \cdot 4^n + (3 - 2n) \cdot 2^n - \frac{10}{3}$ 。

解析

(1)  $\because \begin{cases} a_5 = 3a_2 \\ S_7 = 14a_2 + 7 \end{cases}$ ，

由等差数列性质及公式 $S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$ 得

$\therefore \begin{cases} a_1 + 4d = 3(a_1 + d) \\ \frac{d}{2} \times 7^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right) \times 7 = 14(a_1 + d) + 7 \end{cases}$ ，

解得 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases}$ ，

$\therefore$ 通项公式为 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2n - 1$ 。

(2) 由定义得，该等比数列通项 $c_n = 2^{n-1}$ ，

$\therefore a_n + b_n = c_n$ ，

$\therefore b_n = c_n - a_n = 2^{n-1} - 2n + 1$ ，

$\therefore b_n(a_n + b_n) = b_n \cdot c_n = 4^{n-1} + 2^{n-1} - n \cdot 2^n$ ，

对于 $4^{n-1}$ 可用等比数列求和公式得 $A_n = \frac{1 \times (4^n - 1)}{4 - 1} = \frac{4^n - 1}{3}$ ，

对于 $2^{n-1}$ 可用等比数列求和公式得 $B_n = \frac{1 \times (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$ ，

对于 $n \cdot 2^n$ 可用错位相减法求和

$S_n = 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + \cdots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n$  ①，

$2S_n = 0 + 1 \times 2^2 + \cdots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1}$  ②，

①-② $\Rightarrow -S_n = 2 + 2^2 + \cdots + 2^n - n \cdot 2^{n+1}$

$= (1-n) \cdot 2^{n+1} - 2$ ，

$T_n = A_n + B_n - S_n$

$= \frac{1}{3} \cdot 4^n - \frac{1}{3} + 2^n - 1 + (1-n) \cdot 2^{n+1} - 2$

$= \frac{1}{3} \cdot 4^n + (3-2n) \cdot 2^n - \frac{10}{3}$ 。

19 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中,  $a_1 = 1$ , 且 $a_1, a_2, a_4 + 2$ 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及前 $n$ 项和 $S_n$ .

(2) 设 $b_n = 2^{(-1)^n a_n}$ , 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 $T_{2n}$ .

答案 (1)  $S_n = n^2$ .

(2)  $T_{2n} = \frac{8}{15} \times \left(16^n - \frac{1}{16^n}\right)$ .

解析 (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$ ,

$\because a_1 = 1$ , 且 $a_1, a_2, a_4 + 2$ 成等比数列,

$\therefore a_2^2 = a_1(a_4 + 2)$ , 即 $(1+d)^2 = 1 \times (1+3d+2)$ ,

解得: $d = 2$ 或 $d = -1$ . 其中 $d = -1$ 时,  $a_1 = 0$  (舍去),

$\therefore d = 2$ ,

$\therefore a_n = 2n - 1$ ,

$\therefore S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = n^2$ .

(2)  $\because b_n = 2^{(-1)^n a_n} = 2^{(-1)^n (2n-1)}$ ,

$\therefore$ 当 $n$ 为偶数时,  $\frac{b_{n+2}}{b_n} = \frac{2^{2n+3}}{2^{2n-1}} = 16$ , 当 $n$ 为奇数时,  $\frac{b_{n+2}}{b_n} = \frac{2^{-(2n+3)}}{2^{-(2n-1)}} = \frac{1}{16}$ ,

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 的奇数项是以 $\frac{1}{2}$ 为首项,  $\frac{1}{16}$ 为公比的等比数列;

偶数项是以8为首项, 16为公比的等比数列,

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项的和,

$$\begin{aligned} T_{2n} &= (b_1 + b_3 + b_5 + \cdots + b_{2n-1}) + (b_2 + b_4 + b_6 + \cdots + b_{2n}) \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \times \left[1 - \left(\frac{1}{16}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{16}} + \frac{8 \times [1 - 16^n]}{1 - 16} = \frac{8}{15} \times \left(16^n - \frac{1}{16^n}\right). \end{aligned}$$

### 数列与不等式

20 已知函数 $f(x) = \frac{2x+3}{3x}$ , 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = f\left(\frac{1}{a_n}\right)$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 令 $T_n = a_1 a_2 - a_2 a_3 + a_3 a_4 - a_4 a_5 + \cdots - a_{2n} a_{2n+1}$ , 求 $T_n$ .

(3) 令 $b_n = \frac{1}{a_{n-1} a_n} (n \geq 2)$ ,  $b_1 = 3$ ,  $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ , 若 $S_n < \frac{m-2007}{2}$ 对一切 $n \in \mathbf{N}^*$ 成立, 求最小正整数 $m$ .

答案

- (1)  $a_n = \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}$  .  
 (2)  $-\frac{4}{9}(2n^2 + 3n)$  .  
 (3) 最小正整数  $m = 2016$  .

解析

- (1) 依题意,  $a_{n+1} = \frac{2+3a_n}{3} = a_n + \frac{2}{3}$  ,  
 $\therefore$  数列  $\{a_n\}$  是以  $\frac{2}{3}$  为公差的等差数列 ,

$$\text{又} \because a_1 = 1 ,$$

$$\therefore a_n = \frac{2}{3}n + \frac{1}{3} .$$

- (2) 由 (1) 可知

$$T_n = a_1 a_2 - a_2 a_3 + a_3 a_4 - a_4 a_5 + \cdots - a_{2n} a_{2n+1} = a_2(a_1 - a_3) + a_4(a_3 - a_5) + \cdots$$

,

$$= -\frac{4}{3}(a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}) = -\frac{4}{3} \cdot \frac{n(\frac{5}{3} + \frac{4n}{3} + \frac{1}{3})}{2} ,$$

$$= -\frac{4}{9}(2n^2 + 3n) .$$

- (3) 当  $n \geq 2$  时,  $b_n = \frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{1}{(\frac{2}{3}n - \frac{1}{3})(\frac{2}{3}n + \frac{1}{3})} = \frac{9}{2} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$  ,

$$\text{又} \because b_1 = 3 = \frac{9}{2} \times \left( 1 - \frac{1}{3} \right) \text{ 满足上式 ,}$$

$$\therefore S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n ,$$

$$= \frac{9}{2} \times \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) ,$$

$$= \frac{9}{2} \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right) ,$$

$$= \frac{9n}{2n+1} ,$$

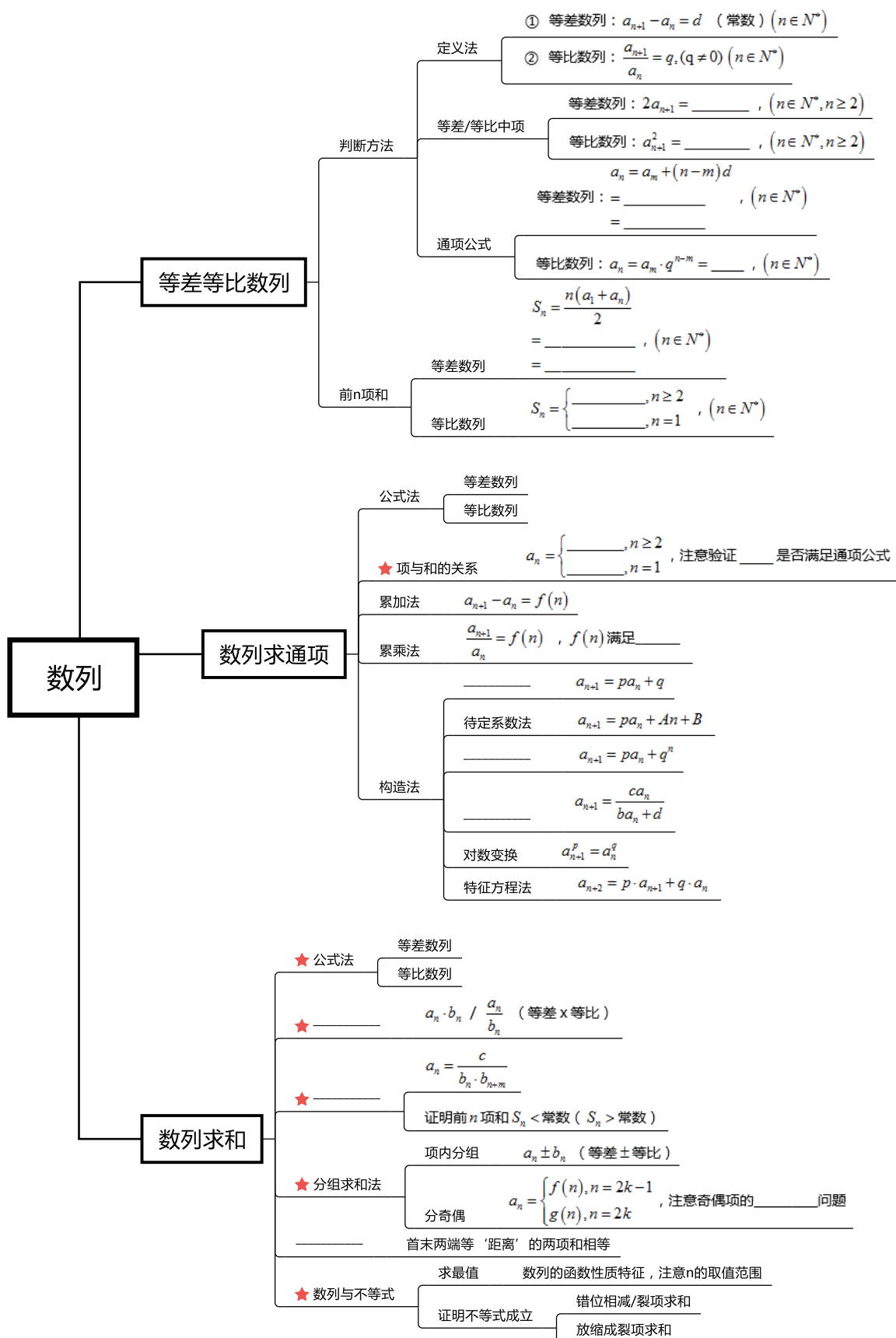
$$\therefore S_n < \frac{m-2007}{2} \text{ 对一切 } n \in \mathbf{N}^* \text{ 成立 , 即 } \frac{9n}{2n+1} < \frac{m-2007}{2} ,$$

$$\text{又} \because \frac{9n}{2n+1} = \frac{9}{2} \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right) \text{ 递增 , 且 } \frac{9n}{2n+1} < \frac{9}{2} ,$$

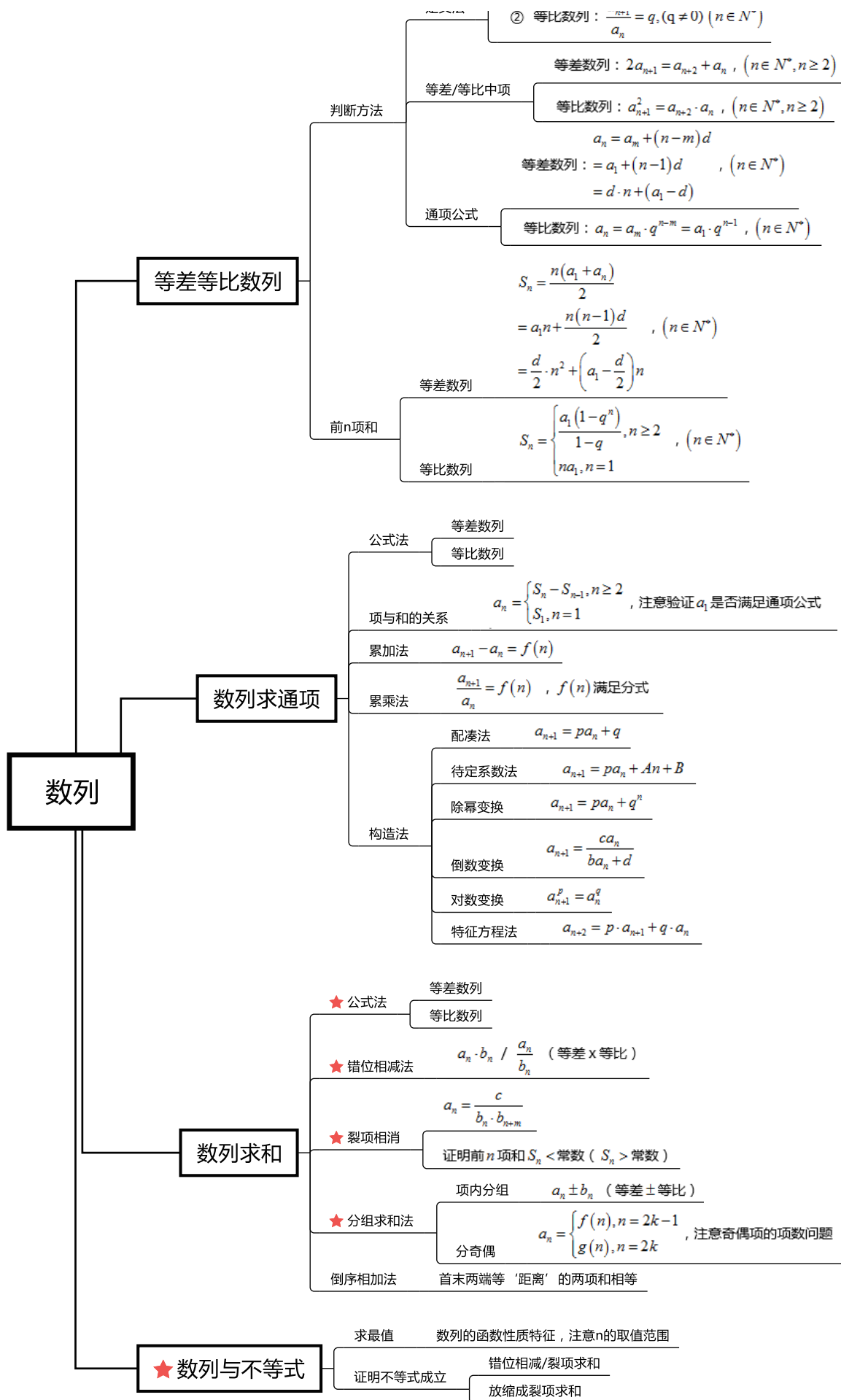
$$\therefore \frac{m-2007}{2} \geq \frac{9}{2} , \text{ 即 } m \geq 2016 ,$$

$$\therefore \text{最小正整数 } m = 2016 .$$

思维大导图



定义法 ① 等差数列:  $a_{n+1} - a_n = d$  (常数) ( $n \in N^*$ )



### 易错总结

- ①注意错位相减运算时剩余的项数问题、求和时的正负号问题
- ②注意裂项相消的剩余项问题，前后需保持对称
- ③注意裂项相消的系数问题，不要丢失
- ④注意分组求和中的奇偶项的项数问题，并需要综合

### 小憩一下

#### “山羊与汽车”问题

你去参加一个节目，节目里有一个环节：在你的面前有三扇门，其中两扇门后面是山羊，一扇门后面是汽车，你打开门后可以带走门后的东西，你自然想要价值更高的汽车。此时你选择一号门，然后知道哪扇门后面有汽车的主持人突然打开三号门并告诉你三号门后是一只山羊，问你是否要改变你的选择（是继续选择一号门还是重新选择二号门）？

#### 【答案】

这取决于主持人是故意的还是巧合打开了一扇后面有羊的门。如果是故意的，那么换之后是车的概率是 $\frac{2}{3}$ ；如果是巧合，那么只有 $\frac{1}{2}$ 。（这个各位可以直接利用概率来进行计算）。然而，作为节目主持人，不能出现失误的情况下，我们更倾向于认为他是故意的，因此答案是换更好。