

# 导数压轴1

## 考试数据

2014~2019天津卷考频100%，一二模共48套试卷中出现频率100%

| 知识<br>点 | 考点     | 天津卷                                        | 一<br>模 | 二<br>模 |
|---------|--------|--------------------------------------------|--------|--------|
| 导数      | 零点问题   | 2014-20 ; 2017-20 ; 2018-20(文) ; 2019-20 ; | 12     | 9      |
|         | 极值最值   | 2014-20(文) ; 2016-20 ; 2018-20(文) ;        | 3      | 6      |
|         | 恒能成立问题 | 2014-20 ; 2015-20 ; 2017-20 ; 2019-20.     | 17     | 15     |

## 考点分析



### 高频考点

- ①零点个数问题（如：2019天津卷文20题）
- ②零点存在问题（如：2014天津卷理20题）
- ③求极值最值问题（如：2018天津卷文20题）
- ④恒成立能成立问题（如：2019天津卷理20题）



### 考试难点

- ①零点极值点与证明结论联系(如:2016年天津卷理20题)
- ②构造函数新函数选取(如:2017年天津卷理20题)
- ③函数的恒成立与能成立(如:2015年天津卷理第20题)



### 易错点

- ①一个函数或两个函数的恒成立能成立问题
- ②误解导数值的符号与函数单调性的关系(如:2016年天津卷理第20题)

## 一、零点与极值最值问题

### 你先试试看

1 设  $k \in \mathbf{R}$ ，函数  $f(x) = \ln x - kx$ 。

(1) 若  $k = 2$ ，求曲线  $y = f(x)$  在  $x = 1$  处的切线方程。

(2)  $f(x)$  无零点，求实数  $k$  的取值范围。

(3) 若  $f(x)$  有两个相异零点  $x_1, x_2$ ，求证： $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$ 。

解析：

(1) 函数的定义域为  $(0, +\infty)$  ,  $f'(x) = \frac{1-kx}{x}$  ,

-----1分

当  $k=2$  时,  $f'(1) = 1-2 = -1$  , 则切线方程为  $y - (-2) = -(x-1)$  , 即  $x+y+1=0$  .

-----4分

(2) ①若  $k < 0$  时, 则  $f'(x) > 0$  ,  $f(x)$  是区间  $(0, +\infty)$  上的增函数 ,

$\therefore f(1) = -k > 0$  ,  $f(e^k) = k - ke^k = k(1 - e^k) < 0$  ,

$\therefore f(1) \cdot f(e^k) < 0$  , 函数  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  有唯一零点 ;

-----6分

① 若  $k=0$   $f(x) = \ln x$  有唯一零点  $x=1$  ;

② 若  $k > 0$  , 令  $f'(x) = 0$  , 得  $x = \frac{1}{k}$  ,

在区间  $(0, \frac{1}{k})$  上,  $f'(x) > 0$  , 函数  $f(x)$  是增函数 ;

在区间  $(\frac{1}{k}, +\infty)$  上,  $f'(x) < 0$  , 函数  $f(x)$  是减函数 ;

故在区间  $(0, +\infty)$  上,  $f(x)$  的极大值为  $f(\frac{1}{k}) = -\ln k - 1$  ,

由于  $f(x)$  无零点, 须使  $f(\frac{1}{k}) = -\ln k - 1 < 0$  , 解得  $k > \frac{1}{e}$  ,

故所求实数  $k$  的取值范围是  $(\frac{1}{e}, +\infty)$  .

-----10分

(3) 设  $f(x)$  的两个相异零点为  $x_1, x_2$  , 设  $x_1 > x_2 > 0$  ,

$\therefore f(x_1) = 0$  ,  $f(x_2) = 0$  ,  $\therefore \ln x_1 - kx_1 = 0$  ,  $\ln x_2 - kx_2 = 0$  ,

$\therefore \ln x_1 - \ln x_2 = k(x_1 - x_2)$  ,  $\ln x_1 + \ln x_2 = k(x_1 + x_2)$  ,

$\therefore x_1 x_2 > e^2$  , 故  $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$  , 故  $k(x_1 + x_2) > 2$  ,

即  $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} > \frac{2}{x_1 + x_2}$  , 即  $\ln \frac{x_1}{x_2} > \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2}$  ,

-----12分

设  $t = \frac{x_1}{x_2} > 1$  , 上式转化为  $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1} (t > 1)$  ,

设  $g(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}$  ,

$\therefore g'(t) = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0$  ,

$\therefore g(t)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增 ,

$\therefore g(t) > g(1) = 0$  ,  $\therefore \ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$  ,

$\therefore \ln x_1 + \ln x_2 > 2$  .

-----14分

听我慢慢讲

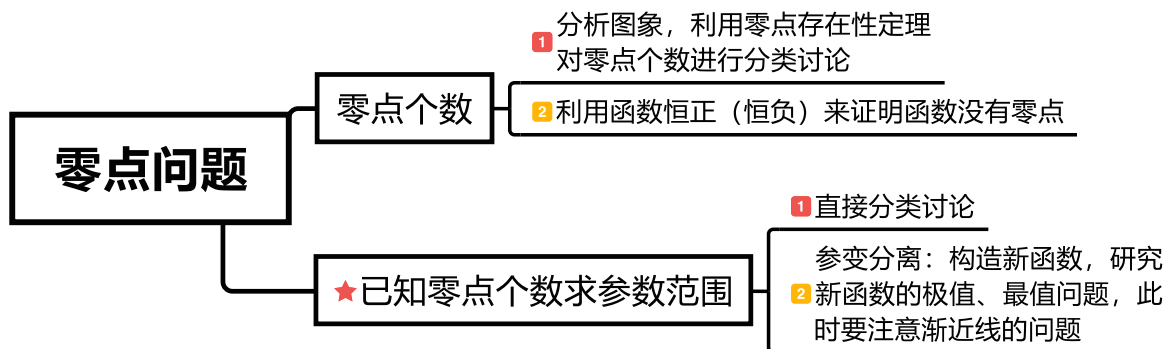
2 设函数  $f(x) = x^2 - (a-2)x - a \ln x$  .

(1) 求函数  $f(x)$  的单调区间 .

(2) 若函数有两个零点, 求满足条件的最小正整数  $a$  的值 .

(3) 若方程  $f(x) = c$  有两个不相等的实数根  $x_1, x_2$ , 求证:  $f' \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right) > 0$  .

导图总结



你再试试看

3 设函数  $f(x) = x - \frac{1}{x} - a \ln x (a \in \mathbf{R})$ .

(1) 当  $a = 2$  时, 求  $f(x)$  的单调区间.

(2) 若  $f(x)$  有两个极值点  $x_1$  和  $x_2$ , 记过点  $A(x_1, f(x_1))$ ,  $B(x_2, f(x_2))$  的直线的斜率为  $k$ , 问:

是否存在  $a$ , 使得  $k = 2 - a$ ? 若存在, 求出  $a$  的值, 若不存在, 请说明理由.

(3) 证明:  $\sum_{k=2}^n \ln \frac{k-1}{k+1} > \frac{2-n-n^2}{\sqrt{2n(n+1)}} (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2)$ .



题型通解

① 利用导数的几何意义, 先求导;

② 利用导数与单调性的关系, 判断在定义域内导数的正负;

③ 有两个极值, 可得  $x_1 \cdot x_2 = 1$ , 过两个点的斜率为  $k = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ , 全部用  $x_1, x_2$  表示, 结合已知条件得  $\ln x_1 - \ln x_2 = x_1 - x_2$ ;

④ 设  $0 < x_1 < 1, x_2 > 1$ , 转化成含一个未知数的函数, 利用单调性求最值判断结果不成立.

4 已知函数  $f(x) = ax^3 + x^2 - ax$  , 其中  $a \in \mathbf{R}$  且  $a \neq 0$  .

(1) 当  $a = 1$  时, 求函数  $f(x)$  的极值 .

(2) 求函数  $g(x) = \frac{f(x)}{x} - \frac{3}{a} \ln x$  的单调区间 .

(3) 若存在  $a \in (-\infty, -1]$  , 使函数  $h(x) = f(x) + f'(x)$  ,  $x \in [-1, b] (b > -1)$  在  $x = -1$  处取得最小值, 试求  $b$  的最大值 .

## 二、恒能成立问题

### 你先试试看

5 已知函数  $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2ax^2 - 3x (a \in \mathbf{R})$  .

- (1) 当  $a = 0$  时, 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(3, f(3))$  处的切线方程 .
- (2) 当  $a > 0$  时, 试讨论函数  $y = f(x)$  在区间  $(-1, 1)$  内的极值点的个数 .
- (3) 对一切  $x \in (0, +\infty)$ ,  $af'(x) + 4a^2x \geq \ln x - 3a - 1$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围 .

解析：

(1) 当  $a = 0$  时,  $y = f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x$ ,

$f'(x) = 2x^2 - 3$ ,

-----1分

$\therefore f'(3) = 15$ ,

$f(3) = 9$ ,

$\therefore$  曲线  $y = f(x)$  在点  $(3, f(3))$  处的切线方程为  $y - 9 = 15(x - 3)$ , 化为  $15x - y - 36 = 0$ .

-----4分

(2) 当  $a > 0$  时,  $f'(x) = 2x^2 - 4ax - 3$ ,  $\Delta = 16a^2 + 24 > 0$ ,

由  $f'(x) = 0$ , 解得  $x = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 + 6}}{2}$ .  $x_1 = \frac{2a - \sqrt{4a^2 + 6}}{2} < 0$ ,  $x_2 = \frac{2a + \sqrt{4a^2 + 6}}{2} > 1$ .

-----6分

由  $x_1 > -1$ , 解得  $a > \frac{1}{4}$ .

因此, 当  $a > \frac{1}{4}$  时, 由  $f'(x) = 0$ , 解得  $x = x_1$ ,

$\therefore$  当  $a > \frac{1}{4}$  时, 当  $x \in (-1, x_1)$  时,  $f'(x) > 0$ , 此时函数  $f(x)$  单调递增; 当  $x \in (x_1, 0)$  时,  $f'(x) < 0$ , 此时函数  $f(x)$  单调递减.

此时函数  $f(x)$  取得极大值, 只有一个.

当  $0 < a \leq \frac{1}{4}$  时,  $f'(x) \leq 0$ , 此时函数  $f(x)$  在区间  $(-1, 1)$  内单调递减, 无极值点.

综上所述: 当  $a > \frac{1}{4}$  时, 此时函数  $f(x)$  在区间  $(-1, 1)$  内取得一个极大值.

当  $0 < a \leq \frac{1}{4}$  时,  $f(x)$  在区间  $(-1, 1)$  内无极值点.

-----10分

(3) 对一切  $x \in (0, +\infty)$ ,  $af'(x) + 4a^2x \geq \ln x - 3a - 1$  恒成立  $\Leftrightarrow a \geq \frac{\ln x - 1}{2x^2} (x > 0)$ .

-----11分

$$\text{令 } g(x) = \frac{\ln x - 1}{2x^2}, x > 0, g'(x) = \frac{3 - 2\ln x}{2x^3},$$

令  $g'(x) > 0$ , 解得  $0 < x < e^{\frac{3}{2}}$ , 此时函数  $g(x)$  单调递增; 令  $g'(x) < 0$ , 解得  $x > e^{\frac{3}{2}}$ , 此时函数  $g(x)$  单调递减.

$$\therefore \text{当 } x = e^{\frac{3}{2}} \text{ 时, 函数 } g(x) \text{ 取得最大值, } g(x)_{\max} = \frac{\frac{3}{2} - 1}{2e^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4e^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\therefore a \geq \frac{1}{4e^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\therefore \text{实数 } a \text{ 的取值范围是 } \left[ \frac{1}{4e^{\frac{3}{2}}}, +\infty \right).$$

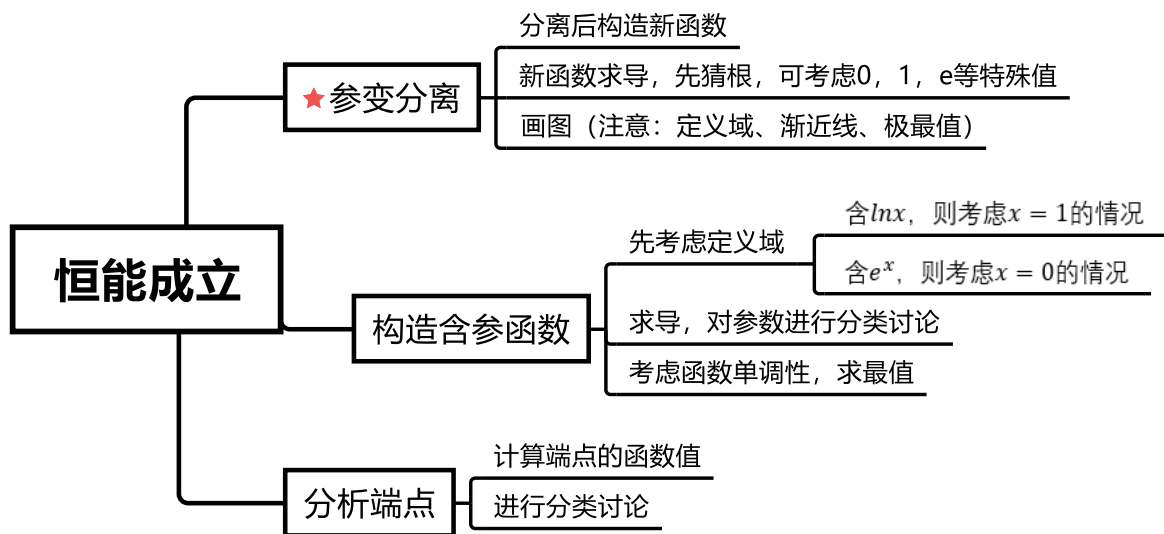
-----14分

听我慢慢讲

6 已知函数  $f(x) = a^2x^3 - 3ax^2 + 2$ ,  $g(x) = -3ax + 3$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , 其中  $a > 0$ .

- (1) 若  $a = 1$ , 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程.
- (2) 求函数  $f(x)$  在区间  $(-1, 1)$  上的极值.
- (3) 若  $\exists x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ , 使不等式  $f(x_0) > g(x_0)$  成立, 求  $a$  的取值范围.

导图总结



你再试试看

7 已知函数  $f(x) = a \left( x - \frac{1}{x} \right) - \ln x$  .

(1) 若  $a = 1$  , 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程 .

(2) 若函数  $f(x)$  在其定义域内为增函数 , 求  $a$  的取值范围 .

(3) 在 (II) 的条件下 , 设函数  $g(x) = \frac{e}{x}$  , 若在  $[1, e]$  上至少存在一点  $x_0$  , 使得  $f(x_0) \geq g(x_0)$  成立 , 求实数  $a$  的取值范围 .



题型通解

①构造函数  $h(x) = f(x) - g(x)$ , 由题意得,  $h(x)_{\max} \geq 0$ ;

②通过  $f(x), g(x)$  的增减性可知, 在  $x = e$  处,  $f(x)$  取最大值,  $g(x)$  取最小值, 此时,  $h(x)$  取最大值.

注意: 遇到这种情况通常需要挪到一边构造新函数去求最值, 两边分别求最值比较不太准确, 有少数题目可以, 大部分题目不行;

③因此遇见题目优先构造新函数求最值, 如果发现构造的新函数不好讨论, 可以试试分别求最值.

8 已知函数  $f(x) = x \ln x$ ,  $g(x) = -x^2 + ax - 3$ .

- (1) 求函数  $f(x)$  在  $[t, t+2]$  ( $t > 0$ ) 上的最小值.
- (2) 对一切  $x \in (0, +\infty)$ ,  $2f(x) \geq g(x)$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.
- (3) 探讨函数  $F(x) = \ln x - \frac{1}{e^x} + \frac{2}{ex}$  是否存在零点? 若存在, 求出函数  $F(x)$  的零点, 若不存在, 请说明理由.



### 题型通解

方法一: 由(1)知  $x \ln x \geq -\frac{1}{e}$ ,  $\ln x \geq -\frac{1}{ex}$ , 则可转化  $F(x) \geq -\frac{1}{ex} - \frac{1}{e^x} + \frac{2}{ex} = \frac{1}{x}(\frac{1}{e} - \frac{x}{e^x})$ , 由单调性判断  $F(x) > 0$ , 可得不存在零点.

方法二: 由(1)知  $x \ln x \geq -\frac{1}{e}$ , 将函数转化成  $x \ln x = \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e}$ , 设  $h(x) = \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e}$ ,

$h(x)_{max} = h(1) = -\frac{1}{e}$ , 但两个函数在不同位置取到最值, 故可得无零点.

### 三、试炼之地

9 已知函数  $f(x) = ax^2 - (2a+1)x + \ln x, a \in \mathbf{R}$  .

(1) 当  $a = 1$  时,求  $f(x)$  的单调区间和极值 .

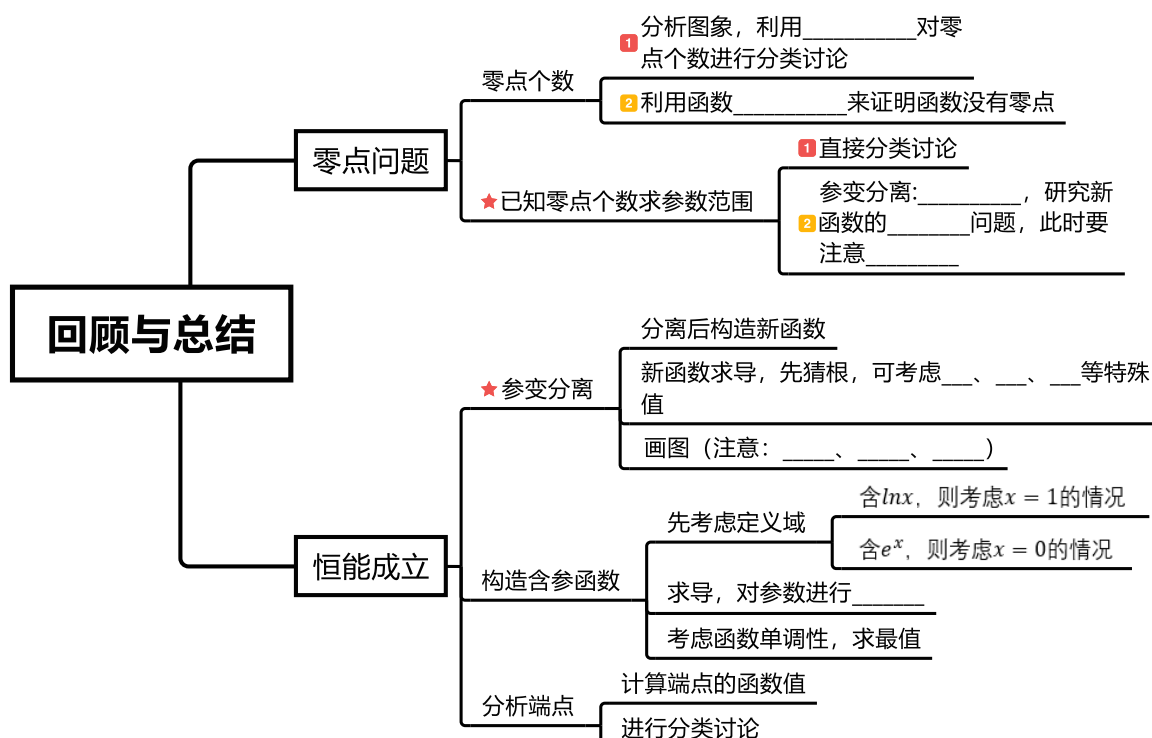
(2) 若关于  $x$  的方程  $f(x) = 2ax^2 - 2(a+1)x$  恰有两个不等的实根,求实数  $a$  的取值范围 .

(3) 设  $g(x) = e^x - x - 1$ ,若对任意的  $x_1 \in (0, +\infty), x_2 \in \mathbf{R}$ , 不等式  $f(x_1) \leq g(x_2)$  恒成立,求实数  $a$  的取值范围 .

10 设函数  $f(x) = ae^x(x+1)$  (其中  $e = 2.71828\cdots$ ) ,  $g(x) = x^2 + bx + 2$  , 已知它们在  $x = 0$  处有相同的切线 .

- (1) 求函数  $f(x)$  ,  $g(x)$  的解析式 .
- (2) 求函数  $f(x)$  在  $[t, t+1]$  ( $t > -3$ ) 上的最小值 .
- (3) 若对  $\forall x \geq -2$  ,  $kf(x) \geq g(x)$  恒成立 , 求实数  $k$  的取值范围 .

## 思维大导图



## 易错总结

- ①一个函数或两个函数的恒成立能成立问题
- ②误解导数值的符号与函数单调性的关系

小憩一下

### 牛顿与莱布尼兹

我们的积分公式，又名牛顿——莱布尼兹公式，今天的小憩一下，就来给大家讲讲这二位不得不说的故事。

在数学史上，没有比研究牛顿和莱布尼兹的故事更有趣的事了。

17世纪中叶，两位数学巨人相继登上历史舞台。

1642年，上帝说：降生牛顿，于是世界充满光明。

4年后，莱布尼兹哭哭啼啼来到了这个世界。

牛顿家里很穷，出生两个月父亲去世；莱布尼兹家很富，6岁父亲与世长辞。

牛顿是农民出身；莱布尼兹是哲学教授之子。

牛顿不是神童；莱布尼兹是天才。

牛顿17岁险些成为科学史上最可惜的辍学案例；莱布尼兹17岁已斩获学士学位。

19岁牛顿考入剑桥；18岁莱布尼兹已拿下硕士学位。

20岁的莱布尼兹荣升博士；这年，在剑桥的牛顿默默无闻，埋头苦读。

虽然莱布尼兹迟到4年；1661年他们却是同时步入大学。

相比20岁就已经获得博士学位的莱布尼兹。

25岁才获得硕士学位的牛顿的一生比莱布尼兹坎坷万分。

这或许也注定了其功绩胜之万分；因为就在伦敦鼠疫避灾那年。

上帝向23岁的牛顿扔下了一粒苹果，牛顿痛并快乐着。

26岁莱布尼兹结识惠更斯等知名学者开启了高速学术研究模式。

同是26岁那年，巴罗主动请缨充当伯乐让位牛顿。

牛顿创立微积分早莱布尼兹10年；莱布尼兹发表微积分著作早牛顿3年。

自莱布尼兹发表微积分后，一条界线将科学从中划开。

因两人微积分的创立优先权之争，欧洲科学家分立为两派，甚至擦出了英德的政治火花。

两人在著作权争论中痛苦的度过了余生。

70岁那年，莱布尼兹先逝。

11年后，英国领袖们争相恐后抬起牛顿灵柩，一位伟人离我们而去。

两人一样，不舍昼夜，两人一样，功勋卓著，两人一样，终生未娶。

——致两位数学界的神话