

导数压轴2

本段落仅教师可见

年份	2019	2018	2017	2016	2015	2014
题型	构造函数证明不等式	切线相关证明	构造函数证明不等式	证明不等式+双变量问题	证明不等式	无

讲义制作人：闫聪聪——096277

讲义审核人：天津教研团队

考试数据

2014~2019天津卷考频100%，一二模共48套试卷中出现频率100%

知识 点	考点	天津卷	一模	二模
导数	利用导数证明不等式	2015-20；2016-20；2017-20； 2018-20；	19	20
	构造函数证明不等式	2016-20；2017-20；2018-20；2019-20.	15	13

考点分析



高频考点

- ①已知函数性质求参数的取值范围(如:2018天津卷理20题)
- ②多变量证明(如:2017天津卷理20题)
- ③构造函数证明不等式(如:2019天津卷理20题)



考试难点

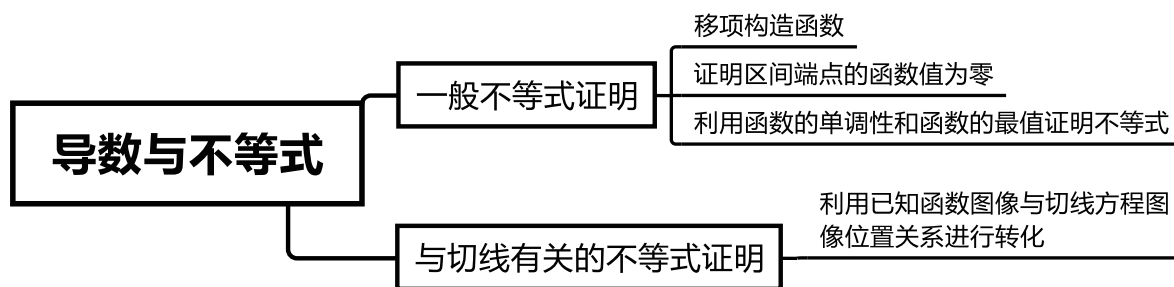
- ①将多变量转换成一个变量构造新函数(如:2014天津卷理20题)

②利用切线证明不等式（如:2015天津卷20题）

③简化构造函数(如:2017天津卷理20题)

一、利用导数证明不等式

思维导图



利用导数证明不等式

你先试试看

1 已知函数 $f(x) = nx - x^n (x \in \mathbb{R})$ ，其中 $n \in \mathbb{N}^*$ ， $n \geq 2$ 。

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；
- (2) 设曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P ，曲线在点 P 处的切线方程为 $y = g(x)$ ，求证：对于任意的正实数 x ，都有 $f(x) \leq g(x)$ ；
- (3) 若关于 x 的方程 $f(x) = a$ (a 为实数) 有两个正实根 x_1, x_2 ，求证： $|x_2 - x_1| < \frac{a}{1-n} + 2$ 。

答案

- (1) 答案见解析
- (2) 证明见解析
- (3) 答案见解析

解析

(1) 由 $f(x) = nx - x^n$ ，可得 $f'(x) = n - nx^{n-1} = n(1 - x^{n-1})$ ，其中 $n \in \mathbb{N}^*$ ，且 $n \geq 2$ 。

下面分两种情况讨论：

①当 n 为奇数时

令 $f'(x) = 0$ ，解得 $x = 1$ ，或 $x = -1$ 。

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

所以, $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-1, 1)$ 内单调递增.

②当 n 为偶数时

当 $f'(x) > 0$, 即 $x < 1$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递增;

当 $f'(x) < 0$, 即 $x > 1$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递减.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

(2) 证明: 设点 P 的坐标为 $(x_0, 0)$ 则 $x_0 = n^{\frac{1}{n-1}}$, $f'(x_0) = n - n^2$,

曲线 $y = f(x)$ 在点 P 处的切线方程为 $y = f'(x)(x - x_0)$, 即 $g(x) = f'(x)(x - x_0)$.

令 $F(x) = f(x) - g(x)$,

即 $F(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0)$, 则 $F'(x) = f'(x) - f'(x_0)$.

由于 $f'(x) = n - nx^{n-1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 $F'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

又因为 $F'(x_0) = 0$, 所以当 $x \in (0, x_0)$ 时, $F'(x) > 0$,

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $F'(x) < 0$, 所以 $F(x)$ 在 $(0, x_0)$ 内单调递增, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递减,

所以对于任意的正实数 x , 都有 $F(x) \leq F(x_0) = 0$,

即对于任意的正实数 x , 都有 $f(x) \leq g(x)$.

(3) 证明: 不妨设 $x_1 \leq x_2$, 由(II)知 $g(x) = (n - n^2)(x - x_0)$, 设方程 $g(x) = a$ 的根为 x_2' ,

可得 $x_2' = \frac{a}{n - n^2} + x_0$, 当 $n \geq 2$ 时, $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减,

又由(II)知 $g(x_2) \geq f(x_2) = a = g(x_2')$, 可得 $x_2 \leq x_2'$.

类似地, 设曲线 $y = f(x)$ 在点 P 处的切线方程为 $y = h(x)$, 可得 $h(x) = nx$.

当 $x \in (0, +\infty)$, $f(x) - h(x) = -x^n < 0$, 即对于任意的 $x \in (0, +\infty)$, $f(x) < h(x)$.

设方程 $h(x) = a$ 的根为 x_1' , 可得 $x_1' = \frac{a}{n}$. 因为 $h(x) = nx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增,

且 $h(x_1') = a = f(x_1) < h(x_1)$, 因此 $x_1' < x_1$.

由此可得 $x_2 - x_1 < x_2' - x_1' = \frac{a}{1 - n} + x_0$.

因为 $n \geq 2$, 所以 $2^{n-1} = (1+1)^{n-1} \geq 1 + C_{n-1}^1 = 1 + n - 1 = n$, 故 $2 \geq n^{\frac{1}{n-1}} = x_0$.

所以, $|x_2 - x_1| < \frac{a}{1 - n} + 2$.

解析：

(1) 由 $f(x) = nx - x^n$ ，可得 $f'(x) = n - nx^{n-1} = n(1 - x^{n-1})$ ，其中 $n \in \mathbf{N}^*$ ，且 $n \geq 2$ 。

-----1分

下面分两种情况讨论：

①当 n 为奇数时

令 $f'(x) = 0$ ，解得 $x = 1$ ，或 $x = -1$ 。

当 x 变化时， $f'(x)$ ， $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

所以， $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ ， $(1, +\infty)$ 上单调递减，在 $(-1, 1)$ 内单调递增。

②当 n 为偶数时

当 $f'(x) > 0$ ，即 $x < 1$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增；

当 $f'(x) < 0$ ，即 $x > 1$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减。

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增，在 $(1, +\infty)$ 上单调递减。

-----4分

(2) 证明：设点 P 的坐标为 $(x_0, 0)$ 则 $x_0 = n^{\frac{1}{n-1}}$ ， $f'(x_0) = n - n^2$ ，

曲线 $y = f(x)$ 在点 P 处的切线方程为 $y = f'(x)(x - x_0)$ ，即 $g(x) = f'(x)(x - x_0)$ 。

-----6分

令 $F(x) = f(x) - g(x)$ ，

即 $F(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0)$ ，则 $F'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ 。

由于 $f'(x) = n - nx^{n-1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，故 $F'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，

又因为 $F'(x_0) = 0$ ，所以当 $x \in (0, x_0)$ 时， $F'(x) > 0$ ，

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时， $F'(x) < 0$ ，所以 $F(x)$ 在 $(0, x_0)$ 内单调递增，在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递减，

-----8分

所以对于任意的正实数 x ，都有 $F(x) \leq F(x_0) = 0$ ，

即对于任意的正实数 x ，都有 $f(x) \leq g(x)$ 。

-----10分

(3) 证明：不妨设 $x_1 \leq x_2$ ，由 (II) 知 $g(x) = (n - n^2)(x - x_0)$ ，设方程 $g(x) = a$ 的根为 x_2' ，可得 $x_2' = \frac{a}{n - n^2} + x_0$ ，当 $n \geq 2$ 时， $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减，

-----11分

又由 (II) 知 $g(x_2) \geq f(x_2) = a = g(x_2')$ ，可得 $x_2 \leq x_2'$ 。

类似地，设曲线 $y = f(x)$ 在原点处的切线方程为 $y = h(x)$ ，可得 $h(x) = nx$ 。

当 $x \in (0, +\infty)$ ， $f(x) - h(x) = -x^n < 0$ ，即对于任意的 $x \in (0, +\infty)$ ， $f(x) < h(x)$ 。

设方程 $h(x) = a$ 的根为 x_1' ，可得 $x_1' = \frac{a}{n}$ 。因为 $h(x) = nx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增，

且 $h(x_1') = a = f(x_1) < h(x_1)$ ，因此 $x_1' < x_1$ 。

由此可得 $x_2 - x_1 < x_2' - x_1' = \frac{a}{1 - n} + x_0$ 。

因为 $n \geq 2$ ，所以 $2^{n-1} = (1+1)^{n-1} \geq 1 + C_{n-1}^1 = 1 + n - 1 = n$ ，故 $2 \geq n^{\frac{1}{n-1}} = x_0$ 。

所以， $|x_2 - x_1| < \frac{a}{1 - n} + 2$ 。

-----14分

听我慢慢讲

2 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax + (a-1)\ln x$ ，其中 $a > 2$ 。

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性。

(2) 若对于任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ， $x_1 \neq x_2$ ，恒有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > -1$ ，求 a 的取值范围。

(3) 设 $a \in (3, 4)$ ， $x_n = \frac{n+1}{n}$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，求证： $|f(x_{n+1}) - f(x_1)| < \frac{1}{x_n}$ 。

答案

(1) $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$ ， $(a-1, +\infty)$ ，单调减区间为 $(1, a-1)$ 。

(2) $(2, 5]$ 。

(3) 证明见解析。

解析

(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $x \in (0, +\infty)$ ，

$$f'(x) = x - a + \frac{a-1}{x} = \frac{x^2 - ax + a-1}{x},$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 则 } x^2 - ax + a-1 = 0, \text{ 即 } (x-1)[x-(a-1)] = 0,$$

$$\text{解得 } x=1 \text{ 或 } x=a-1,$$

$$\because a > 2,$$

$$\therefore a-1 > 1,$$

由 $f'(x) > 0$, 解得 $0 < x < 1$ 或 $x > a-1$,

由 $f'(x) < 0$, 解得 $1 < x < a-1$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$, $(a-1, +\infty)$,

单调减区间为 $(1, a-1)$.

(2) 设 $x_1 > x_2$, 则不等式 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > -1$ 等价于 $f(x_1) - f(x_2) > x_2 - x_1$,

整理得, $f(x_1) + x_1 > f(x_2) + x_2$,

令 $g(x) = f(x) + x = \frac{1}{2}x^2 - (a-1)x + (a-1)\ln x$,

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上为增函数,

$\therefore g'(x) = x - (a-1) + \frac{a-1}{x}$,

$\therefore x - (a-1) + \frac{a-1}{x} \geq 0$ 恒成立,

而 $x + \frac{a-1}{x} \geq 2\sqrt{a-1}$,

$\therefore 2\sqrt{a-1} \geq a-1$,

$\therefore a > 2$,

$\therefore \sqrt{a-1} \leq 2$,

$\therefore 2 < a \leq 5$, 即 a 的取值范围是 $(2, 5]$.

(3) $\because a \in (3, 4)$ 由 (1) 可知当 $x \in (1, a-1)$ 时, 函数 $f(x)$ 为减函数,

而 $x_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \in (1, a-1)$, $x_1 = 2 \in (1, a-1)$,

那么 $x_{n+1} < x_1$, $f(x_{n+1}) < f(x_1)$,

$\therefore |f(x_{n+1}) - f(x_1)| = f(x_{n+1}) - f(x_1)$,

由 (2) 知 $\frac{f(x_{n+1}) - f(x_1)}{x_{n+1} - x_1} > -1$,

$\therefore f(x_{n+1}) - f(x_1) < x_{n+1} - x_1 = 2 - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{x_n}$,

即 $|f(x_{n+1}) - f(x_1)| < \frac{1}{x_n}$.

题型通解

① 由 (1) 知当 $x \in (1, a-1) \in (1, a-1)$ 时, 函数 $f(x)$ 为减函数, 令 $x_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$, $x_1 = 2$;

② 判断 $x_n < x_1$, $f(x_{n+1}) < f(x_1)$, 直接去绝对值, 利用 (2) 结论, 整理得结论;

③ 一般 (3) 的证明过程, 要用到前两问的结论, 要注意应用.

注意: 遇到绝对值不等式或方程时, 通常要判断式子的正负去绝对值, 如果判断不了需要分情况讨论.

你再试试看

3 设 $a, b \in \mathbf{R}$, $|a| \leq 1$. 已知函数 $f(x) = x^3 - 6x^2 - 3a(a-4)x + b$, $g(x) = e^x f(x)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 已知函数 $y = g(x)$ 和 $y = e^x$ 的图象在公共点 (x_0, y_0) 处有相同的切线.

① 求证: $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数等于 0.

② 若关于 x 的不等式 $g(x) \leq e^x$ 在区间 $[x_0 - 1, x_0 + 1]$ 上恒成立, 求 b 的取值范围.

答案

(1) 递增区间为 $(-\infty, a)$, $(4-a, +\infty)$, 递减区间为 $(a, 4-a)$.

(2) ① 证明见解析.

② $[-7, 1]$.

解析

(1) 由 $f(x) = x^3 - 6x^2 - 3a(a-4)x + b$, 可得

$$f'(x) = 3x^2 - 12x - 3a(a-4) = 3(x-a)(x-(4-a)),$$

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = a$ 或 $x = 4-a$.

由 $|a| < 1$ 可得 $a < 4-a$,

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化如下表所示,

x	$(-\infty, a)$	a	$(a, 4-a)$	$4-a$	$(4-a, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, a)$ 和 $(4-a, +\infty)$, 单调递减区间为 $(a, 4-a)$.

(2) ① 因为 $g'(x) = e^x(f(x) + f'(x))$, 由题意有 $\begin{cases} g(x_0) = e^{x_0} \\ g'(x_0) = e^{x_0} \end{cases}$,
所以 $\begin{cases} f(x_0)e^{x_0} = e^{x_0} \\ e^{x_0}(f(x_0) + f'(x_0)) = e^{x_0} \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} f(x_0) = 1 \\ f'(x_0) = 0 \end{cases}$.

所以 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数等于 0.

② 因为 $g(x) \leq e^x$, $x \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$, 由 $e^x > 0$, 可得 $f(x) \leq 1$.

又因为 $f(x_0) = 1$, $f'(x_0) = 0$, 故 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点, 由 (1) 知 $x_0 = a$.

另一方面, 由于 $|a| \leq 1$, 故 $a+1 < 4-a$,

由 (1) 知 $f(x)$ 在 $(a-1, a)$ 内单调递增, 在 $(a, a+1)$ 内单调递减,

故当 $x_0 = a$ 时, $f(x) \leq f(a) = 1$ 在 $[a-1, a+1]$ 上恒成立, 从而 $g(x) \leq e^x$ 在

$[x_0 - 1, x_0 + 1]$ 上恒成立.

由 $f(a) = a^3 - 6a^2 - 3a(a-4)a + b = 1$, 得 $b = 2a^3 - 6a^2 + 1$, $-1 \leq a \leq 1$.

令 $t(x) = 2x^3 - 6x^2 + 1$, $x \in [-1, 1]$, 所以 $t'(x) = 6x^2 - 12x$,

令 $t'(x) = 0$, 解得 $x = 2$ (舍去), 或 $x = 0$.

因为 $t(-1) = -7$, $t(1) = -3$, $t(0) = 1$, 故 $t(x)$ 的值域为 $[-7, 1]$.

所以, b 的取值范围是 $[-7, 1]$.



构造函数证明不等式

你先试试看

4 设 $a \in \mathbf{Z}$, 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 6x + a$ 在区间 $(1, 2)$ 内有一个零点 x_0 , $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1) 求 $g(x)$ 的单调区间.

(2) 设 $m \in [1, x_0] \cup (x_0, 2]$, 函数 $h(x) = g(x)(m - x_0) - f(m)$, 求证: $h(m)h(x_0) < 0$.

(3) 求证: 存在大于 0 的常数 A , 使得对于任意的正整数 p, q , 且 $\frac{p}{q} \in [1, x_0] \cup (x_0, 2]$, 满足

$$|\frac{p}{q} - x_0| \geq \frac{1}{Aq^4}.$$

答案

(1) $g(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, -1)$, $(\frac{1}{4}, +\infty)$, 单调递减区间是 $(-1, \frac{1}{4})$.

(2) 证明见解析.

(3) 证明见解析.

解析

(1) 由 $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 6x + a$, 可得 $g(x) = f'(x) = 8x^3 + 9x^2 - 6x - 6$,

进而可得 $g'(x) = 24x^2 + 18x - 6$. 令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = -1$, 或 $x = \frac{1}{4}$.

当 x 变化时, $g'(x)$, $g(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \frac{1}{4})$	$\frac{1}{4}$	$(\frac{1}{4}, +\infty)$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以, $g(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, -1)$, $(\frac{1}{4}, +\infty)$, 单调递减区间是 $(-1, \frac{1}{4})$.

(2) 证明: 由 $h(x) = g(x)(m - x_0) - f(m)$, 得 $h(m) = g(m)(m - x_0) - f(m)$,

$$h(x_0) = g(x_0)(m - x_0) - f(m).$$

令函数 $H_1(x) = g(x)(x - x_0) - f(x)$, 则 $H_1'(x) = g'(x)(x - x_0)$.

由 (1) 知, 当 $x \in [1, 2]$ 时, $g'(x) > 0$,

故当 $x \in [1, x_0]$ 时, $H_1'(x) < 0$, $H_1(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_0, 2]$ 时, $H_1'(x) > 0$, $H_1(x)$ 单调递增;

因此, 当 $x \in [1, x_0] \cup (x_0, 2]$ 时, $H_1(x) > H_1(x_0) = -f(x_0) = 0$,

可得 $H_1(m) > 0$, 即 $h(m) > 0$.

令函数 $H_2(x) = g(x_0)(x - x_0) - f(x)$, 则 $H_2'(x) = g(x_0) - g(x)$.

由 (I) 知, 当 $x \in [1, 2]$ 时, $g'(x) > 0$,

故当 $x \in [1, x_0]$ 时, $H_2'(x) > 0$, $H_2(x)$ 单调递增;

当 $x \in (x_0, 2]$ 时, $H_2'(x) < 0$, $H_2(x)$ 单调递减;

因此, 当 $x \in [1, x_0] \cup (x_0, 2]$ 时, $H_2(x) < H_2(x_0) = -f(x_0) = 0$,

可得 $H_2(m) < 0$, 所以 $h(x_0) < 0$.

所以 $h(m)h(x_0) < 0$.

(3) 证明: 对于任意的正整数 p, q , 且 $\frac{p}{q} \in [1, x_0] \cup (x_0, 2]$,

令 $m = \frac{p}{q}$, 函数 $h(x) = g(x)(m - x_0) - f(m)$.

由 (II) 知, 当 $m \in [1, x_0]$ 时, $h(x)$ 在区间 (m, x_0) 内有零点;

当 $m \in (x_0, 2]$ 时, $h(x)$ 在区间 (x_0, m) 内有零点.

所以 $h(x)$ 在 $(1, 2)$ 内至少有一个零点, 不妨设为 x_1 ,

则 $h(x_1) = g(x_1)(\frac{p}{q} - x_0) - f(\frac{p}{q}) = 0$.

由 (I) 知 $g(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增, 所以 $0 < g(1) < g(x_1) < g(2)$,

所以 $|\frac{p}{q} - x_0| = |\frac{f(\frac{p}{q})}{g(x_1)}| > |\frac{f(\frac{p}{q})}{g(2)}| = \frac{|2p^4 + 3p^3q - 3p^2q^2 - 6pq^3 - aq^4|}{g(2)q^4}$,

因为当 $x \in [1, 2]$ 时, $g(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上除 x_0 外没有其他零点, 而 $\frac{p}{q} \neq x_0$, 所以 $f(\frac{p}{q}) \neq 0$.

又因为 p, q, a 均为整数, 所以 $|2p^4 + 3p^3q - 3p^2q^2 - 6pq^3 - aq^4|$ 是正整数,

从而 $|2p^4 + 3p^3q - 3p^2q^2 - 6pq^3 - aq^4| \geq 1$,

所以 $|\frac{p}{q} - x_0| \geq \frac{1}{g(2)q^4}$. 所以, 只要取 $A = g(2)$, 就有 $|\frac{p}{q} - x_0| \geq \frac{1}{Aq^4}$.

解析:

(1) 由 $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 6x + a$, 可得 $g(x) = f'(x) = 8x^3 + 9x^2 - 6x - 6$,

进而可得 $g'(x) = 24x^2 + 18x - 6$. 令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = -1$, 或 $x = \frac{1}{4}$.

-----2分

当 x 变化时, $g'(x)$, $g(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \frac{1}{4})$	$\frac{1}{4}$	$(\frac{1}{4}, +\infty)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以, $g(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, -1)$, $(\frac{1}{4}, +\infty)$, 单调递减区间是 $(-1, \frac{1}{4})$.

-----4分

(2) 证明: 由 $h(x) = g(x)(m - x_0) - f(m)$, 得 $h(m) = g(m)(m - x_0) - f(m)$,

$$h(x_0) = g(x_0)(m - x_0) - f(m).$$

令函数 $H_1(x) = g(x)(x - x_0) - f(x)$, 则 $H_1'(x) = g'(x)(x - x_0)$.

由 (1) 知, 当 $x \in [1, 2]$ 时, $g'(x) > 0$,

故当 $x \in [1, x_0]$ 时, $H_1'(x) < 0$, $H_1(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_0, 2]$ 时, $H_1'(x) > 0$, $H_1(x)$ 单调递增;

因此, 当 $x \in [1, x_0] \cup (x_0, 2]$ 时, $H_1(x) > H_1(x_0) = -f(x_0) = 0$,

可得 $H_1(m) > 0$, 即 $h(m) > 0$.

-----7分

令函数 $H_2(x) = g(x_0)(x - x_0) - f(x)$, 则 $H_2'(x) = g(x_0) - g(x)$.

由 (1) 知, 当 $x \in [1, 2]$ 时, $g'(x) > 0$,

故当 $x \in [1, x_0]$ 时, $H_2'(x) > 0$, $H_2(x)$ 单调递增;

当 $x \in (x_0, 2]$ 时, $H_2'(x) < 0$, $H_2(x)$ 单调递减;

因此, 当 $x \in [1, x_0] \cup (x_0, 2]$ 时, $H_2(x) < H_2(x_0) = -f(x_0) = 0$,

可得 $H_2(m) < 0$, 所以 $h(x_0) < 0$.

所以 $h(m)h(x_0) < 0$.

-----10分

(3) 证明: 对于任意的正整数 p, q , 且 $\frac{p}{q} \in [1, x_0] \cup (x_0, 2]$,

令 $m = \frac{p}{q}$, 函数 $h(x) = g(x)(m - x_0) - f(m)$.

由 (II) 知, 当 $m \in [1, x_0]$ 时, $h(x)$ 在区间 (m, x_0) 内有零点;

当 $m \in (x_0, 2]$ 时, $h(x)$ 在区间 (x_0, m) 内有零点.

所以 $h(x)$ 在 $(1, 2)$ 内至少有一个零点, 不妨设为 x_1 ,

$$h(x_1) = g(x_1)(\frac{p}{q} - x_0) - f(\frac{p}{q}) = 0.$$

由 (I) 知 $g(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增, 所以 $0 < g(1) < g(x_1) < g(2)$,

$$\text{所以 } \left| \frac{p}{q} - x_0 \right| = \left| \frac{f(\frac{p}{q})}{g(x_1)} \right| > \left| \frac{f(\frac{p}{q})}{g(2)} \right| = \frac{|2p^4 + 3p^3q - 3p^2q^2 - 6pq^3 - aq^4|}{g(2)q^4},$$

因为当 $x \in [1, 2]$ 时, $g(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上除 x_0 外没有其他零点, 而 $\frac{p}{q} \neq x_0$, 所以 $f(\frac{p}{q}) \neq 0$.

又因为 p, q, a 均为整数, 所以 $|2p^4 + 3p^3q - 3p^2q^2 - 6pq^3 - aq^4|$ 是正整数,

从而 $|2p^4 + 3p^3q - 3p^2q^2 - 6pq^3 - aq^4| \geq 1$,

所以 $\left| \frac{p}{q} - x_0 \right| \geq \frac{1}{g(2)q^4}$. 所以, 只要取 $A = g(2)$, 就有 $\left| \frac{p}{q} - x_0 \right| \geq \frac{1}{Aq^4}$.

-----14分



题型通解

① 对于任意的正整数 p, q , 且 $\frac{p}{q} \in [1, x_0) \cup (x_0, 2]$, 令 $m = \frac{p}{q}$, 函数 $h(x)$ 在区间内有零点, 设为 x_1 ;

② 利用 (2) $h(x_1) = g(x_1)(\frac{p}{q} - x_0) - f(\frac{p}{q}) = 0$, 由 (1) 知在 $[1, 2]$ 上单调递增, 故 $0 < g(1) < g(x_1) < g(2)$;

③ 利用结论 $\left| \frac{p}{q} - x_0 \right| = \left| \frac{f(\frac{p}{q})}{g(x_1)} \right| \geq \left| \frac{f(\frac{p}{q})}{g(2)} \right|$, 因为 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上除 x_0 外没有其他的零点, $\left| f(\frac{p}{q}) \right| \neq 0$;

④ 由 p, q 均为整数, 所以可以得结论.

听我慢慢讲

5 已知函数 $f(x) = (ax^2 + x - 1)e^x + f'(0)$.

(1) 求 $f'(0)$ 的值.

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

(3) 若 $g(x) = e^{-x}f(x) + \ln x$, $h(x) = e^x$, 过点 $O(0, 0)$ 分别作曲线 $y = g(x)$ 与 $y = h(x)$ 的切线 l_1 、

l_2 , 且 l_1 与 l_2 关于 x 轴对称, 求证: $-\frac{(e+1)^3}{2e^2} < a < -\frac{e+2}{2}$.

答案

(1) 0.

(2) 答案见解析.

(3) 证明见解析.

解析

(1) $f'(x) = x(ax + 2a + 1)e^x$, 所以 $f'(0) = 0$.

(2) ① $a > 0$ 时, 当 $x > 0$ 或 $x < -\frac{2a+1}{a}$ 时,

$f'(x) > 0$, 当 $-\frac{2a+1}{a} < x < 0$ 时, $f'(x) < 0$,

故 $f(x)$ 单增区间为 $\left(-\infty, -\frac{2a+1}{a}\right), (0, +\infty)$,

$f(x)$ 单减区间为 $\left(-\frac{2a+1}{a}, 0\right)$.

② $a = 0$ 时, $f'(x) = xe^n$,

当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 单增区间为 $(0, +\infty)$,

$f(x)$ 单减区间为 $(-\infty, 0)$.

③ $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时, 当 $0 < x < -\frac{2a+1}{a}$ 时, $f'(x) > 0$,

当 $x < 0$ 或 $x > -\frac{2a+1}{a}$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 单增区间为 $\left(0, -\frac{2a+1}{2a}\right)$,

$f(x)$ 单减区间为 $(-\infty, 0), \left(-\frac{2a+1}{a}, +\infty\right)$.

④ $a = -\frac{1}{2}$ 时, $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2e^x \leq 0$,

所以 $f(x)$ 单减区间为 $(-\infty, +\infty)$.

⑤ $a < -\frac{1}{2}$ 时, 当 $-\frac{2a+1}{a} < x < 0$ 时, $f'(x) > 0$,

当 $x > 0$ 或 $x < -\frac{2a+1}{a}$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 单增区间为 $\left(-\frac{2a+1}{a}, 0\right)$,

$f(x)$ 单减区间为 $\left(-\infty, -\frac{(2a+1)}{a}\right), (0, +\infty)$.

(3) $h'(x) = e^x$, 设 l_2 与 $y = h(x)$ 的切点为 (x_2, y_2) ,

所以 l_2 的方程为 $y - y_2 = e^{x_2}(x - x_2)$, 过点 $O(0, 0)$,

得 $y_2 = e^{x_2} \cdot x_2$, 又点 (x_2, y_2) 在 $y = h(x)$ 上, 所以 $y_2 = e^{x_2}$,

解得 $x_2 = 1, y_2 = e, k_2 = e$,

$g(x) = ax^2 + x - 1 + \ln x, g'(x) = 2ax + 1 + \frac{1}{x}$,

因为 l_1 与 l_2 关于 x 轴对称, 所以 $k_1 = 2ax_1 + 1 + \frac{1}{x_1} = e$,

即 $a = -\frac{e+1}{2x_1} - \frac{1}{2x_1^2}$,

设 l_1 与 $y = g(x)$ 的切点为 (x_1, y_1) ,

所以 l_1 的方程为 $y - y_1 = -e(x - x_1)$,

过点 $O(0, 0)$ 得 $y_1 = -ex$, 又 $y_1 = ax_1^2 + x_1 - 1 + \ln x_1$,

所以 $ax_1^2 + x_1 - 1 + \ln x_1 = -ex_1$,

整理得 $\frac{e+1}{2}x_1 + \ln x_1 - \frac{3}{2} = 0$,

设 $u(x) = \frac{e+1}{2}x + \ln x - \frac{3}{2}, u'(x) = \frac{e+1}{2} + \frac{1}{x}$,

$u'(x)$ 在定义域内恒大于0, 所以 $u(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

$$\text{又 } u(1) = \frac{e}{2} - 1 > 0, \quad u\left(\frac{e}{e+1}\right) = \frac{e}{2} + \ln \frac{e}{e+1} - \frac{3}{2} < 0,$$

所以 $u(1) \cdot u\left(\frac{e}{e+1}\right) < 0$, 即 $\frac{e}{e+1} < x_1 < 1$,

令 $t = \frac{1}{x_1}$, 则 $1 < t < \frac{e+1}{e}$,

$$a(t) = -\frac{1}{2}t^2 - \frac{e+1}{2}t = -\frac{1}{2}\left(t + \frac{e+1}{2}\right)^2 + \frac{(e+1)^2}{8},$$

所以 $a(t) \in \left(a\left(\frac{e+1}{e}\right), a(1)\right)$ 即 $a(t) \in \left(-\frac{(e+1)^3}{2e^2}, -\frac{e+2}{2}\right)$,

所以 $-\frac{(e+1)^3}{2e^2} < a < -\frac{e+2}{2}$.

你再试试看

6 设函数 $f(x) = (x-1)^2 + a \ln x$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $x + 2y - 1 = 0$ 垂直, 求 a 的值.

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(3) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 求证: $f(x_2) > \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$.

答案

(1) $a = 2$.

(2) 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1-\sqrt{1-2a}}{2}\right)$ 单调递减, 在 $\left(\frac{1+\sqrt{1-2a}}{2}, +\infty\right)$ 单调递增;

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1-\sqrt{1-2a}}{2}\right)$, $\left(\frac{1+\sqrt{1-2a}}{2}, +\infty\right)$ 单调递增, 在 $\left(\frac{1-\sqrt{1-2a}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-2a}}{2}\right)$ 单调递减.

(3) 证明见解析.

解析

(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = 2x - 2 + \frac{a}{x} = \frac{2x^2 - 2x + a}{x},$$

$\therefore$ 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $x + 2y - 1 = 0$ 垂直,

$$\therefore f'(1) = a = 2.$$

(2) 令 $g(x) = 2x^2 - 2x + a$, 则 $\Delta = 4 - 8a$.

① 当 $\Delta \leq 0$, 即 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $g(x) \geq 0$, 从而 $f(x) \geq 0$,

故函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

②当 $\Delta > 0$, 即 $a < \frac{1}{2}$ 时, $g(x) = 0$ 的两个根为 $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2a}}{2}$,
 $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2} > \frac{1}{2}$,

当 $\sqrt{1 - 2a} \geq 1$, 即 $a \leq 0$ 时, $x_1 \leq 0$, 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $x_1 > 0$.

故当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1 - \sqrt{1 - 2a}}{2})$ 单调递减, 在 $(\frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2}, +\infty)$ 单调递增;

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1 - \sqrt{1 - 2a}}{2})$, $(\frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2}, +\infty)$ 单调递增,
 在 $(\frac{1 - \sqrt{1 - 2a}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2})$ 单调递减.

(3) 当函数 $f(x)$ 有2个极值点时, $0 < a < \frac{1}{2}$, $0 < \sqrt{1 - 2a} < 1$,

此时 $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2} \in (\frac{1}{2}, 1)$, 且 $g(x_2) = 0$,

即 $a = -2x_2^2 + 2x_2$,

$\therefore f(x_2) = (x_2 - 1)^2 + a \ln x_2 = (x_2 - 1)^2 + (-2x_2^2 + 2x_2) \ln x_2$,

设 $h(x) = (x - 1)^2 + (-2x^2 + 2x) \ln x$, 其中 $x \in (\frac{1}{2}, 1)$,

则 $h'(x) = (-4x + 2) \ln x$,

由于 $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ 时, $h'(x) > 0$, 故函数 $h(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 单调递增,

故 $h(x) > h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$,

$\therefore f(x_2) > \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$.

二、试炼之地

7 设函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}ax^2 - bx$.

(1) 当 $a = b = \frac{1}{2}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 令 $F(x) = f(x) + \frac{1}{2}ax^2 + bx + \frac{a}{x}$ ($0 < x \leq 3$), 其图象上任意一点 $P(x_0, y_0)$ 处切线的斜率
 $k \leq \frac{1}{2}$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

(3) 当 $a = 0$, $b = -1$ 时, 方程 $f(x) = mx$ 在区间 $[1, e^2]$ 内有唯一实数解, 求实数 m 的取值范围.

答案

(1) $f(x)$ 的单调增区间 $(0, 1)$, 函数 $f(x)$ 的单调减区间 $(1, +\infty)$.

(2) $a \geq \frac{1}{2}$.

$$(3) m = 1 + \frac{1}{e} \text{ 或 } 1 \leq m < 1 + \frac{2}{e^2}.$$

解析

(1) 依题意, 知 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$$\text{当 } a = b = \frac{1}{2} \text{ 时, } f(x) = \ln x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x,$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{-(x+2)(x-1)}{2x}.$$

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 1$.

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, 此时 $f(x)$ 单调递增;

当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$, 此时 $f(x)$ 单调递减.

所以函数 $f(x)$ 的单调增区间 $(0, 1)$, 函数 $f(x)$ 的单调减区间 $(1, +\infty)$.

$$(2) F(x) = \ln x + \frac{a}{x}, x \in (0, 3],$$

$$\text{所以 } k = F'(x_0) = \frac{x_0 - a}{x_0^2} \leq \frac{1}{2}, \text{ 在 } x_0 \in (0, 3] \text{ 上恒成立,}$$

$$\text{所以 } a \geq \left(-\frac{1}{2}x_0^2 + x_0\right)_{\max}, x_0 \in (0, 3],$$

$$\text{当 } x_0 = 1 \text{ 时, } -\frac{1}{2}x_0^2 + x_0 \text{ 取得最大值 } \frac{1}{2}. \text{ 所以 } a \geq \frac{1}{2}.$$

$$(3) \text{ 当 } a = 0, b = -1 \text{ 时, } f(x) = \ln x + x,$$

因为方程 $f(x) = mx$ 在区间 $[1, e^2]$ 内有唯一实数解,

所以 $\ln x + x = mx$ 有唯一实数解.

$$\therefore m = 1 + \frac{\ln x}{x},$$

$$\text{设 } g(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}, \text{ 则 } g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

令 $g'(x) > 0$, 得 $0 < x < e$;

$g'(x) < 0$, 得 $x > e$,

$\therefore g(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上是增函数, 在区间 $[e, e^2]$ 上是减函数,

$$g(1) = 1, g(e^2) = 1 + \frac{\ln e^2}{e^2} = 1 + \frac{2}{e^2}, g(e) = 1 + \frac{1}{e},$$

$$\text{所以 } m = 1 + \frac{1}{e} \text{ 或 } 1 \leq m < 1 + \frac{2}{e^2}.$$

8

设函数 $f(x) = \frac{x^2}{2} + a \ln x$.

(1) 若 $a < 0$, 求 $f(x)$ 的单调区间和极值.

(2) 在 (1) 的条件下, 证明: 若 $f(x)$ 存在零点, 则 $f(x)$ 在区间 $(0, \sqrt{e}]$ 上仅有一个零点.

(3) 若存在 $x_0 \geq 1$, 使得 $f(x) - \frac{a}{2}x^2 - x < \frac{a}{a-1}$ ($a \neq 1$), 求 a 的取值范围.

答案

- (1) 单调递减区间为 $(0, \sqrt{-a})$, 单调递增区间为 $(\sqrt{-a}, +\infty)$, 有极小值 $\frac{-a + a \ln(-a)}{2}$.
- (2) 见解析.
- (3) $(-\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1) \cup (1, +\infty)$.

解析

- (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = x + \frac{a}{x} = \frac{x^2 + a}{x},$$

由 $f'(x) = 0$ 解得 $x = \sqrt{-a}$.

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的情况如下.

x	$(0, \sqrt{-a})$	$\sqrt{-a}$	$(\sqrt{-a}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{-a + a \ln(-a)}{2}$	$\nearrow$

$\therefore f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, \sqrt{-a})$, 单调递增区间是 $(\sqrt{-a}, +\infty)$,

$f(x)$ 在 $x = \sqrt{-a}$ 处取得极小值 $\frac{-a + a \ln(-a)}{2}$.

- (2) 由 (1) 知, $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的最小值为 $\frac{-a + a \ln(-a)}{2}$,

因为 $f(x)$ 存在零点, 所以 $\frac{-a + a \ln(-a)}{2} \leq 0$, 从而 $a \leq -e$,

当 $a = -e$ 时, $f(x)$ 在区间 $(0, \sqrt{e})$ 上单调递减, 且 $f(\sqrt{e}) = 0$,

所以 $x = \sqrt{e}$ 是 $f(x)$

在区间 $(0, \sqrt{e}]$ 上的唯一零点,

当 $a < -e$ 时, $f(x)$ 在区间 $(0, \sqrt{e})$ 上单调递减,

且 $f(1) = \frac{1}{2} > 0$, $f(\sqrt{e}) = \frac{e+a}{2} < 0$,

所以 $f(x)$ 在区间 $(0, \sqrt{e}]$ 上仅有一个零点.

综上所述, 若 $f(x)$ 存在零点, 则 $f(x)$ 在区间 $(0, \sqrt{e})$ 上仅有一个零点.

- (3) 设 $g(x) = f(x) - \frac{a}{2}x^2 - x = a \ln x + \frac{1-a}{2}x^2 - x$,

$$g'(x) = \frac{a}{x} + (1-a)x - 1 = \frac{1-a}{x} \left(x - \frac{a}{1-a} \right) (x-1),$$

① 若 $a > 1$, 则 $g(1) = \frac{1-a}{2} - 1 = \frac{-1-a}{2} < \frac{a}{a-1}$, 符合题意,

② 若 $a \leq \frac{1}{2}$, 则 $\frac{a}{1-a} \leq 1$, 故当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

所以, 存在 $x_0 \geq 1$, 使得 $f(x) - \frac{a}{2}x^2 - x < \frac{a}{a-1}$ 的充要条件为:

$$g(1) = \frac{1-a}{2} - 1 = \frac{-1-a}{2} < \frac{a}{a-1}, \text{ 解得 } -\sqrt{2}-1 < a < \sqrt{2}-1,$$

③若 $\frac{1}{2} < a < 1$, 则 $\frac{a}{1-a} > 1$, 故当 $x \in \left(1, \frac{a}{1-a}\right)$ 时, $g'(x) < 0$;

当 $x \in \left(\frac{a}{1-a}, +\infty\right)$ 时, $g'(x) > 0$.

$g(x)$ 在 $\left(1, \frac{a}{1-a}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{a}{1-a}, +\infty\right)$ 上单调递增.

所以, 存在 $x_0 \geq 1$, 使得 $f(x) - \frac{a}{2}x^2 - x < \frac{a}{a-1}$ 的充要条件为: $g\left(\frac{a}{1-a}\right) < \frac{a}{a-1}$

而 $g\left(\frac{a}{1-a}\right) = a \ln \frac{a}{1-a} + \frac{a^2}{2(1-a)} + \frac{a}{a-1} > \frac{a}{a-1}$, 所以不合题意.

综上, a 的取值范围是 $(-\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1) \cup (1, +\infty)$.

9 设函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax$ ($a > 0$), $g(x) = bx^2 + 2b - 1$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在它们的交点 $(1, c)$ 处有相同的切线, 求实数 a, b 的值.

(2) 当 $b = \frac{1-a}{2}$ 时, 若函数 $h(x) = f(x) + g(x)$ 在区间 $(-2, 0)$ 内恰有两个零点, 求实数 a 的取值范围.

(3) 当 $a = 1, b = 0$ 时, 求函数 $h(x) = f(x) + g(x)$ 在区间 $[t, t+3]$ 上的最小值.

答案

(1) $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{3}$.

(2) a 的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

(3) $h(x)_{\min} = \begin{cases} \frac{1}{3}t^3 - t - 1 & t \in (-\infty, -2) \cup [1, +\infty) \\ -\frac{5}{3} & t \in [-2, 1) \end{cases}$.

解析

(1) 因为 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax$ ($a > 0$), $g(x) = bx^2 + 2b - 1$,

所以 $f'(x) = x^2 - a, g'(x) = 2bx$.

因为曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在它们的交点 $(1, c)$ 处有相同的切线,

所以 $f(1) = g(1)$, 且 $f'(1) = g'(1)$,

即 $\frac{1}{3} - a = b + 2b - 1$, 且 $1 - a = 2b$,

解得 $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{3}$.

(2) 当 $b = \frac{1-a}{2}$ 时, $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1-a}{2}x^2 - ax - a$ ($a > 0$),

所以 $h'(x) = x^2 + (1-a)x - a = (x+1)(x-a)$.

令 $h'(x) = 0$, 解得 $x_1 = -1, x_2 = a > 0$.

当 x 变化时, $h'(x), h(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, a)$	a	$(a, +\infty)$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以函数 $h(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1)$, $(a, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-1, a)$,

故 $h(x)$ 在区间 $(-2, -1)$ 上单调递增, 在区间 $(-1, 0)$ 上单调递减.

又函数 $h(x)$ 在区间 $(-2, 0)$ 内恰有两个零点, 所以有:

$$\begin{cases} h(-2) < 0 \\ h(-1) > 0 \\ h(0) < 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -\frac{8}{3} + 2(1-a) + 2a - a < 0 \\ -\frac{1}{3} + \frac{1-a}{2} + a - a > 0 \\ -a < 0 \end{cases},$$

解得: $0 < a < \frac{1}{3}$, 所以实数 a 的取值范围是 $(0, \frac{1}{3})$.

(3) 当 $a = 1, b = 0$ 时, $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - x - 1$,

则由(2)可知, 函数 $h(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-1, 1)$.

因为 $h(-2) = -\frac{5}{3}$, $h(1) = -\frac{5}{3}$, 所以 $h(-2) = h(1)$.

① 当 $t + 3 < -1$, 即 $t < -2$ 时, $h(x)_{\min} = h(t) = \frac{1}{3}t^3 - t - 1$.

② 当 $-2 \leq t < 1$ 时, $h(x)_{\min} = h(-2) = -\frac{5}{3}$.

③ 当 $t \geq 1$ 时, $h(x)$ 在区间 $[t, t+3]$ 上单调递增, $h(x)_{\min} = h(t) = \frac{1}{3}t^3 - t - 1$.

综上所述, 函数 $h(x)$ 在区间 $[t, t+3]$ 上最小值

$$h(x)_{\min} = \begin{cases} \frac{1}{3}t^3 - t - 1 & t \in (-\infty, -2) \cup [1, +\infty) \\ -\frac{5}{3} & t \in [-2, 1) \end{cases}.$$

题型通解

① 题干说 l_1, l_2 关于 x 轴对称, 所以可得出直线斜率互为相反数, 可以得出来 $a = -\frac{e+1}{2x_1} - \frac{1}{2x_1^2}$;

② 在切线方程与过点问题联系时, 需要设切点. 本题中 l_2 容易求出, 而 l_1 可以先设切点 (x_1, y_1) ,

根据三个条件: 切点在曲线上, 切点在切线上, $(0, 0)$ 在切线上, 得出等式: $\frac{e+1}{2}x_1 + \ln x_1 - \frac{3}{2} = 0$;

③ 令 $u(x) = \frac{e+1}{2}x + \ln x - \frac{3}{2}$, 得出在定义域内函数的单调性为递增区间, 根据

$u(1) \cdot u\left(\frac{e}{e+1}\right) < 0$, 可以得出 x_1 的取值范围, 即 $x_1 \in \left(\frac{e}{e+1}, 1\right)$, 最后求出关系式

$$a = -\frac{e+1}{2x_1} - \frac{1}{2x_1^2} \text{ 中 } a \text{ 的范围.}$$

注意:不等式两边的值一般都是特殊 x 取得,比如极值点处,边界处.

- 10 函数 $f(x) = \frac{a + \ln x}{x}$, 若曲线 $f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 处的切线与直线 $e^2x - y + e = 0$ 垂直 (其中 e 为自然对数的底数) .

(1) 若 $f(x)$ 在 $(m, m+1)$ 上存在极值, 求实数 m 的取值范围 .

(2) 求证: 当 $x > 1$ 时, $\frac{f(x)}{e+1} > \frac{2e^{x-1}}{(x+1)(xe^x+1)}$.

答案 (1) $(0, 1)$.

(2) 证明见解析 .

解析

(1) $\because f'(x) = \frac{1-a-\ln x}{x^2}$,

$f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 处的切线斜率为 $-\frac{a}{e^2}$,

由切线与直线 $e^2x - y + e = 0$ 垂直 ,

可得 $f'(e) = -\frac{1}{e^2}$, 即有 $-\frac{a}{e^2} = -\frac{1}{e^2}$.

解得 $a = 1$,

$\therefore f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$, $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2} (x > 0)$

当 $0 < x < 1$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 为增函数 ;

当 $x > 1$ 时 , $f'(x) < 0$, $f(x)$ 为减函数 .

$\therefore x = 1$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点 ,

又 $f(x)$ 在 $(m, m+1)$ 上存在极值 ,

$\therefore m < 1 < m+1$ 即 $0 < m < 1$.

故实数 m 的取值范围是 $(0, 1)$.

(2) 不等式 $\frac{f(x)}{e+1} > \frac{2e^{x-1}}{(x+1)(xe^x+1)}$

即为 $\frac{1}{e+1} \cdot \frac{(x+1)(\ln x+1)}{x} > \frac{2e^{x-1}}{xe^x+1}$

令 $g(x) = \frac{(x+1)(\ln x+1)}{x}$

则 $g'(x) = \frac{x - \ln x}{x^2}$,

再令 $\Phi(x) = x - \ln x$, 则 $\Phi'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$,

$\because x > 1 \therefore \Phi'(x) > 0$, $\Phi(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是增函数 ,

$\therefore \Phi(x) > \Phi(1) = 1 > 0$, $g'(x) > 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是增函数,

$\therefore x > 1$ 时, $g(x) > g(1) = 2$.

故 $\frac{g(x)}{e+1} > \frac{2}{e+1}$.

令 $h(x) = \frac{2e^{x-1}}{xe^x + 1}$, 则 $h'(x) = \frac{2e^{x-1}(1-e^x)}{(xe^x + 1)^2}$,

$\therefore x > 1$ 时, $1 - e^x < 0$, $h'(x) < 0$, 即 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是减函数

$\therefore x > 1$ 时, $h(x) < h(1) = \frac{2}{e+1}$,

所以 $\frac{g(x)}{e+1} > h(x)$, 即 $\frac{f(x)}{e+1} > \frac{2e^{x-1}}{(x+1)(xe^x + 1)}$.

11 已知函数 $f(x) = ax^2e^{-x}$ ($a \neq 0$)

(1) 若直线 $y = e^{-1}x$ 为曲线 $y = f(x)$ 的切线, 求实数 a 的值.

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(3) 设函数 $g(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x} + f(x)) - \frac{1}{2}|x - \frac{1}{x} - f(x)| - cx^2$ ($x > 0$), 在 (1) 的条件下, 若函数 $g(x)$ 为增函数, 求实数 c 的取值范围.

答案 (1) 1.

(2) 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$ 上是减函数, 在 $(0, 2)$ 上是增函数.

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$ 上是增函数, 在 $(0, 2)$ 上是减函数.

(3) $(-\infty, -\frac{1}{2e^3}]$.

解析

(1) 对 $f(x)$ 求导得 $f'(x) = a \cdot \frac{2xe^x - x^2e^x}{(e^x)^2} = a \cdot \frac{x(2-x)}{e^x}$,

设直线 $y = e^{-1}x$ 与曲线 $y = f(x)$ 切于点 $P(x_0, y_0)$, 则

$$\begin{cases} e^{-1}x_0 = \frac{ax_0^2}{e^{x_0}} \\ e^{-1} = a \frac{x_0(2-x_0)}{e^{x_0}} \end{cases}, \text{解得 } a = x_0 = 1,$$

$\therefore a$ 的值为 1.

(2) $\therefore f(x) = ax^2e^{-x}$,

$\therefore f'(x) = a(2xe^{-x} - x^2e^{-x}) = axe^{-x}(2-x)$,

① 当 $a > 0$ 时,

$x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$,

$x \in (0, 2)$ 时, $f'(x) > 0$.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$ 上是减函数, 在 $(0, 2)$ 上是增函数.

②当 $a < 0$ 时,

$x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

$x \in (0, 2)$ 时, $f'(x) < 0$.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$ 上是增函数, 在 $(0, 2)$ 上是减函数.

(3) 记函数 $F(x) = f(x) - \left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{e^x} - x + \frac{1}{x}$, $x > 0$,

求导得 $F'(x) = \frac{x(2-x)}{e^x} - 1 - \frac{1}{x^2}$, ($x > 0$),

当 $x \geq 2$ 时, $F'(x) < 0$ 恒成立.

当 $0 < x < 2$ 时, $x(2-x) \leq \left[\frac{x+(2-x)}{2}\right]^2 = 1$,

$\therefore F'(x) = \frac{x(2-x)}{e^x} - 1 - \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{e^x} - 1 - \frac{1}{x^2} < 1 - 1 - \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2} < 0$,

$\therefore F'(x) < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 故 $y = F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

$F(1) = \frac{1}{e} > 0$, $F(2) = \frac{4}{e^2} - \frac{3}{2} < 0$,

$\therefore F(1) \cdot F(2) < 0$,

又曲线 $y = F(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续不间断,

$\therefore$ 由函数的零点存在性定理及其单调性知 $\exists$ 唯一的 $x_0 \in (1, 2)$, 使 $F(x_0) = 0$.

$\therefore x \in (0, x_0)$, $F(x) > 0$, $x \in (x_0, +\infty)$, $F(x) < 0$,

$\therefore g(x) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} + f(x)\right) - \frac{1}{2} \left|x - \frac{1}{x} - f(x)\right| - cx^2$,

从而 $\begin{cases} x - \frac{1}{x} - cx^2, & 0 < x \leq x_0 \\ \frac{x^2}{e^x} - cx^2, & x > x_0 \end{cases}$,

$\therefore$ 求导, $g'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x^2} - 2cx, & 0 < x \leq x_0 \\ \frac{x(2-x)}{e^x} - 2cx, & x > x_0 \end{cases}$,

由函数 $g(x)$ 为增函数, 且曲线 $y = g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续不断知: $g'(x) \geq 0$ 在 $(0, x_0)$,

$(x_0, +\infty)$ 上恒成立.

①当 $x > x_0$ 时, $\frac{x(2-x)}{e^x} - 2cx \geq 0$ 在 $[x_0, +\infty)$ 上恒成立, 即 $2x \leq \frac{2-x}{e^x}$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上

恒成立,

记 $u(x) = \frac{x(2-x)}{e^x}$, $x > x_0$, 则 $u'(x) = \frac{x-3}{e^x}$, $x > x_0$,

当 x 变化时, $u'(x)$, $u(x)$ 变化情况列表如下:

x	$(x_0, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$u'(x)$	-	0	+
$u(x)$	↓	极小值	↑

$$\therefore u(x)_{\min} = u(x)_{\text{极小值}} = u(3) = -\frac{1}{e^3},$$

故“ $2c < \frac{2-x}{e^x}$ 在 $[x_0, +\infty)$ 上恒成立”只需 $2c \leq u(x)_{\min} = -\frac{1}{e^3}$, $c \leq -\frac{1}{2e^3}$.

$$\textcircled{2} \text{ 当 } 0 < x < x_0 \text{ 时, } g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - 2cx,$$

当 $c \leq 0$ 时, $g'(x) > 0$ 在 $(0, x_0)$ 上恒成立,

综合 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ 知, 当 $c \leq -\frac{1}{2e^3}$ 时, 函数 $g(x)$ 为增函数.

故实数 c 的取值范围是 $\left(-\infty, -\frac{1}{2e^3}\right]$.

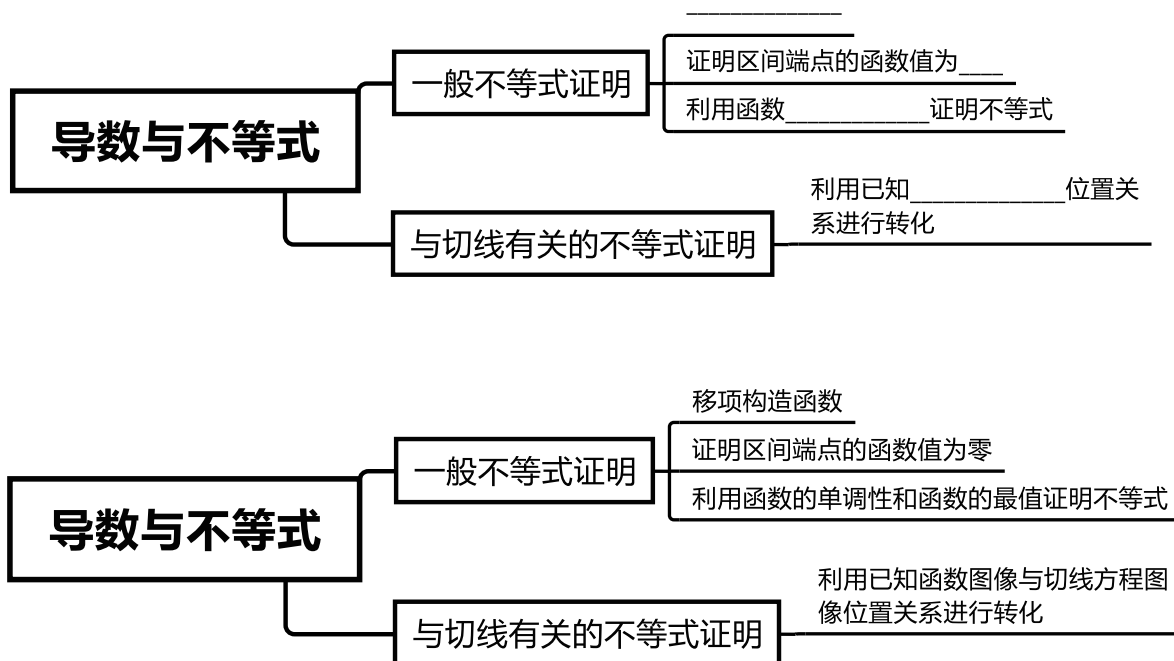
题型通解

①观察 $g(x)$ 可得, 表达式中有绝对值, 首先去绝对值; 讨论 $x - \frac{1}{x}$ 与 $f(x)$ 的大小关系;

②令 $F(x) = f(x) - \left(x - \frac{1}{x}\right)$, 求 $F(x)$ 的单调性, c 从而判断出的 $F(x)$ 正负, 进而给 $g(x)$ 去绝对值, 得到 $g(x)$ 是关于 x 的分段函数;

③由 $g(x)$ 单调递增, 得 $g'(x) \geq 0$ 恒成立, 从而求得 a 的取值范围.

思维大导图



小憩一下

反比例函数为何是双曲线?

我们在初中阶段就学过，反比例函数的图象是一组双曲线，那么它为什么是双曲线呢？它是否满足高中阶段我们对双曲线的定义呢？

下面我们来用定义法揭开她的面纱~

因为 $y = \frac{1}{x}$ ，

$$\begin{aligned} \text{所以 } & \left| \sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2} - \sqrt{(x+\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2} \right| \\ &= \left| \sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 + y^2 - 2\sqrt{2}y + 2} - \sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 + y^2 + 2\sqrt{2}y + 2} \right| \\ &= \left| \sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}x + 4 + \frac{1}{x^2} - \frac{2\sqrt{2}}{x}} - \sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + 4 + \frac{1}{x^2} + \frac{2\sqrt{2}}{x}} \right| \\ &= \left| \sqrt{\left(x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2} - \sqrt{\left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^2} \right| \\ &= \left| x + \frac{1}{x} - \sqrt{2} \right| - \left| x + \frac{1}{x} + \sqrt{2} \right| \end{aligned}$$

当 $x > 0$ 时，因为 $x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2 > \sqrt{2} > -\sqrt{2}$ ，所以

$$\text{上式} = \left| x + \frac{1}{x} - \sqrt{2} - \left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{2} \right) \right| = |-2\sqrt{2}| = 2\sqrt{2} ;$$

当 $x < 0$ 时，因为 $x + \frac{1}{x} \leq -2\sqrt{(-x) \cdot \frac{1}{-x}} = -2 < -\sqrt{2} < \sqrt{2}$ ，所以

$$\text{上式} = \left| \sqrt{2} - x - \frac{1}{x} - \left(-\sqrt{2} - x - \frac{1}{x} \right) \right| = |2\sqrt{2}| = 2\sqrt{2} .$$

$$\text{所以， } \left| \sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2} - \sqrt{(x+\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2} \right| = 2\sqrt{2} ;$$

即函数 $y = \frac{1}{x}$ 上的任意一点 (x, y) ，到两个定点 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 和 $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 的距离之差的绝对值，为定值 $2\sqrt{2}$ ！

它满足我们双曲线的定义，因此它是个双曲线。