

导数的分类讨论

一、一元一次不等式型

1 (5分) 判断函数 $f(x) = x^2 + ax + 3$ 在 $(3, 4)$ 上的单调性 .

2 (5分) 设函数 $f(x) = xe^{kx} (k \neq 0)$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间 .

3 (10分) 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \frac{a}{x} + \ln x - 1$.

(1) (5分) 求函数 $f(x)$ 的单调区间 .

(2) (5分) 求 $f(x)$ 在区间 $(0, e]$ 上的最小值 .

二、一元二次不等式型

4 (5分) 已知函数 $f(x) = a^2x^2 + ax - \ln x$.

当 $a > 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

5 (5分) 已知函数 $f(x) = (a + \frac{1}{a}) \ln x + \frac{1}{x} - x (a > 1)$, 试讨论 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上的单调性.

6 (10分) 已知函数 $f(x) = a(x - 2)^2 + 2 \ln x$.

(1) (5分) 若 $a = 1$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) (5分) 若 $f(x)$ 在区间 $[1, 4]$ 上是增函数, 求实数 a 的取值范围;

7 (5分) 设函数 $f(x) = x^3 - 3ax + b (a \neq 0)$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值点.

8 (5分) 已知函数 $f(x) = a \ln(x + 1) + \frac{1}{2}x^2 - ax + 1 (a > 0)$, 求函数 $y = f(x)$ 的单调区间和极值.

三、指对数不等式型

9 (5分) 已知函数 $f(x) = x^2 e^{ax}$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间 ;

10 (5分) 已知函数 $f(x) = e^{ax} \cdot \left(\frac{a}{x} + a + 1\right)$, 其中 $a \geq -1$, 求 $f(x)$ 的单调区间 .

11 (5分) 已知函数 $f(x) = \frac{e^{x+1}}{ax^2 + 4x + 4}$, 其中 $a > 1$, 试确定函数 $f(x)$ 的单调区间 .