

导数综合（解答）

考试数据

2014~2019天津卷考频100%，一二模共48套试卷中出现频率100%

知识点	考点	天津卷	一模	二模
导数	极最值问题	2016-20；2018-20	11	13
	零点问题	2015-20；2019-20	6	5
	切线问题	2017-20；2018-20	5	8
	利用导数证明不等式	2014-20；2015-20；2016-20； 2017-20；2019-20	9	7

考点分析



高频考点

- ①求函数极值最值
- ②求切线方程或已知切线方程求参数范围
- ③求零点个数或零点存在问题
- ④证明不等式问题



考试难点

- ①利用导数证明不等式（如：2019年天津卷20题）
- ②构造函数证明题（如：2018天津卷20题）



易错点

- ①渐近线影响零点存在
- ②极值最值与零点的关系

一、导数极最值与零点问题

1. 极值问题

你先试试看

1 已知函数 $f(x) = \frac{2}{x} - a \ln x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

- (1) 当 $a = -1$ 时 , 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程 .
- (2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间 .
- (3) 若函数 $g(x) = x^2 + f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内有极值 , 求 a 的取值范围 .

解析：

(1)当 $a = -1$ 时，

$$f(x) = \frac{2}{x} + \ln x,$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x},$$

-----2分

又 $f(1) = 2$ ， $f'(1) = -1$ ，

$\therefore$ 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - 2 = -(x - 1)$ ，

即 $x + y - 3 = 0$ 。

-----4分

(2)由题意 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，

$$\text{又 } f'(x) = -\frac{ax+2}{x^2},$$

-----6分

当 $a \geq 0$ 时， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，

当 $a < 0$ 时，

由 $f'(x) < 0$ 得，

$$0 < x < -\frac{2}{a},$$

由 $f'(x) > 0$ 得， $x > -\frac{2}{a}$ ，

$\therefore f(x)$ 在 $\left(0, -\frac{2}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\frac{2}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增。

-----9分

(3) $\because g(x) = x^2 + f(x)$ ，

$\therefore g(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$ ，

$$\therefore g'(x) = \frac{2x^3 - ax - 2}{x^2},$$

令 $h(x) = 2x^3 - ax - 2$ ， $x \in (0, +\infty)$ ，

$$\therefore h'(x) = 6x^2 - a,$$

-----10分

当 $a < 0$ 时，

$\therefore h'(x) > 0$ 恒成立，

$\therefore h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

又 $h(0) = -2 < 0$ ， $h(1) = -a > 0$ ，

$\therefore h(x)$ 在 $(0, 1)$ 内存在一个零点，也是 $g'(x)$ 的零点，

$\therefore g(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有极值；

-----12分

当 $a \geq 0$ 时，

当 $0 < x < 1$ 时， $h(x) < 0$ ，

即 $g'(x) < 0$ 恒成立，

$\therefore g(x)$ 在 $(0, 1)$ 内无极值。

综上所述，若 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有极值，则实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 0)$ 。

-----14分

听我慢慢讲

2 函数 $f(x) = 2(a-1)\ln(e^x - 1) + e^x$, $g(x) = (4a-2)x$, 其中 a 为常数 ($a > \frac{1}{2}$), $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数.

(1) 当 $a = \frac{3}{2}$ 时, 证明 $f'(x) \geq 4$.

(2) 当 $a = \frac{3}{2}$ 时, x_0 满足 $f(x_0) = 4x_0$, 证明: 当 $x > x_0$ 时, $f(x) > 4x$.

(3) 设 x_1, x_2 分别是函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 的极大值点和极小值点, 且 $x_2 - x_1 > \ln 2$, 求 a 的取值范围.



题型通解

① 由 $h'(x) = 0$, 解得两个极值点 $\ln 2$ 和 $\ln(2a-1)$;

② 分类讨论 $2a-1$ 与 2 的大小关系, 判断极大值点和极小值点.

你再试试看

3 已知函数 $f(x) = x \ln x - x + 1$.

(1) 求曲线 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程 .

(2) 若函数 $g(x) = af(x) - \frac{1}{2}x^2$ ($a \in \mathbf{R}$) 在其定义域内有两个不同的极值点, 求 a 的取值范围 .

(3) 在 (2) 的条件下, 记两个极值点分别为 x_1, x_2 . 且 $x_1 < x_2$, 若不等式 $a < mx_1 + (1-m)x_2$ ($m > 0$) 恒成立, 求 m 的取值范围 .

2. 最值问题

你先试试看

4 设函数 $f(x) = \ln x - ax$ ($a \in \mathbf{R}$) .

(1) 若直线 $y = 3x - 1$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条切线, 求实数 a 的值 .

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上的最大值为 $1 - ae$ (e 为自然对数的底数), 求实数 a 的值 .

解析：

(1) 由 $f(x) = \ln x - ax$, 得 $f'(x) = \frac{1}{x} - a = 3$,

-----1分

$\therefore x = \frac{1}{a+3}$, 则 $f\left(\frac{1}{a+3}\right) = \ln \frac{1}{a+3} - \frac{a}{a+3}$,

$\therefore \ln \frac{1}{a+3} - \frac{a}{a+3} = \frac{3}{a+3} - 1$, 得 $\ln \frac{1}{a+3} = 0$, 即 $a = -2$.

-----4分

(2) $f'(x) = \frac{1}{x} - a$,

当 $a \leq \frac{1}{e^2}$ 时 , $f'(x) \geq 0$ 在 $[1, e^2]$ 上恒成立 , 故 $f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上为增函数 ,

故 $f(x)$ 的最大值为 $f(e^2) = 2 - ae^2 = 1 - ae$, 得 $a = \frac{1}{e^2 - e}$ (舍) ;

-----6分

当 $\frac{1}{e^2} < a < 1$ 时 , 若 $x \in \left[1, \frac{1}{a}\right]$, $f'(x) > 0$, $x \in \left[\frac{1}{a}, e^2\right]$, $f'(x) < 0$,

故 $f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上先增后减 , 故 $f(x)_{\max} = f\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a - 1$,

由 $-\ln a - 1 = 1 - ae$, 解得 $a = \frac{1}{e}$;

-----8分

当 $a \geq 1$ 时 , 故当 $x \in [1, e^2]$ 时 , $f'(x) \leq 0$, $f(x)$ 是 $[1, e^2]$ 上的减函数 ,

故 $f(x)_{\max} = f(1) = -a = 1 - ae$, 得 $a = \frac{1}{e-1}$ (舍) ;

综上 , $a = \frac{1}{e}$.

-----10分

听我慢慢讲

5 设函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax$ ($a > 0$) , $g(x) = bx^2 + 2b - 1$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在它们的交点 $(1, c)$ 处有相同的切线, 求实数 a, b 的值 .

(2) 当 $b = \frac{1-a}{2}$ 时, 若函数 $h(x) = f(x) + g(x)$ 在区间 $(-2, 0)$ 内恰有两个零点, 求实数 a 的取值范围 .

(3) 当 $a = 1, b = 0$ 时, 求函数 $h(x) = f(x) + g(x)$ 在区间 $[t, t+3]$ 上的最小值 .

你再试试看

6 设函数 $f(x) = ae^x(x+1)$ (其中 $e = 2.71828\cdots$) , $g(x) = x^2 + bx + 2$, 已知它们在 $x = 0$ 处有相同的切线 .

(1) 求函数 $f(x), g(x)$ 的解析式 .

(2) 求函数 $f(x)$ 在 $[t, t+1]$ ($t > -3$) 上的最小值 .

(3) 若对 $\forall x \geq -2, kf(x) \geq g(x)$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围 .

你先试试看

7 已知函数 $f(x) = a \ln x - x^2 + (2a - 1)x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

- (1) 当 $a = 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间 .
- (2) 求函数 $f(x)$ 的极值 .
- (3) 若函数 $f(x)$ 有两个不同的零点, 求 a 的取值范围 .

解析：

$$(1) f(x) = \ln x^2 - x^2 + x,$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1 = \frac{-2x^2 + x + 1}{x} \\ = \frac{(-x+1)(2x+1)}{x},$$

$\therefore x \in (0, 1), f'(x) > 0, f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

$x \in (1, +\infty), f'(x) < 0, f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

-----4分

$$(2) f'(x) = \frac{a}{x} - 2x + 2a - 1 = \frac{-2x^2 + (2a-1)x + a}{x}, \\ f'(x) = \frac{(-x+a)(2x+1)}{x},$$

$$\text{令 } f'(x) = 0 \text{ 得 } x_1 = a, x_2 = -\frac{1}{2},$$

-----6分

当 $a < 0$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 无极值,

当 $a > 0$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, a)$ 单调递增, $(a, +\infty)$ 上单调递减.

$\therefore f(x)$ 有极大值 $= f(a) = a \ln a + a^2 - a$.

-----9分

(3) 当 $a = 0$ 时,

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上无零点, 不符合题意,

-----10分

当 $a \neq 0$ 时,

$$f'(x) = \frac{a}{x} - 2x + 2a - 1 = \frac{-(2x+1)(x-a)}{x},$$

$$f'(x) = 0 \text{ 时, } x = -\frac{1}{2} \text{ 或 } a,$$

$$\text{设 } g(x) = -(2x+1)(x-a),$$

$\therefore x \in (0, +\infty),$

$\therefore g(x)$ 与 $f'(x)$ 同号,

$g(x) > 0$ 时, $f(x)$ 单调增,

$g(x) < 0$ 时, $f(x)$ 单调减,

$\therefore f(x)$ 有两个而不同的两点,

则 $f(x)$ 不可在 $(0, +\infty)$ 恒单调,

即只有 $a > 0$ 时满足 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递增, $(a, +\infty)$ 上单调减,

$f(x)$ 可能存在两个零点, 且由于 $f(x)$ 在 $x = a$ 取最大, $f(a) > 0$,

$$f(a) = a \ln a - a^2 + (2a - 1)a > 0.$$

$$\therefore a > 0,$$

$$\therefore \ln a - a + 2a - 1 > 0 \text{ 即 } \ln a > 1 - a,$$

$$\text{得: } a > 1.$$

-----14分

听我慢慢讲

8 设函数 $f(x) = \frac{x^2}{2} + a \ln x$.

(1) 若 $a < 0$, 求 $f(x)$ 的单调区间和极值.

(2) 在 (1) 的条件下, 证明: 若 $f(x)$ 存在零点, 则 $f(x)$ 在区间 $(0, \sqrt{e}]$ 上仅有一个零点.



题型通解

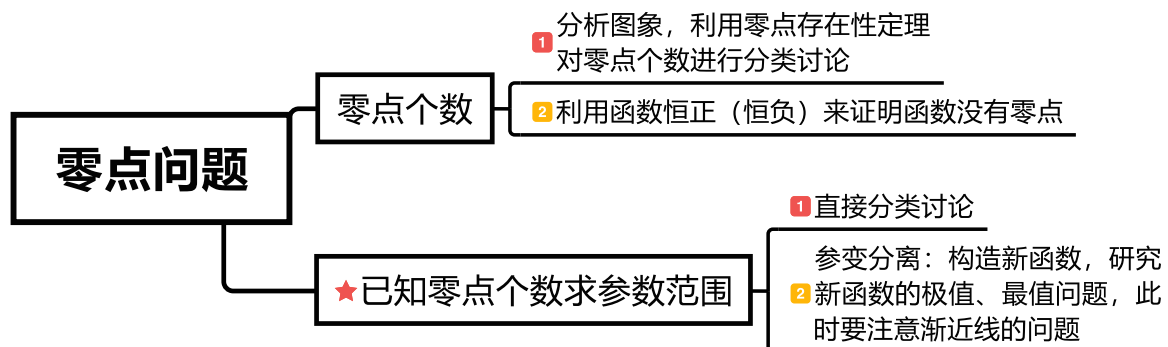
【基础题型】

- ① 判断函数零点个数或方程解的个数
- ② 根据零点个数或方程解的个数求参数范围

【解题技巧】

- ① 分类讨论或参变分离
- ② 构造函数

导图总结



你再试试看

9 已知函数 $f(x) = x \ln x$, $g(x) = -x^2 + ax - 3$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 在 $[t, t+2]$ ($t > 0$) 上的最小值.
- (2) 对一切 $x \in (0, +\infty)$, $2f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.
- (3) 探讨函数 $F(x) = \ln x - \frac{1}{e^x} + \frac{2}{ex}$ 是否存在零点? 若存在, 求出函数 $F(x)$ 的零点, 若不存在, 请说明理由.

题型通解

- ① 由(1)知 $x \ln x \geq -\frac{1}{e}$, $\ln x \geq -\frac{1}{ex}$, 则可转化 $F(x) \geq -\frac{1}{ex} - \frac{1}{e^x} + \frac{2}{ex} = \frac{1}{x}(\frac{1}{e} - \frac{x}{e^x})$, 由单调性判断 $F(x) > 0$, 可得不存在零点.
- ② 由(1)知 $x \ln x \geq -\frac{1}{e}$, 将函数转化成 $x \ln x = \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e}$, 设 $h(x) = \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e}$, $h(x)_{\max} = h(1) = -\frac{1}{e}$, 但两个函数在不同位置取到最值, 故可得无零点.

二、利用导数证明不等式

你先试试看

10 设函数 $f(x) = e^x \cos x$, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间.
- (2) 当 $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 时, 证明 $f(x) + g(x) \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq 0$.
- (3) 设 x_n 为函数 $u(x) = f(x) - 1$ 在区间 $(2n\pi + \frac{\pi}{4}, 2n\pi + \frac{\pi}{2})$ 内的零点, 其中 $n \in \mathbf{N}$, 证明 $2n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n < \frac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0 - \cos x_0}$.

解析:

(1) 由已知, 有 $f'(x) = e^x(\cos x - \sin x)$,

因此, 当 $x \in (2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4})$ ($k \in \mathbf{Z}$) 时,

有 $\sin x > \cos x$, 得 $f'(x) < 0$,

则 $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (2k\pi - \frac{3\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4})$ ($k \in \mathbf{Z}$) 时,

有 $\sin x < \cos x$, 得 $f'(x) > 0$,

则 $f(x)$ 单调递增 ,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi - \frac{3\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right] (k \in \mathbf{Z})$,

$f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4}\right] (k \in \mathbf{Z})$.

-----4分

(2)证明 : 记 $h(x) = f(x) + g(x) \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$,

依题意及 (1) , 有 $g(x) = e^x (\cos x - \sin x)$,

从而 $g'(x) = -2e^x \sin x$,

当 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时 , $g'(x) < 0$,

故 $h'(x) = f'(x) + g'(x) \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + g(x)(-1) = g'(x) \left(\frac{\pi}{2} - x\right) < 0$,

因此 $h(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减 ,

-----6分

进而 $h(x) \geq h\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$,

所以 , 当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时 ,

$f(x) + g(x) \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq 0$.

-----9分

(3)证明 : 依题意 , $u(x_n) = f(x_n) - 1 = 0$,

即 $e^{x_n} \cos x_n = 1$, 记 $y_n = x_n - 2n\pi$,

则 $y_n \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$,

且 $f(y_n) = e^{y_n} \cos y_n = e^{x_n - 2n\pi} \cos(x_n - 2n\pi) = e^{-2n\pi} (n \in \mathbf{N})$,

由 $f(y_n) = e^{-2n\pi} \leq 1 = f(y_0)$ 及 (1) ,

得 $y_n \geq y_0$, 由 (2) 知 ,

当 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时 , $g'(x) < 0$,

所以 $g(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上为减函数 ,

-----12分

因此 $g(y_n) \leq g(y_0) < g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$,

又由 (2) 知 , $f(y_n) + g(y_n) \left(\frac{\pi}{2} - y_n\right) \geq 0$,

故 $\frac{\pi}{2} - y_n \leq -\frac{f(y_n)}{g(y_n)} = -\frac{e^{-2n\pi}}{g(y_n)} \leq \frac{e^{-2n\pi}}{g(y_0)}$

$$= \frac{e^{-2n\pi}}{e^{y_0}(\sin y_0 - \cos y_0)} < \frac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0 - \cos x_0},$$

$$\text{所以, } 2n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n < \frac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0 - \cos x_0}.$$

-----14分

听我慢慢讲

11 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax + (a-1)\ln x$, 其中 $a > 2$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

(2) 若对于任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $x_1 \neq x_2$, 恒有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > -1$, 求 a 的取值范围.

(3) 设 $a \in (3, 4)$, $x_n = \frac{n+1}{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 求证: $|f(x_{n+1}) - f(x_1)| < \frac{1}{x_n}$.



题型通解

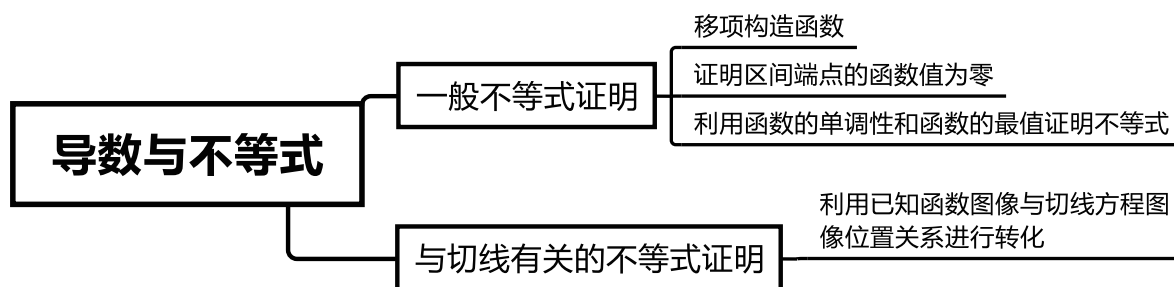
①由(1)知当 $x \in (1, a-1) \in (1, a-1)$ 时, 函数 $f(x)$ 为减函数, 令 $x_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$, $x_1 = 2$;

②判断 $x_n < x_1$, $f(x_{n+1}) < f(x_1)$, 直接去绝对值, 利用(2)结论, 整理得结论;

③一般(3)的证明过程, 要用到前两问的结论, 要注意应用.

注意: 遇到绝对值不等式或方程时, 通常要判断式子的正负去绝对值, 如果判断不了需要分情况讨论.

导图总结



你再试试看

12 已知直线 $y = \frac{1}{e}$ 是函数 $f(x) = \frac{ax}{e^x}$ 的切线 (其中 $e = 2.71828$).

(1) 求实数 a 的值.

(2) 若对任意的 $x \in (0, 2)$, 都有 $f(x) < \frac{m}{2x - x^2}$ 成立, 求实数 m 的取值范围.

(3) 若函数 $g(x) = \ln f(x) - b$ 的两个零点为 x_1, x_2 , 证明: $g'(x_1) + g'(x_2) > g'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$.

题型通解

①因为 x_1 、 x_2 为零点,所以满足 $g(x) = 0$,这样可以得出来两个等式, $x_1 + b = \ln x_1$,

$x_2 + b = \ln x_2$ 一般这种类型含有 x 、 $\ln x$ 式子整理的方式是:两式相加、两式相减;

②得出来的式子是: $x_2 - x_1 = \ln \frac{x_2}{x_1}$;

③将要证明的式子进行整理,会发现需要把 x_1 、 x_2 表示出来,那么后面做的一步是换元,目的是将含有两个未知量的不等式转化成含有一个未知量的不等式;

④换元,令 $t = \frac{x_1}{x_2} > 1$,转化成不等式 $\ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} > 0$,令 $g(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}$,利用导数求最值来证明假设成立.

登峰造极

13 已知函数 $f(x) = (ax^2 + x - 1)e^x + f'(0)$.

(1) 求 $f'(0)$ 的值.

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

(3) 若 $g(x) = e^{-x}f(x) + \ln x$, $h(x) = e^x$, 过点 $O(0,0)$ 分别作曲线 $y = g(x)$ 与 $y = h(x)$ 的切线 l_1 、

l_2 , 且 l_1 与 l_2 关于 x 轴对称, 求证: $-\frac{(e+1)^3}{2e^2} < a < -\frac{e+2}{2}$.

题型通解

①题干说 l_1 、 l_2 关于 x 轴对称,所以可得出直线斜率互为相反数,可以得出来 $a = -\frac{e+1}{2x_1} - \frac{1}{2x_1^2}$;

②在切线方程与过点问题联系时,需要设切点.本题中 l_2 容易求出,而 l_1 可以先设切点 (x_1, y_1) ,

根据三个条件:切点在曲线上,切点在切线上, $(0,0)$ 在切线上,得出等式: $\frac{e+1}{2}x_1 + \ln x_1 - \frac{3}{2} = 0$;

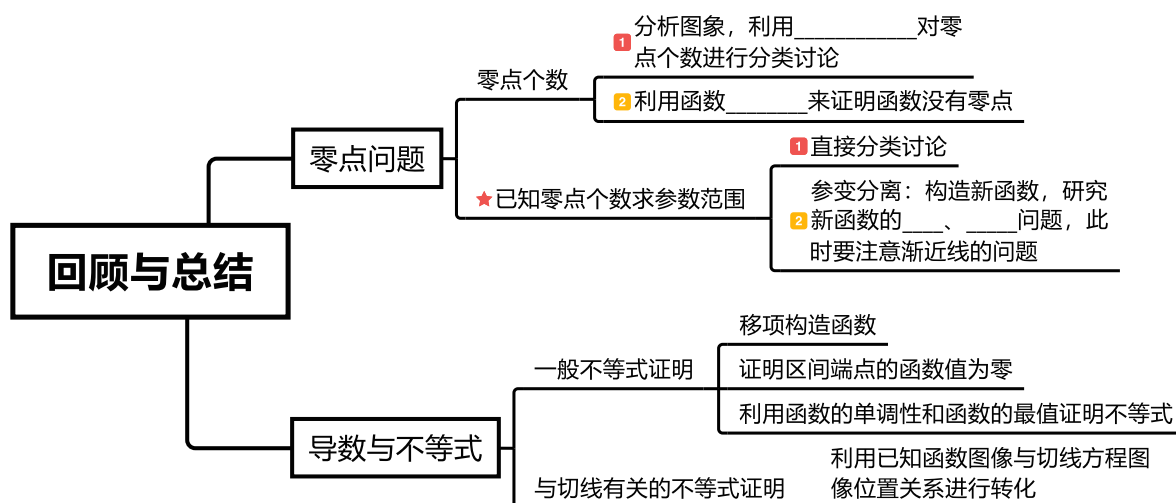
③令 $u(x) = \frac{e+1}{2}x + \ln x - \frac{3}{2}$,得出在定义域内函数的单调性为递增区间,根据

$u(1) \cdot u\left(\frac{e}{e+1}\right) < 0$,可以得出 x_1 的取值范围,即 $x_1 \in \left(\frac{e}{e+1}, 1\right)$,最后求出关系式

$a = -\frac{e+1}{2x_1} - \frac{1}{2x_1^2}$ 中 a 的范围.

注意:不等式两边的值一般都是特殊 x 取得,比如极值点处,边界处.

思维大导图



①渐近线影响零点存在

②极值最值与零点的关系

小憩一下

无限个房间的旅馆

曾经，上帝制造出来了一个有无限个房间的旅馆，现在已经住满了。但又来了一个客人，这可怎么办呢？上帝很机智，让原先住在1号房的客人搬进了2号房，原先住在2号房的客人住进3号房，以此类推，让原先住在 K 号房的客人住进 $K + 1$ 号房，这样就空出了1号房给新来的客人。这就是无限的神奇之处，从有限到无限，不可能的也成了可能。