

导数压轴1

本段落仅教师可见

年份	2019	2018	2017	2016	2015	2014
题型	恒成立 +零点	求极值 +零点	恒成立	极值点	恒成立	零点存在 +恒能成立

讲义制作人：闫聪聪——096277

讲义审核人：天津教研团队

考试数据

2014~2019天津卷考频100%，一二模共48套试卷中出现频率100%

知识 点	考点	天津卷	一 模	二 模
导数	零点问题	2014-20；2017-20；2018-20(文)；2019-20；	12	9
	极值最值	2014-20(文)；2016-20；2018-20(文)；	3	6
	恒能成立问题	2014-20；2015-20；2017-20；2019-20.	17	15

考点分析



高频考点

- ①零点个数问题（如：2019天津卷文20题）
- ②零点存在问题（如：2014天津卷理20题）
- ③求极值最值问题（如：2018天津卷文20题）
- ④恒成立能成立问题（如：2019天津卷理20题）



考试难点

- ①零点极值点与证明结论联系(如:2016年天津卷理20题)
- ②构造函数新函数选取(如:2017年天津卷理20题)

③函数的恒成立与能成立(如:2015年天津卷理第20题)

易错点

①一个函数或两个函数的恒成立能成立问题

②误解导数值的符号与函数单调性的关系(如:2016年天津卷理第20题)

一、零点与极值最值问题

你先试试看

1 设 $k \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \ln x - kx$.

(1) 若 $k = 2$, 求曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程.

(2) $f(x)$ 无零点, 求实数 k 的取值范围.

(3) 若 $f(x)$ 有两个相异零点 x_1, x_2 , 求证: $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$.

答案 (1) $x + y + 1 = 0$.

(2) $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

(3) 证明见解析.

解析 (1) 函数的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1-kx}{x}$,

当 $k = 2$ 时, $f'(1) = 1 - 2 = -1$, 则切线方程为 $y - (-2) = -(x - 1)$, 即 $x + y + 1 = 0$.

(2) ①若 $k < 0$ 时, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 是区间 $(0, +\infty)$ 上的增函数,

$\because f(1) = -k > 0$, $f(e^k) = k - ke^k = k(1 - e^k) < 0$,

$\therefore f(1) \cdot f(e^k) < 0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 有唯一零点;

① 若 $k = 0$ $f(x) = \ln x$ 有唯一零点 $x = 1$;

② 若 $k > 0$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{k}$,

在区间 $\left(0, \frac{1}{k}\right)$ 上, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 是增函数;

在区间 $\left(\frac{1}{k}, +\infty\right)$ 上, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 是减函数;

故在区间 $(0, +\infty)$ 上, $f(x)$ 的极大值为 $f\left(\frac{1}{k}\right) = -\ln k - 1$,

由于 $f(x)$ 无零点, 须使 $f\left(\frac{1}{k}\right) = -\ln k - 1 < 0$, 解得 $k > \frac{1}{e}$,
故所求实数 k 的取值范围是 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

(3) 设 $f(x)$ 的两个相异零点为 x_1, x_2 , 设 $x_1 > x_2 > 0$,

$$\because f(x_1) = 0, f(x_2) = 0, \therefore \ln x_1 - kx_1 = 0, \ln x_2 - kx_2 = 0,$$

$$\therefore \ln x_1 - \ln x_2 = k(x_1 - x_2), \ln x_1 + \ln x_2 = k(x_1 + x_2),$$

$$\because x_1 x_2 > e^2, \text{ 故 } \ln x_1 + \ln x_2 > 2, \text{ 故 } k(x_1 + x_2) > 2,$$

$$\text{即 } \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} > \frac{2}{x_1 + x_2}, \text{ 即 } \ln \frac{x_1}{x_2} > \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2},$$

$$\text{设 } t = \frac{x_1}{x_2} > 1, \text{ 上式转化为 } \ln t > \frac{2(t-1)}{t+1} (t > 1),$$

$$\text{设 } g(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1},$$

$$\therefore g'(t) = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0,$$

$\therefore g(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore g(t) > g(1) = 0, \therefore \ln t > \frac{2(t-1)}{t+1},$$

$$\therefore \ln x_1 + \ln x_2 > 2.$$

解析:

$$(1) \text{ 函数的定义域为 } (0, +\infty), f'(x) = \frac{1-kx}{x},$$

-----1分

当 $k = 2$ 时, $f'(1) = 1 - 2 = -1$, 则切线方程为 $y - (-2) = -(x - 1)$, 即 $x + y + 1 = 0$.

-----4分

(2) ① 若 $k < 0$ 时, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 是区间 $(0, +\infty)$ 上的增函数,

$$\because f(1) = -k > 0, f(e^k) = k - ke^k = k(1 - e^k) < 0,$$

$\therefore f(1) \cdot f(e^k) < 0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 有唯一零点;

-----6分

① 若 $k = 0$ $f(x) = \ln x$ 有唯一零点 $x = 1$;

② 若 $k > 0$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{k}$,

在区间 $\left(0, \frac{1}{k}\right)$ 上, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 是增函数;

在区间 $\left(\frac{1}{k}, +\infty\right)$ 上, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 是减函数;

故在区间 $(0, +\infty)$ 上, $f(x)$ 的极大值为 $f\left(\frac{1}{k}\right) = -\ln k - 1$,

由于 $f(x)$ 无零点, 须使 $f\left(\frac{1}{k}\right) = -\ln k - 1 < 0$, 解得 $k > \frac{1}{e}$,

故所求实数 k 的取值范围是 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

-----10分

(3) 设 $f(x)$ 的两个相异零点为 x_1, x_2 , 设 $x_1 > x_2 > 0$,

$$\because f(x_1) = 0, f(x_2) = 0, \therefore \ln x_1 - kx_1 = 0, \ln x_2 - kx_2 = 0,$$

$$\therefore \ln x_1 - \ln x_2 = k(x_1 - x_2), \ln x_1 + \ln x_2 = k(x_1 + x_2),$$

$$\because x_1 x_2 > e^2, \text{ 故 } \ln x_1 + \ln x_2 > 2, \text{ 故 } k(x_1 + x_2) > 2,$$

$$\text{即 } \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} > \frac{2}{x_1 + x_2}, \text{ 即 } \ln \frac{x_1}{x_2} > \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2},$$

-----12分

$$\text{设 } t = \frac{x_1}{x_2} > 1, \text{ 上式转化为 } \ln t > \frac{2(t-1)}{t+1} (t > 1),$$

$$\text{设 } g(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1},$$

$$\therefore g'(t) = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0,$$

$\therefore g(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore g(t) > g(1) = 0, \therefore \ln t > \frac{2(t-1)}{t+1},$$

$$\therefore \ln x_1 + \ln x_2 > 2.$$

-----14分

听我慢慢讲

2 设函数 $f(x) = x^2 - (a-2)x - a \ln x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 若函数有两个零点, 求满足条件的最小正整数 a 的值.

(3) 若方程 $f(x) = c$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 , 求证: $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > 0$.

答案

(1) 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 无减区间.

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(\frac{a}{2}, +\infty\right)$, 单调递减区间为 $\left(0, \frac{a}{2}\right)$.

(2) 3

(3) 证明见解析.

解析

(1) $x \in (0, +\infty)$.

$$f'(x) = 2x - (a-2) - \frac{a}{x} = \frac{2x^2 - (a-2)x - a}{x} = \frac{(2x-a)(x+1)}{x}.$$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 即 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$.

当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 得 $x > \frac{a}{2}$; 由 $f'(x) < 0$, 解得 $0 < x < \frac{a}{2}$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\frac{a}{2}, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, \frac{a}{2})$.

(2) 由(1)可得, 若函数 $f(x)$ 有两个零点, 则 $a > 0$, 且 $f(x)$ 的最小值 $f(\frac{a}{2}) < 0$, 即

$$-a^2 + 4a - 4a \ln \frac{a}{2} < 0.$$

$$\because a > 0, \therefore a + 4 \ln \frac{a}{2} - 4 > 0.$$

令 $h(a) = a + 4 \ln \frac{a}{2} - 4$, 可知 $h(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 且 $h(2) = -2$,

所以存在零点 $h(a_0) = 0$, $a_0 \in (2, 3)$,

当 $a > a_0$ 时, $h(a) > 0$; 当 $0 < a < a_0$ 时, $h(a) < 0$.

所以满足条件的最小正整数 $a = 3$.

又当 $a = 3$ 时, $f(3) = 3(2 - \ln 3) > 0$, $f(1) = 0$, $\therefore a = 3$ 时, $f(x)$ 由两个零点.

综上所述, 满足条件的最小正整数 a 的值为 3.

(3) $\because x_1, x_2$ 是方程 $f(x) = c$ 得两个不等实数根, 由(1)可知: $a > 0$.

不妨设 $0 < x_1 < x_2$. 则 $x_1^2 - (a-2)x_1 - a \ln x_1 = c$, $x_2^2 - (a-2)x_2 - a \ln x_2 = c$.

两式相减得 $x_1^2 - (a-2)x_1 - a \ln x_1 - x_2^2 + (a-2)x_2 + a \ln x_2 = 0$,

$$\text{化为 } a = \frac{x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 - 2x_2}{x_1 + \ln x_1 - x_2 - \ln x_2}.$$

$\because f'(\frac{a}{2}) = 0$, 当 $x \in (0, \frac{a}{2})$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (\frac{a}{2}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$.

故只要证明 $\frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{a}{2}$ 即可,

即证明 $x_1 + x_2 > \frac{x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 - 2x_2}{x_1 + \ln x_1 - x_2 - \ln x_2}$, 即证明 $\ln \frac{x_1}{x_2} > \frac{2x_1 - 2x_2}{x_1 + x_2}$,

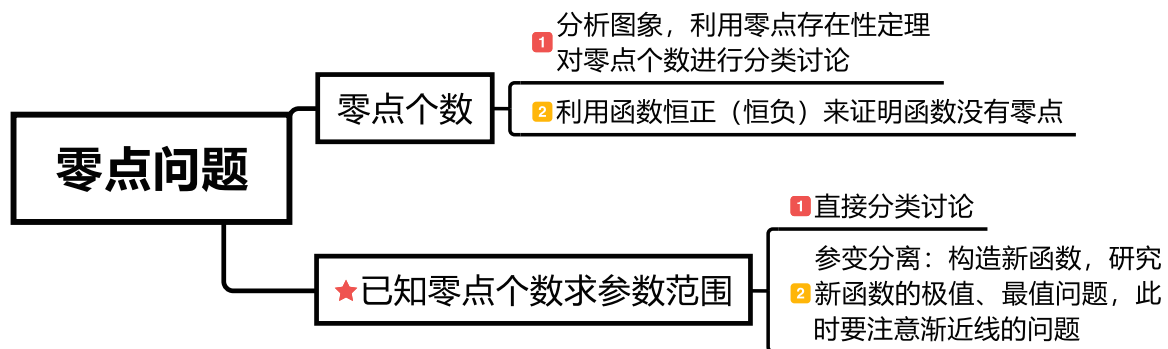
设 $t = \frac{x_1}{x_2}$ ($0 < t < 1$), 令 $g(t) = \ln t - \frac{2t-2}{t+1}$, 则 $g'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}$.

$\because 1 > t > 0$, $\therefore g'(t) > 0$.

$\therefore g(t)$ 在 $(0, 1)$ 上是增函数, 又在 $t = 1$ 处连续且 $g(1) = 0$,

$\therefore$ 当 $t \in (0, 1)$ 时, $g(t) < 0$ 总成立. 故命题得证.

导图总结



你再试试看

3 设函数 $f(x) = x - \frac{1}{x} - a \ln x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a = 2$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间 .

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1 和 x_2 ，记过点 $A(x_1, f(x_1))$ ， $B(x_2, f(x_2))$ 的直线的斜率为 k ，问：是否存在 a ，使得 $k = 2 - a$ ？若存在，求出 a 的值，若不存在，请说明理由 .

(3) 证明： $\sum_{k=2}^n \ln \frac{k-1}{k+1} > \frac{2-n-n^2}{\sqrt{2n(n+1)}} (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2)$.

答案 (1) $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增 .

(2) 不存在；证明见解析 .

(3) 证明见解析 .

解析 (1) $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2} \geq 0, \text{ 故 } f(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增} .$$

(2) 由 $f(x)$ 有两个极值点 x_1 和 x_2 ，知 $a > 2$.

$$\because f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) + \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} - a(\ln x_1 - \ln x_2),$$

$$\therefore k = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 1 + \frac{1}{x_1 x_2} - a \cdot \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2},$$

$$\text{又 } f(x) = x - \frac{1}{x} - a \ln x,$$

$$\therefore f'(x) = \frac{x^2 - ax + 1}{x^2},$$

$$\text{由 } f(x) \text{ 有两个极值点 } x_1 \text{ 和 } x_2, \text{ 可得 } x_1 x_2 = 1. \text{ 于是 } k = 2 - a \cdot \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2},$$

$$\text{若存在 } a, \text{ 使得 } k = 2 - a, \text{ 则 } \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} = 1, \text{ 即 } \ln x_1 - \ln x_2 = x_1 - x_2,$$

$$\text{亦即 } x_2 - \frac{1}{x_2} - 2 \ln x_2 = 0(*),$$

再由(1)知, 函数 $h(t) = t - \frac{1}{t} - 2\ln t$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

而 $x_2 > 1$,

$\therefore x_2 - \frac{1}{x_2} - 2\ln x_2 > 1 - 1 - 2\ln 1 = 0$, 这与(*)式矛盾,

故不存在 a , 使得 $k = 2 - a$.

$$(3) \because \sum_{k=2}^n \ln \frac{k-1}{k+1} = \ln \frac{2}{n(n+1)},$$

$\therefore$

$$\sum_{k=2}^n \ln \frac{k-1}{k+1} > \frac{2-n-n^2}{\sqrt{2n(n+1)}} \Leftrightarrow \ln \frac{2}{n(n+1)} > \frac{2-n-n^2}{\sqrt{2n(n+1)}} \Leftrightarrow \ln \frac{n(n+1)}{2} < \frac{n^2+n-2}{\sqrt{2n(n+1)}}$$

$$\text{令 } x = \frac{n(n+1)}{2} > 1, \text{ 则 } \ln \frac{n(n+1)}{2} < \frac{n^2+n-2}{\sqrt{2n(n+1)}} \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} - 2\ln x > 0,$$

由上知 $x - \frac{1}{x} - 2\ln x > 0$ 成立,

$$\therefore \sum_{k=2}^n \ln \frac{k-1}{k+1} > \frac{2-n-n^2}{\sqrt{2n(n+1)}}.$$

题型通解

①利用导数的几何意义,先求导;

②利用导数与单调性的关系,判断在定义域内导数的正负;

③有两个极值,可得 $x_1 \cdot x_2 = 1$, 过两个点的斜率为 $k = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$, 全部用 x_1, x_2 表示, 结合已知条件得 $\ln x_1 - \ln x_2 = x_1 - x_2$;

④设 $0 < x_1 < 1, x_2 > 1$, 转化成含一个未知数的函数, 利用单调性求最值判断结果不成立.

4 已知函数 $f(x) = ax^3 + x^2 - ax$, 其中 $a \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的极值.

(2) 求函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x} - \frac{3}{a} \ln x$ 的单调区间.

(3) 若存在 $a \in (-\infty, -1]$, 使函数 $h(x) = f(x) + f'(x)$, $x \in [-1, b] (b > -1)$ 在 $x = -1$ 处取得最小值, 试求 b 的最大值.

答案 (1) 当 $x = -1$ 时, $f(x)$ 取得极大值 $f(-1) = 1$,

当 $x = \frac{1}{3}$ 时, $f(x)$ 取得极小值 $f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{27}$.

- (2) 当 $a > 0$ 时, $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增;
 当 $a < 0$ 时, $g(x)$ 在 $(0, -\frac{3}{2a})$ 上单调递增, 在 $(-\frac{3}{2a}, +\infty)$ 上单调递减.
- (3) $b_{\max} = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$.

解析

- (1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = x^3 + x^2 - x$,

$$\therefore f'(x) = (x+1)(3x-1),$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } x = -1 \text{ 或 } x = \frac{1}{3},$$

列表讨论 $f'(x)$ 和 $f(x)$ 的变化情况:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	递增	极大值	递减	极小值	递增

$\therefore$ 当 $x = -1$ 时, $f(x)$ 取得极大值 $f(-1) = 1$,

当 $x = \frac{1}{3}$ 时, $f(x)$ 取得极小值 $f(\frac{1}{3}) = -\frac{5}{27}$.

- (2) $\therefore g(x) = ax^2 + x - a - \frac{3}{a} \ln x$,

$\therefore g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$g'(x) = g'(x) = \frac{2a^2x^2 + ax - 3}{ax} = \frac{2a^2(x - \frac{1}{a})(x + \frac{3}{2a})}{ax} (a \neq 0),$$

① 当 $a > 0$ 时,

由 $g'(x) > 0$, 解得: $x > \frac{1}{a}$, 由 $g'(x) < 0$, 解得: $0 < x < \frac{1}{a}$,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增;

② 当 $a < 0$ 时,

由 $g'(x) > 0$, 解得 $0 < x < -\frac{3}{2a}$, 由 $g'(x) < 0$, 解得: $x > -\frac{3}{2a}$,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, -\frac{3}{2a})$ 上单调递增, 在 $(-\frac{3}{2a}, +\infty)$ 上单调递减.

- (3) $\therefore f'(x) = 3ax^2 + 2x - a$,

$$\therefore h(x) = ax^3 + (3a+1)x^2 + (2-a)x - a,$$

由题意知, $h(x) \geq h(-1)$ 在区间 $[-1, b]$ 上恒成立,

$$\text{即 } (x+1)[ax^2 + (2a+1)x + (1-3a)] \geq 0,$$

当 $x = -1$ 时, 不等式成立;

当 $-1 < x \leq b$ 时, 不等式可化为 $ax^2 + (2a+1)x + (1-3a) \geq 0$,

$$\text{令 } F(x) = ax^2 + (2a+1)x + (1-3a),$$

$$\because a \leq -1, F(-1) = -4a > 0,$$

$$\therefore F(b) = ab^2 + (2a+1)b + (1-3a) \geq 0,$$

$$\text{即 } \frac{b^2 + 2b - 3}{b+1} \leq -\frac{1}{a},$$

$$\text{由题意, 只需 } \frac{b^2 + 2b - 3}{b+1} \leq \left(-\frac{1}{a}\right)_{\max} = 1,$$

$$\text{解得: } \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \leq b \leq \frac{-1+\sqrt{17}}{2},$$

$$\text{又 } b > -1,$$

$$\therefore -1 < b \leq \frac{-1+\sqrt{17}}{2},$$

$$\therefore b_{\max} = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}.$$

二、恒能成立问题

你先试试看

5 已知函数 $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2ax^2 - 3x$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 当 $a = 0$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(3, f(3))$ 处的切线方程.

(2) 当 $a > 0$ 时, 试讨论函数 $y = f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内的极值点的个数.

(3) 对一切 $x \in (0, +\infty)$, $af'(x) + 4a^2x \geq \ln x - 3a - 1$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

答案

(1) $15x - y - 36 = 0$.

(2) 答案见解析.

(3) $\left[\frac{1}{4e^3}, +\infty\right)$.

解析

(1) 当 $a = 0$ 时, $y = f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x$,

$$f'(x) = 2x^2 - 3, \therefore f'(3) = 15,$$

$$f(3) = 9,$$

$\therefore$ 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(3, f(3))$ 处的切线方程为 $y - 9 = 15(x - 3)$, 化为 $15x - y - 36 = 0$.

(2) 当 $a > 0$ 时, $f'(x) = 2x^2 - 4ax - 3$, $\Delta = 16a^2 + 24 > 0$,

$$\text{由 } f'(x) = 0, \text{ 解得 } x = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 + 6}}{2}. x_1 = \frac{2a - \sqrt{4a^2 + 6}}{2} < 0,$$

$$x_2 = \frac{2a + \sqrt{4a^2 + 6}}{2} > 1.$$

由 $x_1 > -1$, 解得 $a > \frac{1}{4}$.

因此 , 当 $a > \frac{1}{4}$ 时 , 由 $f'(x) = 0$, 解得 $x = x_1$,

$\therefore$ 当 $a > \frac{1}{4}$ 时 , 当 $x \in (-1, x_1)$ 时 , $f'(x) > 0$, 此时函数 $f(x)$ 单调递增 ; 当 $x \in (x_1, 0)$

时 , $f'(x) < 0$, 此时函数 $f(x)$ 单调递减 .

此时函数 $f(x)$ 取得极大值 , 只有一个 .

当 $0 < a \leq \frac{1}{4}$ 时 , $f'(x) \leq 0$, 此时函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内单调递减 , 无极值点 .

综上可得 : 当 $a > \frac{1}{4}$ 时 , 此时函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内取得一个极大值 .

当 $0 < a \leq \frac{1}{4}$ 时 , $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内无极值点 .

(3) 对一切 $x \in (0, +\infty)$, $af'(x) + 4a^2x \geq \ln x - 3a - 1$ 恒成立 $\Leftrightarrow a \geq \frac{\ln x - 1}{2x^2} (x > 0)$.

令 $g(x) = \frac{\ln x - 1}{2x^2}$, $x > 0$, $g'(x) = \frac{3 - 2\ln x}{2x^3}$,

令 $g'(x) > 0$, 解得 $0 < x < e^{\frac{3}{2}}$, 此时函数 $g(x)$ 单调递增 ; 令 $g'(x) < 0$, 解得 $x > e^{\frac{3}{2}}$,

此时函数 $g(x)$ 单调递减 .

$\therefore$ 当 $x = e^{\frac{3}{2}}$ 时 , 函数 $g(x)$ 取得最大值 , $g(x)_{\max} = \frac{\frac{3}{2} - 1}{2e^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4e^{\frac{3}{2}}}$.

$\therefore a \geq \frac{1}{4e^{\frac{3}{2}}}$.

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{4e^{\frac{3}{2}}}, +\infty \right)$.

解析 :

(1) 当 $a = 0$ 时 , $y = f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x$,

$f'(x) = 2x^2 - 3$,

-----1分

$\therefore f'(3) = 15$,

$f(3) = 9$,

$\therefore$ 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(3, f(3))$ 处的切线方程为 $y - 9 = 15(x - 3)$, 化为 $15x - y - 36 = 0$.

-----4分

(2) 当 $a > 0$ 时 , $f'(x) = 2x^2 - 4ax - 3$, $\Delta = 16a^2 + 24 > 0$,

由 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 + 6}}{2}$. $x_1 = \frac{2a - \sqrt{4a^2 + 6}}{2} < 0$, $x_2 = \frac{2a + \sqrt{4a^2 + 6}}{2} > 1$.

-----6分

由 $x_1 > -1$, 解得 $a > \frac{1}{4}$.

因此 , 当 $a > \frac{1}{4}$ 时 , 由 $f'(x) = 0$, 解得 $x = x_1$,

$\therefore$ 当 $a > \frac{1}{4}$ 时, 当 $x \in (-1, x_1)$ 时, $f'(x) > 0$, 此时函数 $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in (x_1, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, 此时函数 $f(x)$ 单调递减.

此时函数 $f(x)$ 取得极大值, 只有一个.

当 $0 < a \leq \frac{1}{4}$ 时, $f'(x) \leq 0$, 此时函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内单调递减, 无极值点.

综上所述: 当 $a > \frac{1}{4}$ 时, 此时函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内取得一个极大值.

当 $0 < a \leq \frac{1}{4}$ 时, $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内无极值点.

-----10分

(3) 对一切 $x \in (0, +\infty)$, $af'(x) + 4a^2x \geq \ln x - 3a - 1$ 恒成立 $\Leftrightarrow a \geq \frac{\ln x - 1}{2x^2} (x > 0)$.

-----11分

令 $g(x) = \frac{\ln x - 1}{2x^2}$, $x > 0$, $g'(x) = \frac{3 - 2\ln x}{2x^3}$,

令 $g'(x) > 0$, 解得 $0 < x < e^{\frac{3}{2}}$, 此时函数 $g(x)$ 单调递增; 令 $g'(x) < 0$, 解得 $x > e^{\frac{3}{2}}$, 此时函数 $g(x)$ 单调递减.

$\therefore$ 当 $x = e^{\frac{3}{2}}$ 时, 函数 $g(x)$ 取得最大值, $g(x)_{\max} = \frac{\frac{3}{2} - 1}{2e^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4e^{\frac{3}{2}}}$.

$\therefore a \geq \frac{1}{4e^{\frac{3}{2}}}$.

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{4e^{\frac{3}{2}}}, +\infty\right)$.

-----14分

听我慢慢讲

6 已知函数 $f(x) = a^2x^3 - 3ax^2 + 2$, $g(x) = -3ax + 3$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $a > 0$.

(1) 若 $a = 1$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程.

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上的极值.

(3) 若 $\exists x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, 使不等式 $f(x_0) > g(x_0)$ 成立, 求 a 的取值范围.

答案

(1) $y = -3x + 3$.

(2) 当 $a > 2$ 时, 当 $x = 0$ 时, $f(x)$ 取得极大值 $f(0) = 2$,

当 $x = \frac{2}{a}$ 时, $f(x)$ 取得极小值 $f\left(\frac{2}{a}\right) = 2 - \frac{4}{a}$;

当 $0 < a \leq 2$ 时, 当 $x = \frac{2}{a}$ 时, $f(x)$ 取得极小值 $f\left(\frac{2}{a}\right) = 2 - \frac{4}{a}$;

当 $x = 0$ 时, $f(x)$ 取得极大值 $f(0) = 2$, 无极小值.

(3) $(-3 + \sqrt{17}, +\infty)$.

解析

(1) 当 $a = 1$ 时,

$$\therefore f(x) = x^3 - 3x^2 + 2,$$

$$\therefore f(1) = 0,$$

$$\text{又 } f'(x) = 3x^2 - 6x,$$

$$\therefore f'(1) = -3,$$

$\therefore$ 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = -3x + 3$.

(2) 令 $f'(x) = 3a^2x^2 - 6ax = 3ax(ax - 2) = 0$,

$$\therefore a > 0,$$

$$\therefore x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{a},$$

① 当 $0 < \frac{2}{a} < 1$, 即 $a > 2$ 时,

列表讨论 $f'(x)$ 和 $f(x)$ 的变化情况:

x	$(-1, 0)$	0	$(0, \frac{2}{a})$	$\frac{2}{a}$	$(\frac{2}{a}, 1)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时, $f(x)$ 取得极大值 $f(0) = 2$,

当 $x = \frac{2}{a}$ 时, $f(x)$ 取得极小值 $f(\frac{2}{a}) = 2 - \frac{4}{a}$;

② 当 $\frac{2}{a} \geq 1$, 即 $0 < a \leq 2$ 时,

列表讨论 $f'(x)$ 和 $f(x)$ 的变化情况:

x	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

当 $x = 0$ 时, $f(x)$ 取得极大值 $f(0) = 2$, 无极小值.

(3) 令 $F(x) = f(x) - g(x) = a^2x^3 - 3ax^2 + 3ax - 1, x \in (0, \frac{1}{2}]$,

$$\text{令 } F'(x) = 3a^2x^2 - 6ax + 3a,$$

$$\therefore x \in (0, \frac{1}{2}], a > 0,$$

$$\therefore F'(x) = 3a^2x^2 + 3a(1 - 2x) > 0,$$

$\therefore F(x)$ 在区间 $(0, \frac{1}{2}]$ 上单调递增,

$$\therefore F(x)_{\max} = F\left(\frac{1}{2}\right),$$

依题意, 只需 $F(x)_{\max} > 0$,

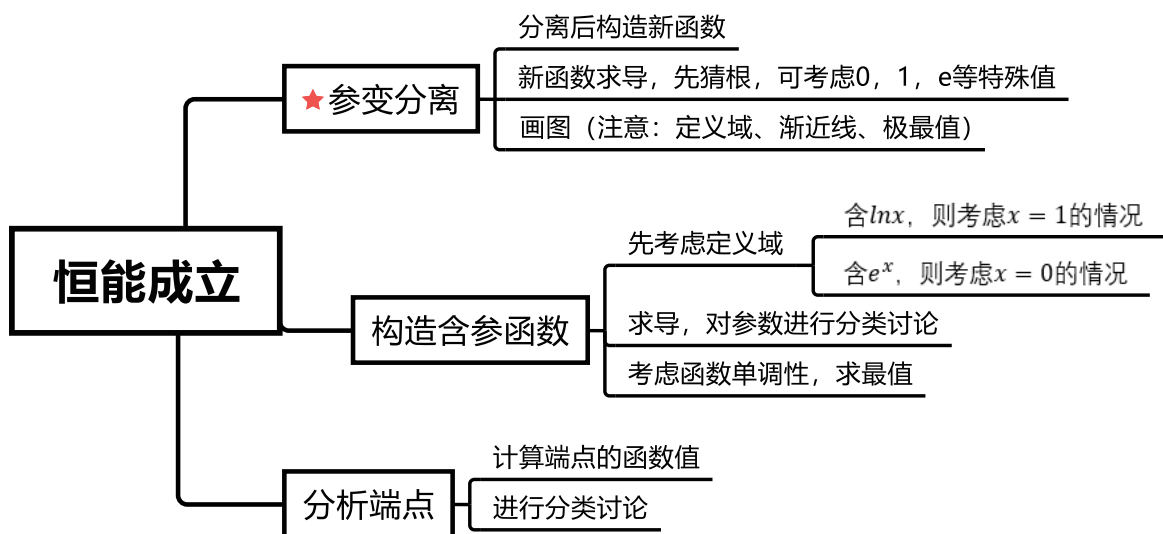
$$\text{即 } \left(\frac{1}{2}\right)^3 a^2 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 a + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right) a - 1 > 0,$$

$$\text{即 } a^2 + 6a - 8 > 0,$$

$$\text{解得 } a < -3 - \sqrt{7} \text{ (舍去) 或 } a > -3 + \sqrt{17},$$

$\therefore a$ 的取值范围是 $(-3 + \sqrt{17}, +\infty)$.

导图总结



你再试试看

7 已知函数 $f(x) = a\left(x - \frac{1}{x}\right) - \ln x$.

(1) 若 $a = 1$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程.

(2) 若函数 $f(x)$ 在其定义域内为增函数, 求 a 的取值范围.

(3) 在 (2) 的条件下, 设函数 $g(x) = \frac{e}{x}$, 若在 $[1, e]$ 上至少存在一点 x_0 , 使得 $f(x_0) \geq g(x_0)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

答案

(1) $y = x - 1$.

(2) $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

(3) $\left[\frac{2e}{e^2 - 1}, +\infty\right)$.

解析

(1) 当 $a=1$ 时, 函数 $f(x) = x - \frac{1}{x} - \ln x$,

$$\therefore f(1) = 1 - 1 - \ln 1 = 0, f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x},$$

曲线 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率为 $f'(1) = 1 + 1 - 1 = 1$.

从而曲线 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - 0 = x - 1$,

即: $y = x - 1$.

(2) $f'(x) = a + \frac{a}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{ax^2 - x + a}{x^2}$.

要使 $f(x)$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 内是增函数, 只需 $f'(x) \geq 0$, 在 $(0, +\infty)$ 内恒成立.

即: $ax^2 - x + a \geq 0$ 得: $a \geq \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{x + \frac{1}{x}}$ 恒成立.

由于 $x + \frac{1}{x} \geq 2$,

$$\therefore \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \leq \frac{1}{2},$$

$$\therefore a \geq \frac{1}{2},$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内为增函数, 实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

(3) $\therefore g(x) = \frac{e}{x}$ 在 $[1, e]$ 上是减函数,

$$\therefore x = e \text{ 时, } g(x)_{\min} = 1, x = 1 \text{ 时, } g(x)_{\max} = e,$$

即 $g(x) \in [1, e]$,

$$f'(x) = \frac{ax^2 - x + a}{x^2}, \text{ 令 } h(x) = ax^2 - x + a,$$

当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, 由 (II) 知 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上是增函数, $f(1) = 0 < 1$,

又 $g(x) = \frac{e}{x}$ 在 $[1, e]$ 上是减函数,

故只需 $f(x)_{\max} \geq g(x)_{\min}$, $x \in [1, e]$,

$$\text{而 } f(x)_{\max} = f(e) = a \left(e - \frac{1}{e} \right) - \ln e, g(x)_{\min} = 1,$$

$$\text{即: } a \left(e - \frac{1}{e} \right) - \ln e \geq 1,$$

$$\text{解得 } a \geq \frac{2e}{e^2 - 1}.$$

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{2e}{e^2 - 1}, +\infty \right)$.



题型通解

① 构造函数 $h(x) = f(x) - g(x)$, 由题意得, $h(x)_{\max} \geq 0$;

② 通过 $f(x), g(x)$ 的增减性可知, 在 $x = e$ 处, $f(x)$ 取最大值, $g(x)$ 取最小值, 此时, $h(x)$ 取最大值.

注意: 遇到这种情况通常需要挪到一边构造新函数去求最值, 两边分别求最值比较不太准确, 有少数题目可以, 大部分题目不行;

③因此遇见题目优先构造新函数求最值,如果发现构造的新函数不好讨论,可以试试分别求最值.

8 已知函数 $f(x) = x \ln x$, $g(x) = -x^2 + ax - 3$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在 $[t, t+2]$ ($t > 0$) 上的最小值.

(2) 对一切 $x \in (0, +\infty)$, $2f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

(3) 探讨函数 $F(x) = \ln x - \frac{1}{e^x} + \frac{2}{ex}$ 是否存在零点? 若存在, 求出函数 $F(x)$ 的零点, 若不存在, 请说明理由.

答案

(1) 当 $0 < t < \frac{1}{e}$ 时, $f_{\min}(x) = -\frac{1}{e}$, 当 $t \geq \frac{1}{e}$ 时, $f_{\min}(x) = t \ln t$.

(2) $(-\infty, 4]$.

(3) 不存在, 理由见解析.

解析

(1) $f(x) = x \ln x$,

$f'(x) = \ln x + 1$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{e}$.

①当 $0 < t < \frac{1}{e}$ 时, 在 $x \in [t, \frac{1}{e})$ 上 $f'(x) < 0$; 在 $x \in (\frac{1}{e}, t+2]$ 上 $f'(x) > 0$.

因此, $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{e}$ 处取得极小值, 也是最小值. $f_{\min}(x) = -\frac{1}{e}$.

②当 $t \geq \frac{1}{e}$, $f'(x) \geq 0$, 因此 $f(x)$ 在 $[t, t+2]$ 上单调递增, $f_{\min}(x) = f(t) = t \ln t$.

(2) 由对一切 $x \in (0, +\infty)$, $2f(x) \geq g(x)$ 恒成立,

即有 $2x \ln x \geq -x^2 + ax - 3$.

即 $a \leq 2 \ln x + x + \frac{3}{x}$ 恒成立,

令 $h(x) = 2 \ln x + x + \frac{3}{x}$, $h'(x) = \frac{2}{x} + 1 - \frac{3}{x^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{x^2}$,

当 $x > 1$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 是增函数,

当 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 是减函数,

$\therefore a \leq h(x)_{\min} = h(1) = 4$.

即实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 4]$.

(3) 令 $m(x) = 2x \ln x$,

$m'(x) = 2(1 + \ln x)$,

当 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时, $m'(x) < 0$, $m(x)$ 递减;

当 $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ 时, $m'(x) > 0$, $m(x)$ 递增;

$\therefore m(x)$ 的最小值为 $m(\frac{1}{e}) = -\frac{2}{e}$,

$$\text{则 } 2x \ln x \geq -\frac{2}{e},$$

$$\therefore \ln x \geq -\frac{1}{ex},$$

$$F(x) = \ln x - \frac{1}{e^x} + \frac{2}{ex} = 0 \text{ ①}$$

$$\text{则 } F(x) = \ln x - \frac{1}{e^x} + \frac{2}{ex} \geq -\frac{1}{ex} - \frac{1}{e^x} + \frac{2}{ex} = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{e} - \frac{2}{e^x} \right),$$

$$\text{令 } G(x) = \frac{1}{e} - \frac{x}{e^x}, \text{ 则 } G'(x) = \frac{x-1}{e^x},$$

当 $x \in (0, 1)$ 时, $G'(x) < 0$, $G(x)$ 递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $G'(x) > 0$, $G(x)$ 递增;

$$\therefore G(x) \geq G(1) = 0 \text{ ②}$$

$$\therefore F(x) = \ln x - \frac{1}{e^x} + \frac{2}{ex} \geq -\frac{1}{ex} - \frac{1}{e^x} + \frac{2}{ex} = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{e} - \frac{x}{e^x} \right) \geq 0,$$

$\therefore$ ①②中取等号的条件不同,

$\therefore F(x) > 0$, 故函数 $F(x)$ 没有零点.

题型通解

方法一:由(1)知 $x \ln x \geq -\frac{1}{e}$, $\ln x \geq -\frac{1}{ex}$, 则可转化 $F(x) \geq -\frac{1}{ex} - \frac{1}{e^x} + \frac{2}{ex} = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{e} - \frac{x}{e^x} \right)$, 由单调性判断 $F(x) > 0$, 可得不存在零点.

方法二:由(1)知 $x \ln x \geq -\frac{1}{e}$, 将函数转化成 $x \ln x = \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e}$, 设 $h(x) = \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e}$, $h(x)_{\max} = h(1) = -\frac{1}{e}$, 但两个函数在不同位置取到最值, 故可得无零点.

三、试炼之地

9 已知函数 $f(x) = ax^2 - (2a+1)x + \ln x, a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间和极值.

(2) 若关于 x 的方程 $f(x) = 2ax^2 - 2(a+1)x$ 恰有两个不等的实根, 求实数 a 的取值范围.

(3) 设 $g(x) = e^x - x - 1$, 若对任意的 $x_1 \in (0, +\infty), x_2 \in \mathbf{R}$, 不等式 $f(x_1) \leq g(x_2)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

答案 (1) 答案见解析.

(2) $a > 1$.

(3) $[-1, 0]$

解析

(1) 当 $a=1$ 时, 函数 $f(x) = x^2 - 3x + \ln x$, $f'(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x}$,

令 $f'(x) = 0$ 得: $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1$,

当 x 变化时, $f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	单调递增	极大	单调递减	极小	单调递增

$\therefore f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 单调递增, 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 单调递增,

当 $x = \frac{1}{2}$ 时: $f(x)$ 有极大值, 且 $f(x)_{\text{极大值}} = f(\frac{1}{2}) = -\frac{5}{4} - \ln 2$,

当 $x = 1$ 时: $f(x)$ 有极小值, 且 $f(x)_{\text{极小值}} = -2$.

(2) $\because f(x) = 2ax^2 - 2(a+1)x$,

$\therefore ax^2 - (2a+1)x + \ln x = 2ax^2 - 2(a+1)x$,

$\therefore ax^2 - x = \ln x, x \in (0, +\infty)$,

显然 $a \leq 0$ 时, $y = ax^2 - x$ 与 $y = \ln x$ 只有 1 个交点, 不合题意,

当 $a = 1$ 时, 函数 $y = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ 时: $y_{\min} = -\frac{1}{4}$, 而 $y = \ln \frac{1}{2} < \ln e^{-\frac{1}{4}}$,

$\therefore 0 < a \leq 1$ 时, $y = ax^2 - x$ 与 $y = \ln x$ 只有 1 个交点, 不合题意,

$a > 1$ 时, 画出函数 $y = ax^2 - x$ 与 $y = \ln x$ 的图象,

如图示:

图象有 2 个交点,

综上: $a > 1$.

(3) 由 $g(x) = e^x - x - 1$, 则 $g'(x) = e^x - 1$,

令 $g'(x) > 0$, 解得 $x > 0$, 令 $g'(x) < 0$, 解得 $x < 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 是减函数, 在 $(0, +\infty)$ 是增函数,

即 $g(x)_{\text{最小值}} = g(0) = 0$.

对于任意的 $x_1 \in (0, +\infty), x_2 \in \mathbf{R}$, 不等式 $f(x_1) \leq g(x_2)$ 恒成立, 则有 $f(x_1) \leq g(0)$ 即可.

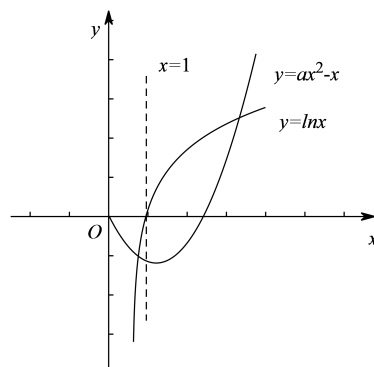
即不等式 $f(x) \leq 0$ 对于任意的 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

$f'(x) = \frac{2ax^2 - (2a+1)x + 1}{x}$,

(1) 当 $a = 0$ 时, $f'(x) = \frac{1-x}{x}$, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $0 < x < 1$, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $x > 1$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 1)$ 是增函数, 在 $(1, +\infty)$ 是减函数,

$\therefore f(x)_{\text{最大值}} = f(1) = -1 < 0$,



$\therefore a = 0$ 符合题意 .

$$(2) \text{ 当 } a < 0 \text{ 时, } f'(x) = \frac{(2ax-1)(x-1)}{x},$$

令 $f'(x) > 0$, 解得 $0 < x < 1$, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $x > 1$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 1)$ 是增函数, 在 $(1, +\infty)$ 是减函数,

$$\therefore f(x)_{\text{最大值}} = f(1) = -a - 1 \leq 0,$$

得 $-1 \leq a < 0$,

$\therefore -1 \leq a < 0$ 符合题意 .

$$(3) \text{ 当 } a > 0 \text{ 时, } f'(x) = \frac{(2ax-1)(x-1)}{x}, f'(x) = 0 \text{ 得 } x_1 = \frac{1}{2a}, x_2 = 1,$$

$a > \frac{1}{2}$ 时, $0 < x_1 < 1$, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $0 < x < \frac{1}{2a}$ 或 $x > 1$,

令 $f'(x) < 0$, 解得 $\frac{1}{2a} < x < 1$,

$\therefore f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 是增函数,

而当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 这与对于任意的 $x \in (0, +\infty)$ 时 $f(x) \leq 0$ 矛盾 .

同理 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时也不成立 .

综上所述: a 的取值范围为 $[-1, 0]$.

10 设函数 $f(x) = ae^x(x+1)$ (其中 $e = 2.71828 \dots$), $g(x) = x^2 + bx + 2$, 已知它们在 $x = 0$ 处有相同的切线 .

(1) 求函数 $f(x)$, $g(x)$ 的解析式 .

(2) 求函数 $f(x)$ 在 $[t, t+1]$ ($t > -3$) 上的最小值 .

(3) 若对 $\forall x \geq -2$, $kf(x) \geq g(x)$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围 .

答案

$$(1) f(x) = 2e^x(x+1), g(x) = x^2 + 4x + 2.$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} -2e^{-2} & (-3 < t < -2) \\ 2e^t(t+1) & (t \geq -2) \end{cases}.$$

$$(3) [1, e^2].$$

解析

$$(1) f'(x) = ae^x(x+2), g'(x) = 2x+b,$$

由题意, 两函数在 $x = 0$ 处有相同的切线 .

$$\therefore f'(0) = 2a, g'(0) = b,$$

$$\therefore 2a = b, f(0) = a = g(0) = 2,$$

$$\therefore a = 2, b = 4,$$

$$\therefore f(x) = 2e^x(x+1), g(x) = x^2 + 4x + 2.$$

(2) $f'(x) = 2e^x(x+2)$, 由 $f'(x) > 0$ 得 $x > -2$, 由 $f'(x) < 0$ 得 $x < -2$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 单调递增, 在 $(-\infty, -2)$ 单调递减.

$$\therefore t > -3,$$

$$\therefore t+1 > -2.$$

① 当 $-3 < t < -2$ 时, $f(x)$ 在 $[t, -2]$ 单调递减, $[-2, t+1]$ 单调递增,

$$\therefore f(x)_{\min} = f(-2) = -2e^{-2}.$$

② 当 $t \geq -2$ 时, $f(x)$ 在 $[t, t+1]$ 单调递增,

$$\therefore f(x)_{\min} = f(t) = 2e^t(t+1);$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -2e^{-2} & (-3 < t < -2) \\ 2e^t(t+1) & (t \geq -2) \end{cases}.$$

(3) 令 $F(x) = kf(x) - g(x) = 2ke^x(x+1) - x^2 - 4x - 2$,

由题意当 $x \geq -2$, $F(x)_{\min} \geq 0$,

$\therefore \forall x \geq -2, kf(x) \geq g(x)$ 恒成立,

$$\therefore F(0) = 2k - 2 \geq 0,$$

$$\therefore k \geq 1$$

$$F'(x) = 2ke^x(x+1) + 2ke^x - 2x - 4 = 2(x+2)(ke^x - 1),$$

$\therefore x \geq -2$, 由 $F'(x) > 0$ 得 $e^x > \frac{1}{k}$,

$\therefore x > \ln \frac{1}{k}$; 由 $F'(x) < 0$ 得 $x < \ln \frac{1}{k}$,

$\therefore F(x)$ 在 $(-\infty, \ln \frac{1}{k}]$ 单调递减, 在 $[\ln \frac{1}{k}, +\infty)$ 单调递增

① 当 $\ln \frac{1}{k} < -2$, 即 $k > e^2$ 时, $F(x)$ 在 $[-2, +\infty)$ 单调递增,

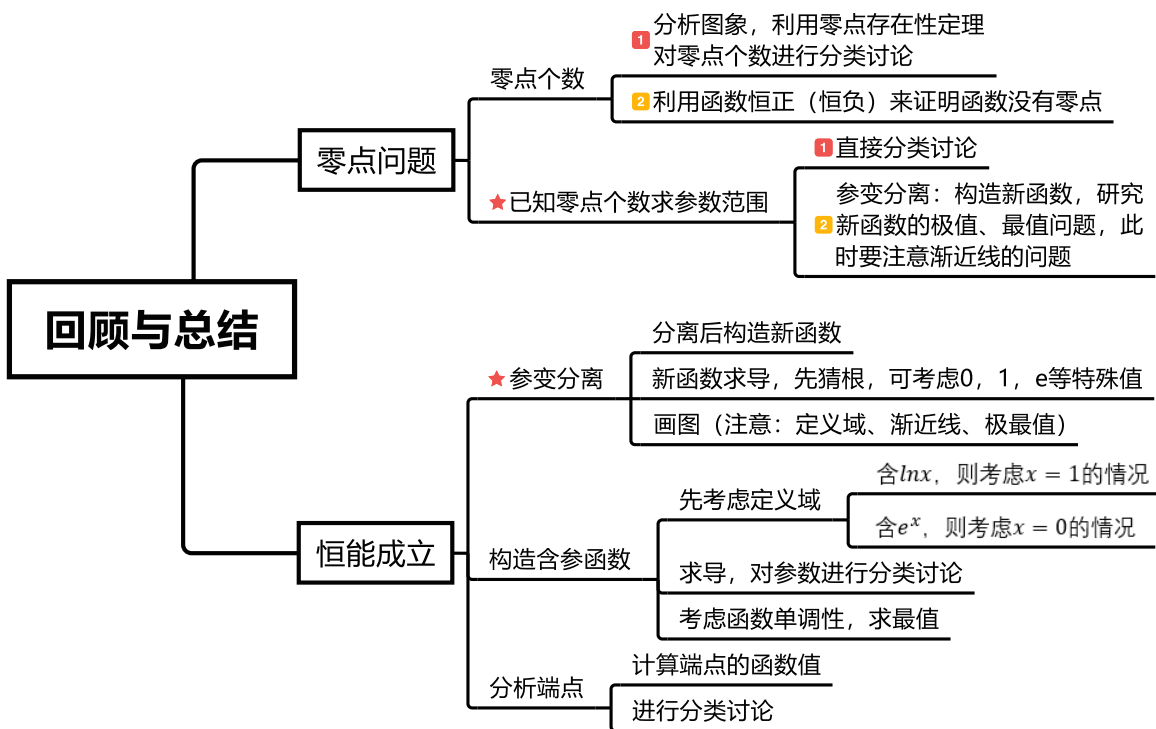
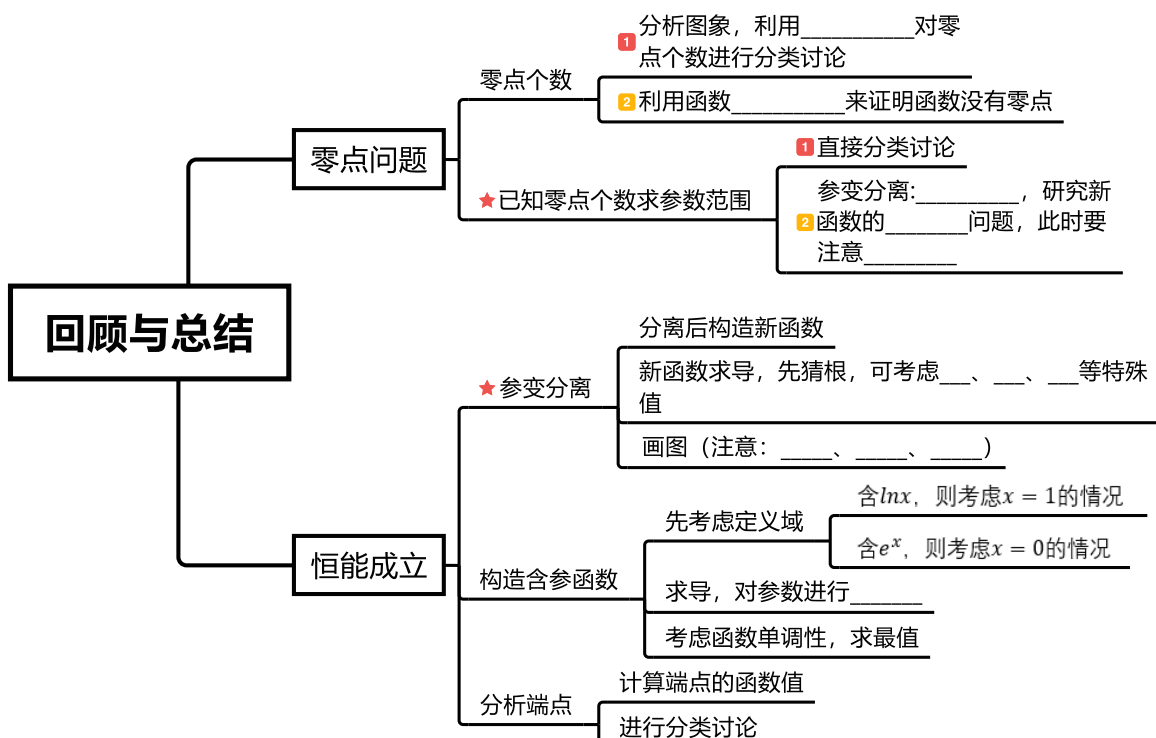
$$F(x)_{\min} = F(-2) = -2ke^{-2} + 2 = \frac{2}{e^2}(e^2 - k) < 0, \text{ 不满足 } F(x)_{\min} \geq 0.$$

② 当 $\ln \frac{1}{k} = -2$, 即 $k = e^2$ 时, 由①知, $F(x)_{\min} = F(-2) = \frac{2}{e^2}(e^2 - k) = 0$, 满足

$$F(x)_{\min} \geq 0.$$

③ 当 $\ln \frac{1}{k} > -2$, 即 $1 \leq k < e^2$ 时, $F(x)$ 在 $[-2, \ln \frac{1}{k}]$ 单调递减, 在 $[\ln \frac{1}{k}, +\infty)$ 单调递增, $F(x)_{\min} = F(\ln \frac{1}{k}) = \ln k(2 - \ln k) > 0$, 满足 $F(x)_{\min} \geq 0$.

综上所述, 满足题意的 k 的取值范围为 $[1, e^2]$.



易错总结

- ①一个函数或两个函数的恒成立能成立问题
- ②误解导数值的符号与函数单调性的关系

小憩一下

牛顿与莱布尼兹

我们的积分公式，又名牛顿——莱布尼兹公式，今天的小憩一下，就来给大家讲讲这二位不得不说的故事。

在数学史上，没有比研究牛顿和莱布尼兹的故事更有趣的事了。

17世纪中叶，两位数学巨人相继登上历史舞台。

1642年，上帝说：降生牛顿，于是世界充满光明。

4年后，莱布尼兹哭哭啼啼来到了这个世界。

牛顿家里很穷，出生两个月父亲去世；莱布尼兹家很富，6岁父亲与世长辞。

牛顿是农民出身；莱布尼兹是哲学教授之子。

牛顿不是神童；莱布尼兹是天才。

牛顿17岁险些成为科学史上最可惜的辍学案例；莱布尼兹17岁已斩获学士学位。

19岁牛顿考入剑桥；18岁莱布尼兹已拿下硕士学位。

20岁的莱布尼兹荣升博士；这年，在剑桥的牛顿默默无闻，埋头苦读。

虽然莱布尼兹迟到4年；1661年他们却是同时步入大学。

相比20岁就已经获得博士学位的莱布尼兹。

25岁才获得硕士学位的牛顿的一生比莱布尼兹坎坷万分。

这或许也注定了其功绩胜之万分；因为就在伦敦鼠疫避灾那年。

上帝向23岁的牛顿扔下了一粒苹果，牛顿痛并快乐着。

26岁莱布尼兹结识惠更斯等知名学者开启了高速学术研究模式。

同是26岁那年，巴罗主动请缨充当伯乐让位牛顿。

牛顿创立微积分早莱布尼兹10年；莱布尼兹发表微积分著作早牛顿3年。

自莱布尼兹发表微积分后，一条界线将科学从中划开。

因两人微积分的创立优先权之争，欧洲科学家分立为两派，甚至擦出了英德的政治火花。

两人在著作权争论中痛苦的度过了余生。

70岁那年，莱布尼兹先逝。

11年后，英国领袖们争相恐后抬起牛顿灵柩，一位伟人离我们而去。

两人一样，不舍昼夜，两人一样，功勋卓著，两人一样，终生未娶。

——致两位数学界的神话