

导数压轴2

考试数据

2014~2019天津卷考频100%，一二模共48套试卷中出现频率100%

知识 点	考点	天津卷	一模	二模
导数	利用导数证明不等式	2015-20 ; 2016-20 ; 2017-20 ; 2018-20 ;	19	20
	构造函数证明不等式	2016-20 ; 2017-20 ; 2018-20 ; 2019-20.	15	13

考点分析



高频考点

- ①已知函数性质求参数的取值范围(如:2018天津卷理20题)
- ②多变量证明(如:2017天津卷理20题)
- ③构造函数证明不等式(如:2019天津卷理20题)

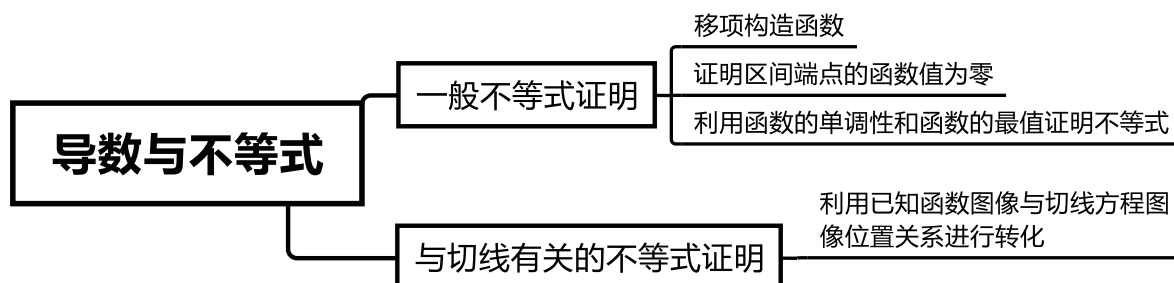


考试难点

- ①将多变量转换成一个变量构造新函数(如:2014天津卷理20题)
- ②利用切线证明不等式 (如:2015天津卷20题)
- ③简化构造函数(如:2017天津卷理20题)

一、利用导数证明不等式

思维导图



利用导数证明不等式

你先试试看

1 已知函数 $f(x) = nx - x^n (x \in \mathbb{R})$ ，其中 $n \in \mathbb{N}^*$ ， $n \geq 2$ 。

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；
- (2) 设曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P ，曲线在点 P 处的切线方程为 $y = g(x)$ ，求证：对于任意的正实数 x ，都有 $f(x) \leq g(x)$ ；
- (3) 若关于 x 的方程 $f(x) = a$ (a 为实数) 有两个正实根 x_1, x_2 ，求证： $|x_2 - x_1| < \frac{a}{1-n} + 2$ 。

解析：

(1) 由 $f(x) = nx - x^n$ ，可得 $f'(x) = n - nx^{n-1} = n(1 - x^{n-1})$ ，其中 $n \in \mathbf{N}^*$ ，且 $n \geq 2$ 。

-----1分

下面分两种情况讨论：

①当 n 为奇数时

令 $f'(x) = 0$ ，解得 $x = 1$ ，或 $x = -1$ 。

当 x 变化时， $f'(x)$ ， $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

所以， $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ ， $(1, +\infty)$ 上单调递减，在 $(-1, 1)$ 内单调递增。

②当 n 为偶数时

当 $f'(x) > 0$ ，即 $x < 1$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增；

当 $f'(x) < 0$ ，即 $x > 1$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减。

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增，在 $(1, +\infty)$ 上单调递减。

-----4分

(2) 证明：设点 P 的坐标为 $(x_0, 0)$ 则 $x_0 = n^{\frac{1}{n-1}}$ ， $f'(x_0) = n - n^2$ ，

曲线 $y = f(x)$ 在点 P 处的切线方程为 $y = f'(x)(x - x_0)$ ，即 $g(x) = f'(x)(x - x_0)$ 。

-----6分

令 $F(x) = f(x) - g(x)$ ，

即 $F(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0)$ ，则 $F'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ 。

由于 $f'(x) = n - nx^{n-1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，故 $F'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，

又因为 $F'(x_0) = 0$ ，所以当 $x \in (0, x_0)$ 时， $F'(x) > 0$ ，

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时， $F'(x) < 0$ ，所以 $F(x)$ 在 $(0, x_0)$ 内单调递增，在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递减，

-----8分

所以对于任意的正实数 x ，都有 $F(x) \leq F(x_0) = 0$ ，

即对于任意的正实数 x ，都有 $f(x) \leq g(x)$ 。

-----10分

(3) 证明：不妨设 $x_1 \leq x_2$ ，由 (II) 知 $g(x) = (n - n^2)(x - x_0)$ ，设方程 $g(x) = a$ 的根为 x_2' ，
 可得 $x_2' = \frac{a}{n - n^2} + x_0$ ，当 $n \geq 2$ 时， $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减，

-----11分

又由 (II) 知 $g(x_2) \geq f(x_2) = a = g(x_2')$ ，可得 $x_2 \leq x_2'$ 。

类似地，设曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线方程为 $y = h(x)$ ，可得 $h(x) = nx$ 。

当 $x \in (0, +\infty)$ ， $f(x) - h(x) = -x^n < 0$ ，即对于任意的 $x \in (0, +\infty)$ ， $f(x) < h(x)$ 。

设方程 $h(x) = a$ 的根为 x_1' ，可得 $x_1' = \frac{a}{n}$ 。因为 $h(x) = nx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增，

且 $h(x_1') = a = f(x_1) < h(x_1)$ ，因此 $x_1' < x_1$ 。

由此可得 $x_2 - x_1 < x_2' - x_1' = \frac{a}{1 - n} + x_0$ 。

因为 $n \geq 2$ ，所以 $2^{n-1} = (1+1)^{n-1} \geq 1 + C_{n-1}^1 = 1 + n - 1 = n$ ，故 $2 \geq n^{\frac{1}{n-1}} = x_0$ 。

所以， $|x_2 - x_1| < \frac{a}{1 - n} + 2$ 。

-----14分

听我慢慢讲

2 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax + (a-1)\ln x$, 其中 $a > 2$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性 .

(2) 若对于任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $x_1 \neq x_2$, 恒有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > -1$, 求 a 的取值范围 .

(3) 设 $a \in (3, 4)$, $x_n = \frac{n+1}{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 求证 : $|f(x_{n+1}) - f(x_1)| < \frac{1}{x_n}$.



题型通解

①由(1)知当 $x \in (1, a-1) \in (1, a-1)$ 时, 函数 $f(x)$ 为减函数, 令 $x_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$, $x_1 = 2$;

②判断 $x_n < x_1$, $f(x_{n+1}) < f(x_1)$, 直接去绝对值, 利用(2)结论, 整理得结论;

③一般(3)的证明过程, 要用到前两问的结论, 要注意应用.

注意: 遇到绝对值不等式或方程时, 通常要判断式子的正负去绝对值, 如果判断不了需要分情况讨论.

你再试试看

3 设 $a, b \in \mathbf{R}$, $|a| \leq 1$. 已知函数 $f(x) = x^3 - 6x^2 - 3a(a-4)x + b$, $g(x) = e^x f(x)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 已知函数 $y = g(x)$ 和 $y = e^x$ 的图象在公共点 (x_0, y_0) 处有相同的切线.

① 求证: $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数等于 0.

② 若关于 x 的不等式 $g(x) \leq e^x$ 在区间 $[x_0 - 1, x_0 + 1]$ 上恒成立, 求 b 的取值范围.



构造函数证明不等式

你先试试看

4 设 $a \in \mathbf{Z}$, 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 6x + a$ 在区间 $(1, 2)$ 内有一个零点 x_0 , $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数 .

(1) 求 $g(x)$ 的单调区间 .

(2) 设 $m \in [1, x_0) \cup (x_0, 2]$, 函数 $h(x) = g(x)(m - x_0) - f(m)$, 求证 : $h(m)h(x_0) < 0$.

(3) 求证 : 存在大于 0 的常数 A , 使得对于任意的正整数 p, q , 且 $\frac{p}{q} \in [1, x_0) \cup (x_0, 2]$, 满足

$$\left| \frac{p}{q} - x_0 \right| \geq \frac{1}{Aq^4} .$$

解析：

(1) 由 $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 6x + a$ ，可得 $g(x) = f'(x) = 8x^3 + 9x^2 - 6x - 6$ ，

进而可得 $g'(x) = 24x^2 + 18x - 6$ 。令 $g'(x) = 0$ ，解得 $x = -1$ ，或 $x = \frac{1}{4}$ 。

-----2分

当 x 变化时， $g'(x)$ ， $g(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \frac{1}{4})$	$\frac{1}{4}$	$(\frac{1}{4}, +\infty)$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以， $g(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, -1)$ ， $(\frac{1}{4}, +\infty)$ ，单调递减区间是 $(-1, \frac{1}{4})$ 。

-----4分

(2) 证明：由 $h(x) = g(x)(m - x_0) - f(m)$ ，得 $h(m) = g(m)(m - x_0) - f(m)$ ，

$h(x_0) = g(x_0)(m - x_0) - f(m)$ 。

令函数 $H_1(x) = g(x)(x - x_0) - f(x)$ ，则 $H_1'(x) = g'(x)(x - x_0)$ 。

由 (1) 知，当 $x \in [1, 2]$ 时， $g'(x) > 0$ ，

故当 $x \in [1, x_0]$ 时， $H_1'(x) < 0$ ， $H_1(x)$ 单调递减；

当 $x \in (x_0, 2]$ 时， $H_1'(x) > 0$ ， $H_1(x)$ 单调递增；

因此，当 $x \in [1, x_0] \cup (x_0, 2]$ 时， $H_1(x) > H_1(x_0) = -f(x_0) = 0$ ，

可得 $H_1(m) > 0$ ，即 $h(m) > 0$ 。

-----7分

令函数 $H_2(x) = g(x_0)(x - x_0) - f(x)$ ，则 $H_2'(x) = g(x_0) - g(x)$ 。

由 (1) 知，当 $x \in [1, 2]$ 时， $g'(x) > 0$ ，

故当 $x \in [1, x_0]$ 时， $H_2'(x) > 0$ ， $H_2(x)$ 单调递增；

当 $x \in (x_0, 2]$ 时， $H_2'(x) < 0$ ， $H_2(x)$ 单调递减；

因此，当 $x \in [1, x_0] \cup (x_0, 2]$ 时， $H_2(x) < H_2(x_0) = -f(x_0) = 0$ ，

可得 $H_2(m) < 0$ ，所以 $h(x_0) < 0$ 。

所以 $h(m)h(x_0) < 0$ 。

-----10分

(3) 证明：对于任意的正整数 p, q ，且 $\frac{p}{q} \in [1, x_0) \cup (x_0, 2]$ ，

令 $m = \frac{p}{q}$ ，函数 $h(x) = g(x)(m - x_0) - f(m)$ 。

由(II)知，当 $m \in [1, x_0)$ 时， $h(x)$ 在区间 (m, x_0) 内有零点；

当 $m \in (x_0, 2]$ 时， $h(x)$ 在区间 (x_0, m) 内有零点。

所以 $h(x)$ 在 $(1, 2)$ 内至少有一个零点，不妨设为 x_1 ，

则 $h(x_1) = g(x_1)(\frac{p}{q} - x_0) - f(\frac{p}{q}) = 0$ 。

由(I)知 $g(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增，所以 $0 < g(1) < g(x_1) < g(2)$ ，

所以 $|\frac{p}{q} - x_0| = |\frac{f(\frac{p}{q})}{g(x_1)}| > |\frac{f(\frac{p}{q})}{g(2)}| = \frac{|2p^4 + 3p^3q - 3p^2q^2 - 6pq^3 - aq^4|}{g(2)q^4}$ ，

因为当 $x \in [1, 2]$ 时， $g(x) > 0$ ，故 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上除 x_0 外没有其他零点，而 $\frac{p}{q} \neq x_0$ ，所以 $f(\frac{p}{q}) \neq 0$ 。

又因为 p, q, a 均为整数，所以 $|2p^4 + 3p^3q - 3p^2q^2 - 6pq^3 - aq^4|$ 是正整数，

从而 $|2p^4 + 3p^3q - 3p^2q^2 - 6pq^3 - aq^4| \geq 1$ ，

所以 $|\frac{p}{q} - x_0| \geq \frac{1}{g(2)q^4}$ 。所以，只要取 $A = g(2)$ ，就有 $|\frac{p}{q} - x_0| \geq \frac{1}{Aq^4}$ 。

-----14分



题型通解

① 对于任意的正整数 p, q ，且 $\frac{p}{q} \in [1, x_0) \cup (x_0, 2]$ ，令 $m = \frac{p}{q}$ ，函数 $h(x)$ 在区间内有零点，设为 x_1 ；

② 利用(2) $h(x_1) = g(x_1)(\frac{p}{q} - x_0) - f(\frac{p}{q}) = 0$ ，由(1)知在 $[1, 2]$ 上单调递增，故 $0 < g(1) < g(x_1) < g(2)$ ；

③ 利用结论 $|\frac{p}{q} - x_0| = \left| \frac{f(\frac{p}{q})}{g(x_1)} \right| \geq \frac{|f(\frac{p}{q})|}{g(2)}$ ，因为 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上除 x_0 外没有其他的零点， $|f(\frac{p}{q})| \neq 0$ ；

④ 由 p, q 均为整数，所以可以得结论。

听我慢慢讲

5 已知函数 $f(x) = (ax^2 + x - 1)e^x + f'(0)$.

(1) 求 $f'(0)$ 的值 .

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性 .

(3) 若 $g(x) = e^{-x}f(x) + \ln x$, $h(x) = e^x$, 过点 $O(0,0)$ 分别作曲线 $y = g(x)$ 与 $y = h(x)$ 的切线 l_1 、

l_2 , 且 l_1 与 l_2 关于 x 轴对称 , 求证 : $-\frac{(e+1)^3}{2e^2} < a < -\frac{e+2}{2}$.

你再试试看

6 设函数 $f(x) = (x-1)^2 + a \ln x$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $x + 2y - 1 = 0$ 垂直, 求 a 的值.

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(3) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 求证: $f(x_2) > \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$.

二、试炼之地

7 设函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}ax^2 - bx$.

(1) 当 $a = b = \frac{1}{2}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 令 $F(x) = f(x) + \frac{1}{2}ax^2 + bx + \frac{a}{x} (0 < x \leq 3)$, 其图象上任意一点 $P(x_0, y_0)$ 处切线的斜率 $k \leq \frac{1}{2}$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

(3) 当 $a = 0, b = -1$ 时, 方程 $f(x) = mx$ 在区间 $[1, e^2]$ 内有唯一实数解, 求实数 m 的取值范围.

8 设函数 $f(x) = \frac{x^2}{2} + a \ln x$.

- (1) 若 $a < 0$, 求 $f(x)$ 的单调区间和极值 .
- (2) 在 (1) 的条件下, 证明: 若 $f(x)$ 存在零点, 则 $f(x)$ 在区间 $(0, \sqrt{e}]$ 上仅有一个零点 .
- (3) 若存在 $x_0 \geq 1$, 使得 $f(x) - \frac{a}{2}x^2 - x < \frac{a}{a-1}$ ($a \neq 1$) , 求 a 的取值范围 .

9 设函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax (a > 0)$, $g(x) = bx^2 + 2b - 1$.

- (1) 若曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在它们的交点 $(1, c)$ 处有相同的切线, 求实数 a, b 的值.
- (2) 当 $b = \frac{1-a}{2}$ 时, 若函数 $h(x) = f(x) + g(x)$ 在区间 $(-2, 0)$ 内恰有两个零点, 求实数 a 的取值范围.
- (3) 当 $a = 1, b = 0$ 时, 求函数 $h(x) = f(x) + g(x)$ 在区间 $[t, t+3]$ 上的最小值.

题型通解

① 题干说 l_1, l_2 关于 x 轴对称, 所以可得出直线斜率互为相反数, 可以得出来 $a = -\frac{e+1}{2x_1} - \frac{1}{2x_1^2}$;

② 在切线方程与过点问题联系时, 需要设切点. 本题中 l_2 容易求出, 而 l_1 可以先设切点 (x_1, y_1) ,

根据三个条件: 切点在曲线上, 切点在切线上, $(0, 0)$ 在切线上, 得出等式: $\frac{e+1}{2}x_1 + \ln x_1 - \frac{3}{2} = 0$;

③ 令 $u(x) = \frac{e+1}{2}x + \ln x - \frac{3}{2}$, 得出在定义域内函数的单调性为递增区间, 根据

$u(1) \cdot u\left(\frac{e}{e+1}\right) < 0$, 可以得出 x_1 的取值范围, 即 $x_1 \in \left(\frac{e}{e+1}, 1\right)$, 最后求出关系式

$a = -\frac{e+1}{2x_1} - \frac{1}{2x_1^2}$ 中 a 的范围.

注意: 不等式两边的值一般都是特殊 x 取得, 比如极值点处, 边界处.

10 函数 $f(x) = \frac{a + \ln x}{x}$, 若曲线 $f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 处的切线与直线 $e^2x - y + e = 0$ 垂直 (其中 e 为自然对数的底数) .

(1) 若 $f(x)$ 在 $(m, m+1)$ 上存在极值, 求实数 m 的取值范围 .

(2) 求证: 当 $x > 1$ 时, $\frac{f(x)}{e+1} > \frac{2e^{x-1}}{(x+1)(xe^x+1)}$.

11 已知函数 $f(x) = ax^2e^{-x}$ ($a \neq 0$)

(1) 若直线 $y = e^{-1}x$ 为曲线 $y = f(x)$ 的切线, 求实数 a 的值 .

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间 .

(3) 设函数 $g(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x} + f(x)) - \frac{1}{2}|x - \frac{1}{x} - f(x)| - cx^2$ ($x > 0$), 在 (1) 的条件下, 若函数 $g(x)$ 为增函数, 求实数 c 的取值范围 .



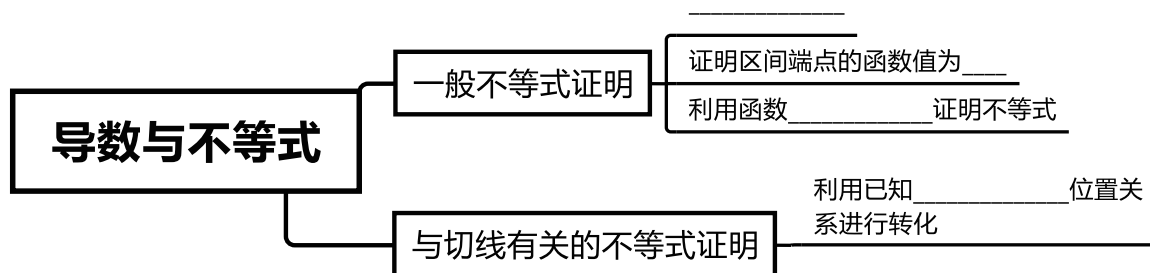
题型通解

① 观察 $g(x)$ 可得, 表达式中有绝对值, 首先去绝对值; 讨论 $x - \frac{1}{x}$ 与 $f(x)$ 的大小关系;

② 令 $F(x) = f(x) - (x - \frac{1}{x})$, 求 $F(x)$ 的单调性, c 从而判断出的 $F(x)$ 正负, 进而给 $g(x)$ 去绝对值, 得到 $g(x)$ 是关于 x 的分段函数;

③ 由 $g(x)$ 单调递增, 得 $g'(x) \geq 0$ 恒成立, 从而求得 a 的取值范围.

思维大导图



小憩一下

反比例函数为何是双曲线？

我们在初中阶段就学过，反比例函数的图象是一组双曲线，那么它为什么是双曲线呢？它是否满足高中阶段我们对双曲线的定义呢？

下面我们来用定义法揭开她的面纱~

因为 $y = \frac{1}{x}$,

$$\begin{aligned}
 & \text{所以 } \left| \sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2} - \sqrt{(x+\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2} \right| \\
 &= \left| \sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 + y^2 - 2\sqrt{2}y + 2} - \sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 + y^2 + 2\sqrt{2}y + 2} \right| \\
 &= \left| \sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}x + 4 + \frac{1}{x^2} - \frac{2\sqrt{2}}{x}} - \sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + 4 + \frac{1}{x^2} + \frac{2\sqrt{2}}{x}} \right| \\
 &= \left| \sqrt{\left(x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2} - \sqrt{\left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^2} \right| \\
 &= \left| x + \frac{1}{x} - \sqrt{2} - \left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right) \right|
 \end{aligned}$$

当 $x > 0$ 时，因为 $x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2 > \sqrt{2} > -\sqrt{2}$ ，所以

$$\text{上式} = \left| x + \frac{1}{x} - \sqrt{2} - \left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right) \right| = |-2\sqrt{2}| = 2\sqrt{2};$$

当 $x < 0$ 时，因为 $x + \frac{1}{x} \leq -2\sqrt{(-x) \cdot \frac{1}{-x}} = -2 < -\sqrt{2} < \sqrt{2}$ ，所以

$$\text{上式} = \left| \sqrt{2} - x - \frac{1}{x} - \left(-\sqrt{2} - x - \frac{1}{x}\right) \right| = |2\sqrt{2}| = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{所以, } \left| \sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2} - \sqrt{(x+\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2} \right| = 2\sqrt{2};$$

即函数 $y = \frac{1}{x}$ 上的任意一点 (x, y) ，到两个定点 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 和 $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 的距离之差的绝对值，为定值 $2\sqrt{2}$ ！

它满足我们双曲线的定义，因此它是个双曲线。