

导数与数列综合

1 已知函数 $f(x) = \frac{k \ln x}{x}$, $g(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

(1) 若不等式 $f(x) \leq g(x)$ 对于任意的 $x > 0$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

(2) 证明: $\frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \cdots + \frac{\ln n}{n^2} < \frac{2n^2 - n - 1}{4(n+1)} (n \in \mathbf{N}_+, n \geq 2)$.

答案

(1) $k = 1$.

(2) 证明见解析.

解析

(1) $\because x > 0$,

$\therefore f(x) \leq g(x)$ 等价于 $k \ln x \leq x - 1$.

令 $h(x) = k \ln x - x + 1$, 即 $h(x) \leq 0$ 对任意 $x > 0$ 恒成立.

$h'(x) = \frac{k}{x} - 1$, 又 $h(1) = 0$,

$\therefore h(x) \leq h(1)$.

$\therefore h(x)$ 在 $x = 1$ 时取得最大值,

$\therefore$ 当 $0 < x < 1$ 时, $h(x)$ 单调递增.

当 $x > 1$ 时 $h(x)$ 单调递减.

$\therefore$ 当 $h'(x) = 0$ 时, $x = 1$, 即 $k = 1$.

综上, $k = 1$.

(2) 由 (1) 可知: $\frac{\ln x}{x} \leq 1 - \frac{1}{x}$ (当且仅当 $x = 1$ 取等号).

则 $\frac{1 + \ln x}{x} \leq 1 \Rightarrow \frac{\ln x}{x} < 1 - \frac{1}{x}$ (当且仅当 $x = 1$ 取等号).

令 $x = n^2 (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2)$, 即 $\frac{\ln n^2}{n^2} < 1 - \frac{1}{n^2}$,

则有 $\frac{\ln 2^2}{2^2} + \frac{\ln 3^2}{3^2} + \cdots + \frac{\ln n^2}{n^2}$

$< \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

$= (n-1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)$

$< (n-1) - \left(\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right)$

$= (n-1) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$= n - \frac{3}{2} + \frac{1}{n+1}$.

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\ln 2^2}{2^2} + \frac{\ln 3^2}{3^2} + \cdots + \frac{\ln n^2}{n^2} &= 2 \left(\frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \cdots + \frac{\ln n}{n^2} \right) < n - \frac{3}{2} + \frac{1}{n+1} . \\ \therefore \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \frac{\ln n}{n^2} &< \frac{1}{2} \left(n - \frac{3}{2} + \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2n^2 - n - 1}{4(n+1)} . \end{aligned}$$

2 已知函数 $f(x) = a \ln x + bx (a, b \in \mathbf{R})$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $x - 2y - 2 = 0$.

- (1) 求 a, b 的值 .
- (2) 当 $x > 1$ 时, $f(x) + \frac{k}{x} < 0$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围 .
- (3) 证明: 当 $n \in \mathbf{N}^*$, 且 $n \geq 2$ 时, $\frac{2}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \cdots + \frac{1}{n \ln n} > \frac{3n^2 - n - 2}{2n^2 + 2n}$.

答案

- (1) 见解析 .
- (2) 见解析 .
- (3) 见解析 .

解析

- (1) $\because f(x) = a \ln x + bx$,
 $\therefore f'(x) = \frac{a}{x} + b$.
 $\because$ 直线 $x - 2y - 2 = 0$ 的斜率为 0.5 , 且过点 $(1, -0.5)$,
 $\therefore f(1) = -0.5, f'(1) = 0.5$,
 解得 $a = 1, b = -0.5$.
- (2) 由 (1) 得 $f(x) = \ln x - 0.5x$.
 当 $x > 1$ 时, $f(x) + \frac{k}{x} < 0$ 恒成立, 等价于 $k < 0.5x^2 - x \ln x$.
 令 $g(x) = 0.5x^2 - x \ln x$, 则 $g'(x) = x - 1 - \ln x$.
 令 $h(x) = x - 1 - \ln x$, 则 $h'(x) = \frac{x-1}{x}$.
 当 $x > 1$ 时, $h'(x) > 0$, 函数 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增 ,
 故 $h(x) > h(1) = 0$,
 从而, 当 $x > 1$ 时, $g'(x) > 0$, 即函数 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增 ,
 故 $g(x) > g(1) = 0.5$.
 $\therefore k \leq 0.5$.
- (3) 证明: 由 (2) 得, 当 $x > 1$ 时, $\ln x - 0.5x + \frac{1}{2x} < 0$, 可化为 $x \ln x < \frac{x^2 - 1}{2}$,
 又 $x \ln x > 0$,
 从而, $\frac{1}{x \ln x} > \frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$.

把 $x = 2, \dots, n$ 分别代入上面不等式, 并相加得,

$$\frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \dots + \frac{1}{2n \ln n} > 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{3n^2 - n - 2}{2n^2 + 2n}$$

3 已知函数 $f(x) = ax \ln x - x + 1$ ($a \in \mathbf{R}$), 且 $f(x) \geq 0$.

(1) 求 a .

(2) 求证: 当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时 $\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \frac{1}{n^2+3} + \dots + \frac{1}{4n^2} < 2 \ln 2$.

答案

(1) 1.

(2) 证明见解析.

解析

(1) $\because f(x) = ax \ln x - x + 1$ ($a \in \mathbf{R}, x > 0$),

$$\therefore f'(x) = a(1 + \ln x) - 1 \quad (a \in \mathbf{R}, x > 0),$$

$\because f(1) = 0$, 且 $f(x) \geq 0$ 恒成立,

$$\therefore f'(1) = a - 1 = 0, \quad a = 1.$$

又 $\because$ 当 $a = 1$ 时, $f'(x) = \ln x$ ($x > 0$), 令 $f'(x) > 0$ 得, $x > 1$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $f(x) \geq f(1) = 0$, 符合题意,

$\therefore$ 实数 a 的值为 1.

(2) $\because$ 由 (1) 得, $\forall x > 0$ 且 $x \neq 1$, $x \ln x - x + 1 > 0$,

$$\therefore \ln x > 1 - \frac{1}{x} \quad (x > 0, x \neq 1)$$

$$\therefore \forall n \in \mathbf{N}^*, k \in \mathbf{N}^*, \frac{n^2 + k}{n^2 + (k-1)} > 1,$$

$$\text{此时必有 } \ln \frac{n^2 + k}{n^2 + (k-1)} > 1 - \frac{n^2 + (k-1)}{n^2 + k} = \frac{1}{n^2 + k},$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{3n^2} \ln \frac{n^2 + k}{n^2 + (k-1)} > \sum_{k=1}^{3n^2} \frac{1}{n^2 + k} \quad (n \in \mathbf{N}^*, k \in \mathbf{N}^*)$$

$\therefore$

$$\ln \frac{n^2+1}{n^2} + \ln \frac{n^2+2}{n^2+1} + \ln \frac{n^2+3}{n^2+2} + \dots + \ln \frac{4n^2}{4n^2-1} > \frac{1}{n^2-1} + \frac{1}{n^2+2} + \frac{1}{n^2+3} + \dots + \frac{1}{4n^2} \quad (n \in \mathbf{N}^*)$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} & \ln \frac{n^2+1}{n^2} + \ln \frac{n^2+2}{n^2+1} + \ln \frac{n^2+3}{n^2+2} + \cdots + \ln \frac{4n^2}{4n^2-1} = \ln \\ & \left(\frac{n^2+1}{n^2} \cdot \frac{n^2+2}{n^2+1} \cdot \frac{n^2+3}{n^2+2} \cdots \frac{4n^2}{4n^2-1} \right) = \ln \frac{4n^2}{n^2} = \ln 4 = 2 \ln 2 \\ & \therefore 2 \ln 2 > \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \frac{1}{n^2+3} + \cdots + \frac{1}{4n^2} (n \in \mathbf{N}^*), \text{证毕.} \end{aligned}$$

4 已知函数 $f(x) = ax - \ln x$ (a 是常数, 且 $a > 0$).

- (1) 求函数 $f(x)$ 的最值.
- (2) 若函数 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值, 且关于 x 的方程 $f(x) + 2x = x^2 + b$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上恰有两个不相等的实数根, 求实数 b 的取值范围.
- (3) 求证: 当 $n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$ 时, $\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < e$.

答案

(1) 当 $a \leq 0$ 时, 无最值.

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $1 + \ln a$.

(2) $\left[\frac{5}{4} + \ln 2, 2\right]$.

(3) 证明见解析.

解析

(1) $\because f(x) = ax - \ln x$,

$$\therefore f'(x) = a - \frac{1}{x} (x > 0).$$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 无最值.

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 则 $x = \frac{1}{a}$.

当 $x \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$ 时, $f'(x) < 0$,

当 $x \in \left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$.

$\therefore f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增.

$\therefore$ 当 $x = \frac{1}{a}$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $f\left(\frac{1}{a}\right)$.

$$\text{即 } f\left(\frac{1}{a}\right) = a \cdot \frac{1}{a} - \ln \frac{1}{a} = 1 + \ln a.$$

(2) $\because$ 函数 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值,

$$\therefore f'(1) = 0.$$

$$\therefore a - 1 = 0,$$

$$\therefore a = 1,$$

$$\therefore f(x) = x - \ln x.$$

关于 x 的方程 $f(x) + 2x = x^2 + b$ 化为

$$x^2 - 3x + \ln x + b = 0,$$

$$\text{令 } g(x) = x^2 - 3x + \ln x + b \left(x \in \left[\frac{1}{2}, 2 \right] \right).$$

$$\therefore g'(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x} = \frac{(2x-1)(x-1)}{x}$$

$$\text{令 } g'(x) = 0, \text{ 则 } x = \frac{1}{2} \text{ 或 } x = 1.$$

$$\therefore \text{当 } x \in (1, 2) \text{ 时}, g'(x) > 0, \text{ 当 } x \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right) \text{ 时}, g'(x) < 0.$$

$$\therefore g(x) \text{ 在 } \left(\frac{1}{2}, 1 \right) \text{ 上单调递减, 在 } (1, 2) \text{ 上单调递增.}$$

$\therefore g(x) = 0$ 有两个不相等的实数根, 即

$$\begin{cases} g\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0 \\ g(1) < 0 \\ g(2) \geq 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} b - \frac{5}{4} - \ln 2 \geq 0 \\ b - 2 < 0 \\ b - 2 + \ln 2 \geq 0 \end{cases}.$$

$$\therefore \frac{5}{4} + \ln 2 \leq b < 2,$$

$$\therefore \text{实数 } b \text{ 的取值范围为 } \left[\frac{5}{4} + \ln 2, 2 \right).$$

(3) 由(1)和(2)可知, 当 $a = 1$ 时, $f(x) \geq f(1)$,

$$\text{即 } \ln x \leq x - 1.$$

$$\therefore \text{当 } x > 1 \text{ 时}, \ln x < x - 1.$$

$$\text{令 } x = 1 + \frac{1}{n^2}, \quad (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*),$$

$$\therefore \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < \frac{1}{n^2}.$$

$$\therefore \ln\left[\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$< \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$= 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

$$\therefore \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < e \text{ 得证.}$$

5 已知函数 $f(x) = ax + \frac{b}{x} + c$ 的图像在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = x - 1$.

(1) 用 a 表示 b, c .

(2) 若 $f(x) \geq \ln x$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 求 a 的取值范围.

(3) 证明: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) + \frac{n}{2(n+1)} \quad (n \geq 1)$.

答案

(1) $b = a - 1; c = 1 - 2a$.

(2) $a \geq 0.5$.

(3) 证明见解析

解析

(1) 略

(2) 略

(3) 在 $n \geq 1$ 时, 构造函数法证明. 注意到

$$\ln(n+1) = \ln\left[\frac{n+1}{n}\right] + \ln\left[\frac{n}{n-1}\right] + \cdots + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{2}{1},$$

$$\text{而 } \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right],$$

于是根据要证明的表达式, 两边取通项 ($x = \frac{1}{n}$)

$$\text{构造函数 } f(x) = x - \ln(1+x) - \frac{1}{2}\left[x - \frac{x}{x+1}\right], \quad x > 0,$$

$$\text{求导易得 } f'(x) = \frac{x^2}{2(x+1)^2} > 0, \quad x > 0,$$

于是 $f(x)$ 在 $x > 0$ 上单调递增,

又 $f(x)$ 可在 $x = 0$ 处连续,

则 $f(x) > f(0) = 0, \quad x > 0$ 得

$$x - \ln(1+x) - \frac{1}{2}\left[x - \frac{x}{x+1}\right] > 0,$$

$$\text{即 } x > \ln(1+x) + \frac{1}{2}\left[x - \frac{x}{x+1}\right], \quad x > 0,$$

再取 $\frac{1}{n} (> 0)$ 替换 x 有

$$\frac{1}{n} > \ln\left[\frac{n+1}{n}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right],$$

将此不等式式中的 n 依次从 1 取到 n ,

$$\begin{aligned} & \text{累加得 } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \\ & > \left\{ \ln\left[\frac{n+1}{n}\right] + \ln\left[\frac{n}{n-1}\right] + \cdots + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{2}{1} \right\} \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] \right\} \\ & = \ln(n+1) + \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{n+1}\right] \\ & = \ln(n+1) + \frac{n}{2(n+1)}, \end{aligned}$$

$$\text{即 } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) + \frac{n}{2(n+1)} \quad (n \geq 1).$$

命题得证.

6 已知 $f(x) = \ln x - x - \frac{a}{x}$, 其中 a 为实数.

- (1) 设 $a = 2$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.
- (2) 当 $x \geq 1$ 时, $f(x) \leq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.
- (3) 当 $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 2$ 时, 证明: $\frac{\ln 2}{3} \cdot \frac{\ln 3}{4} \cdots \frac{\ln n}{n+1} < \frac{1}{n}$.

答案

- (1) $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递增, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减.
- (2) $a \geq -1$.
- (3) 证明见解析.

解析

- (1) 当 $a = 2$ 时, $f(x) = \ln x - x - \frac{2}{x}$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 + \frac{2}{x^2} = \frac{-x^2 + x + 2}{x^2} = \frac{-(x-2)(x+1)}{x^2}, \quad x > 0.$$
 令 $f'(x) > 0$ 得 $0 < x < 2$, 令 $f'(x) < 0$ 得 $x > 2$,
 $\therefore f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递增, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减.
- (2) 由 $f(x) = \ln x - x - \frac{a}{x} \leq 0$, 对任意 $x \geq 1$ 恒成立,
 等价于 $a \geq [x \ln x - x^2]_{\max}$,
 设 $k(x) = x \ln x - x^2 \quad (x \geq 1)$,
 $k'(x) = 1 + \ln x - 2x$,
 $[k'(x)]' = \frac{1}{x} - 2 < 0$,
 $k'(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减,
 $k'(x) \leq k'(1) = -1 < 0$,
 $k(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减,
 所以 $k(x)$ 的最大值为 $k(1) = -1$,
 所以 $a \geq -1$.
- (3) 由 (2) 知当 $a = -1$ 时, $x \geq 1$ 时,
 $\ln x \leq x - \frac{1}{x}$ 恒成立,
 所以 $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 2$ 时, 有

$$\ln n < n - \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{\ln n}{n+1} < \frac{n-1}{n},$$

所以

$$\frac{\ln 2}{3} < \frac{1}{2}, \frac{\ln 3}{4} < \frac{2}{3}, \dots, \frac{\ln n}{n+1} < \frac{n-1}{n}, \text{ 相乘得}$$

$$\frac{\ln 2}{3} \cdot \frac{\ln 3}{4} \cdots \frac{\ln n}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

7 若函数 $f(x) = e^x - ax - 1$ ($a > 0$) 在 $x = 0$ 处取极值.

(1) 求 a 的值, 并判断该极值是函数的最大值还是最小值.

(2) 证明: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

答案

(1) $a = 1$, 极值 $f(0)$ 是函数最小值.

(2) 证明见解析.

解析

(1) 因为 $x = 0$ 是函数极值点, 所以 $f'(0) = 0$,

所以 $a = 1$, $f(x) = e^x - x - 1$, 易知 $f'(x) = e^x - 1$.

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) < 0$,

故极值 $f(0)$ 是函数最小值.

(2) 由 (1) 知 $e^x \geq x + 1$.

即 $\ln(x+1) \leq x$, 当且仅当 $x = 0$ 时, 等号成立,

令 $x = \frac{1}{k}$ ($k \in \mathbf{N}^*$), 则 $\frac{1}{k} > \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$, 即 $\frac{1}{k} > \ln \frac{1+k}{k}$,

所以 $\frac{1}{k} > \ln(1+k) - \ln k$ ($k = 1, 2, \dots, n$),

累加得 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

8 已知函数 $f(x) = (x+1)\ln x$, $g(x) = a(x-1)$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 若 $f(x) \geq g(x)$ 对任意的 $x \in [1, +\infty)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

(3) 求证: $\ln 2 \cdot \ln 3 \cdots \ln n > \frac{2^n}{n(n+1)}$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^+$).

答案

(1) $f(x)$ 的递增区间为 $(0, +\infty)$, 无递减区间.

(2) a 的取值范围为 $(-\infty, 2]$.

(3) 证明见解析 .

解析

(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 1$,

$$\text{设 } g(x) = f'(x) , g'(x) = \frac{x-1}{x^2} ,$$

令 $g'(x) > 0$, 得 $x > 1$, $g'(x) < 0$, 得 $0 < x < 1$

$\therefore g(x)$ 在 $(0, 1)$ 递减 , 在 $(1, +\infty)$ 递增 , $g(x)_{\min} = g(1) = 2$,

$\therefore f'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立 ,

$\therefore f(x)$ 的递增区间为 $(0, +\infty)$, 无递减区间 .

(2) 设 $h(x) = (x-1)\ln x - ax + a$,

$$\text{由(1)知 : } h'(x) = \ln x + \frac{1}{x} = 1 - a = g(x) - a ,$$

$g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 递增 ,

$$g(x) \geq g(1) = 2 ,$$

① 当 $a < 2$ 时 , $h'(x) \geq 0$, $h(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 递增 ,

$\therefore h(x) \geq h(1) = 0$, 满足题意 ;

$$\text{② 当 } a > 2 \text{ 时 , 设 } \omega(x) = h'(x) , \omega'(x) = \frac{x-1}{x^2} ,$$

当 $x \geq 1$ 时 , $\omega'(x) \geq 0$, $\therefore$

$\omega(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 递增 ,

$$\omega(1) = 2 - a < 0 , \omega(e^n) = 1 + e^{-a} > 0 ,$$

$\therefore \exists x_0 \in (1, e^n)$, 使 $\omega(x_0) = 0$,

$\therefore \omega(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 递增 ,

$\therefore x \in (1, x_0)$, $\omega(x) < 0$, 即 $h'(x) < 0$,

$\therefore$ 当 $x \in (1, x_0)$ 时 , $h(x) < h(1) = 0$, 不满足题意

综上 , a 的取值范围为 $(-\infty, 2]$.

(3) 由(2)知 , 令 $a = 2$, $(x+1)\ln x \geq 2(x-1)$,

$$\therefore x \geq 1 , \ln x \geq \frac{2(x-1)}{x+1} \text{ (当且仅当 } x=1 \text{ 取“=”)} ,$$

$$\text{令 } x = n (n \geq 2, n \in \mathbf{N}_+) \text{ 得 } \ln n > \frac{2(n-1)}{n+1} ,$$

$$\text{即 } \ln 2 > \frac{2-1}{3} , \ln 3 > \frac{2-2}{4} , \ln 4 > \frac{2-3}{5} ,$$

$$\ln(n-2) > \frac{2(n-3)}{n-1} , \ln(n-1) > \frac{2(n-2)}{n} , \ln n > \frac{2(n-2)}{n+1} ,$$

$$\text{将上述 } n-1 \text{ 个式子相乘得 } \ln 2 \cdot \ln 3 \cdots \ln n > \frac{2^{n+1} \cdot 2}{n} = \frac{2^n}{n(n+1)} ,$$

∴原命题得证.

9 已知 $f(x) = e^x - ax - 1 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 若 $f(x) \geq 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 求实数 a 范围.

(2) 求证: 对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, 都有

$$\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{n+1}\right)^{n+1} + \left(\frac{3}{n+1}\right)^{n+1} + \cdots + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} < 1.$$

答案

(1) $\{a | a = 1\}$.

(2) 证明见解析.

解析

(1) 易得 $f'(x) = e^x - a$,

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 对于 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增,

由 $f(-1) = \frac{1}{e} + a - 1 < 0$, 与题设矛盾;

当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) < 0$, 得 $x < \ln a$, 由 $f'(x) > 0$, 得 $x > \ln a$,

∴ $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 单调递增,

$$\therefore f(x)_{\min} = f(\ln a) = e^{\ln a} - a \ln a - 1$$

$$= a - a \ln a - 1 \geq 0 \text{ 对于 } a > 0 \text{ 恒成立.}$$

$$\text{令 } g(a) = a - a \ln a - 1 (a > 0),$$

$$\therefore g'(a) = 1 - (\ln a + 1) = -\ln a (a > 0),$$

由 $g'(a) > 0$, 得 $0 < a < 1$; 由 $g'(a) < 0$, 得 $a > 1$,

∴ $g(a)$ 在 $(0, 1)$ 单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 单调递减,

$$\therefore g(a)_{\max} = g(1) = 0,$$

∴ 只有 $a = 1$ 适合题意,

综上, a 的取值范围是 $\{a | a = 1\}$.

(2) 由 (1) 可知, $a = 1$ 时, $f(x) = e^x - x - 1 \geq 0$,

则 $x + 1 \leq e^x$,

$$\therefore (x+1)^{n+1} \leq e^{(n+1)x},$$

$$\text{令 } x+1 = \frac{k}{n+1} (k = 1, 2, 3, \dots, n),$$

$$\begin{aligned}
 & \text{则} \left(\frac{k}{n+1} \right)^{n+1} < \frac{e^k}{e^{n+1}} (k=1, 2, 3, \dots, n), \\
 & \therefore \left(\frac{1}{n+1} \right)^{n+1} + \left(\frac{2}{n+1} \right)^{n+1} + \left(\frac{3}{n+1} \right)^{n+1} + \dots \\
 & + \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} < \frac{1}{e^{n+1}} (e + e^2 + e^3 + \dots + e^n) \\
 & = \frac{1}{e^{n+1}} \cdot \frac{e(1-e^n)}{1-e} = \frac{e^{n+1}-e}{e^{n+1}(e-1)} = \frac{1-\frac{1}{e^n}}{e-1}, \\
 & \text{由} e + \frac{1}{e^n} > 2, \text{知} 1 - \frac{1}{e^n} < e-1, \text{则} \frac{1-\frac{1}{e^n}}{e-1} < 1, \\
 & \therefore \left(\frac{1}{n+1} \right)^{n+1} + \left(\frac{2}{n+1} \right)^{n+1} + \left(\frac{3}{n+1} \right)^{n+1} + \dots \\
 & + \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} < 1.
 \end{aligned}$$

10 已知函数 $f(x) = \ln(x-1) - k(x-1) + 1$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.
- (2) 若 $f(x) \leq 0$ 恒成立, 试确定实数 k 的取值范围.
- (3) 证明: $\frac{\ln 2}{3} + \frac{\ln 3}{4} + \frac{\ln 4}{5} + \dots + \frac{\ln n}{n+1} < \frac{n(n-1)}{4} (n \in \mathbf{N}^* \text{ 且 } n > 1)$.

答案

- (1) 当 $k \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是增函数;
当 $k > 0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(1, 1 + \frac{1}{k}\right)$ 上是增函数, 在 $\left(1 + \frac{1}{k}, +\infty\right)$ 上为减函数.
- (2) $[1, +\infty)$.
- (3) 证明见解析.

解析

- (1) $\because f(x) = \ln(x-1) - k(x-1) + 1$,
 $\therefore x > 1, f'(x) = \frac{1}{x-1} - k$,
 $\because x > 1$,
 $\therefore$ 当 $k \leq 0$ 时, $f'(x) = \frac{1}{x-1} - k > 0$, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是增函数;
当 $k > 0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(1, 1 + \frac{1}{k}\right)$ 上是增函数, 在 $\left(1 + \frac{1}{k}, +\infty\right)$ 上为减函数.
- (2) $\because f(x) \leq 0$ 恒成立,
 $\therefore \forall x > 1, \ln(x-1) - k(x-1) + 1 \leq 0$,
 $\therefore \forall x > 1, \ln(x-1) \leq k(x-1) - 1$,
 $\therefore k > 0$.

由(1)知, $f(x)_{\max} = f\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln \frac{1}{k} \leq 0$,

解得 $k \geq 1$, 故实数 k 的取值范围是 $[1, +\infty)$.

(3) 令 $k = 1$, 则由(2)知: $\ln(x-1) \leq x-2$ 对 $x \in (1, +\infty)$ 恒成立,

即 $\ln x \leq x-1$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

取 $x = n^2$, 则 $2\ln n \leq n^2 - 1$, 即 $\frac{\ln n}{n+1} \leq \frac{n-1}{2}$, $n \geq 2$,

$$\therefore \frac{\ln 2}{3} + \frac{\ln 3}{4} + \frac{\ln 4}{5} + \cdots + \frac{\ln n}{n+1} < \frac{n(n-1)}{4}$$

($n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n > 1$).

11 函数 $f(x) = \ln(x+1) + ax$ 的图象与直线 $y = 2x$ 相切.

(1) 求 a 的值.

(2) 证明: 对于任意正整数 n , $n^n \cdot e^{\frac{n}{n+1}} < \frac{(2n)!}{n!} < n^n \cdot e^{\frac{n+1}{2}}$.

答案

(1) $a = 1$.

(2) 证明见解析.

解析

(1) $f'(x) = \frac{1}{x+1} + a$.

设直线 $y = 2x$ 与曲线 $y = f(x)$ 相切于点 $P(x_0, y_0)$.

$$\text{依题意得: } \begin{cases} y_0 = 2x_0 \\ y_0 = \ln(x_0 + 1) + ax_0 \\ \frac{1}{x_0 + 1} + a = 2 \end{cases},$$

整理得, $\ln(x_0 + 1) - \frac{x_0}{x_0 + 1} = 0 \cdots \cdots (*)$,

令 $g(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$,

$$\therefore g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}.$$

$\therefore$ 当 $x > 0$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增;

当 $-1 < x < 0$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减.

当 $x = 0$ 时, $g(x)$ 取得最小值 $g(0) = 0$, 即 $g(x) \geq 0$.

故方程(*)的解为 $x_0 = 0$, 此时 $a = 1$.

(2) ①由(1)知, $g(x) \geq 0$, 即 $\ln(n+1) \geq \frac{n}{n+1}$,

因此 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}$, $\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) > \frac{2}{n+2} > \frac{1}{n+1}$, $\cdots$,

$$\ln\left(1 + \frac{n}{n}\right) > \frac{n}{n+n} > \frac{1}{n+1},$$

$$\text{上式累加得: } \ln \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right] > \frac{n}{n+1},$$

$$\therefore \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right) > e^{\frac{n}{n+1}},$$

$$\therefore \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}{n^n} > e^{\frac{n}{n+1}},$$

$$\therefore (n+1)(n+2)\cdots(n+n) > n^n \cdot e^{\frac{n}{n+1}},$$

$$\text{即 } \frac{(2n)!}{n!} > n^n \cdot e^{\frac{n}{n+1}},$$

$$\textcircled{2} \text{ 令 } h(x) = \ln(x+1) - x,$$

$$\text{则 } h'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1}.$$

$\therefore$ 当 $x > 0$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减;

当 $-1 < x < 0$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增.

当 $x = 0$ 时, $h(x)$ 取得最大值 $h(0) = 0$, 即 $h(x) \leq 0$, $\ln(x+1) \leq x$.

$$\text{由 } \ln(x+1) \leq x \text{ 得: } \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) < \frac{2}{n}, \dots, \ln\left(1 + \frac{n}{n}\right) < \frac{n}{n},$$

$$\text{上式累加得: } \ln \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right] < \frac{1+2+3+\cdots+n}{n} = \frac{n+1}{2},$$

$$\therefore \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right) < e^{\frac{n+1}{2}},$$

$$\therefore \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}{n^n} < e^{\frac{n+1}{2}},$$

$$\therefore (n+1)(n+2)\cdots(n+n) < n^n \cdot e^{\frac{n+1}{2}},$$

$$\text{即 } \frac{(2n)!}{n!} < n^n \cdot e^{\frac{n+1}{2}},$$

$$\text{综上, } n^n \cdot e^{\frac{n}{n+1}} < \frac{(2n)!}{n!} < n^n \cdot e^{\frac{n+1}{2}}.$$

12 函数 $f(x) = a(x+1) - 2\ln(x+1)$ (a 为常数, 且 $a > 0$) 在 $x = 1$ 处取得极值.

(1) 求实数 a 的值, 并求 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 关于 x 的方程 $f(x) + x^2 + b = 6x + 1 - 8\ln(x+1)$ 在 $[1, 2]$ 上恰有 1 个实数根, 求实数 b 的取值范围.

(3) 求证: 当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $\ln n < \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} + \frac{n-1}{2} (i \in \mathbf{N}^*)$.

答案

(1) $a = 1$, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(1, +\infty)$,

函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-1, 1)$.

(2) $6 - 6\ln 3 \leq b \leq 4 - 6\ln 2$.

(3) 证明见解析.

解析

$$(1) \quad x \in (-1, +\infty), f'(x) = a - \frac{2}{x+1},$$

由题意得, $f'(1) = 0$, 得 $a = 1$,

$$\text{当 } a = 1 \text{ 时, } f'(x) = \frac{x-1}{x+1},$$

令 $f'(x) > 0$, 得 $x > 1$,

令 $f'(x) < 0$, 得 $-1 < x < 1$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(1, +\infty)$,

函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-1, 1)$.

$$(2) \quad \text{关于 } x \text{ 的方程 } f(x) + x^2 + b = 6x + 1 - 8\ln(x+1),$$

$$\text{化简为 } x^2 - 5x + 6\ln(x+1) + b = 0,$$

$$\text{令 } g(x) = x^2 - 5x + 6\ln(x+1) + b,$$

$$g'(x) = 2x - 5 + \frac{6}{x+1} = \frac{(2x-1)(x-1)}{x+1},$$

$$\text{令 } g'(x) = 0, \text{ 解得 } x = \frac{1}{2} \text{ 或 } 1,$$

令 $g'(x) > 0$, 得 $x > 1$,

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增,

$\therefore$ 关于 x 的方程 $f(x) + x^2 + b = 6x + 1 - 8\ln(x+1)$ 在 $[1, 2]$ 上恰有 1 个实数根,

$$\text{则只需 } \begin{cases} g(1) \leq 0 \\ g(2) \geq 0 \end{cases},$$

$$\text{得 } 6 - 6\ln 3 \leq b \leq 4 - 6\ln 2.$$

$$(3) \quad \text{由 (1) 知, 当 } x \in (0, 1] \text{ 时, } f(x) \geq f(1) = 2 - 2\ln 2 > 0,$$

$$\text{即 } 2\ln(x+1) < x+1,$$

$$\text{当 } n \in \mathbf{N}^* \text{ 时, 令 } x = \frac{1}{n} \in (0, 1], \text{ 则 } 2\ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) < \frac{1}{n} + 1 \text{ 成立,}$$

$$\text{即 } \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} \text{ 成立,}$$

将 n 依次取 $1, 2, 3, 4, 5, \dots, n-1$,

$$\text{可得 } \ln n - \ln(n-1) < \frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2},$$

$$\ln(n-1) - \ln(n-2) < \frac{1}{2(n-2)} + \frac{1}{2}$$

.....

$$\ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2},$$

$$\ln 2 - \ln 1 < \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{2},$$

$$\text{累加求和得: } \ln n < \left(\frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2(n-2)} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 1} \right) + \frac{n-1}{2},$$

$$\text{即当 } n \in \mathbf{N}^* \text{ 时, } \ln n < \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} + \frac{n-1}{2} (i \in \mathbf{N}^*) \text{ 成立.}$$

13 函数 $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x}$, $h(x) = \frac{x}{x+1}$.

(1) 判断 $x > 0$ 时, $f(x) - h(x)$ 的零点个数, 并加以说明.

(2) 正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_n e^{-a_{n+1}} = f(a_n)$.

① 判断数列 $\{a_n\}$ 的单调性并加以证明.

② 证明: $\sum_{i=1}^{n+1} a_i < 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

答案

(1) $x > 0$ 时, $f(x) - h(x)$ 的零点个数为 0 个, 证明见解析.

(2) ① 数列 $\{a_n\}$ 为减数列, 证明见解析.

② 证明见解析.

解析

(1) 当 $x > 0$ 时, $f(x) - h(x) = 1 - \frac{1}{e^x} - \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{e^x - x - 1}{e^x(x+1)}$,

令 $\varphi(x) = e^x - x - 1$, 则 $\varphi'(x) = e^x - 1 > 0$,

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数.

所以 $\varphi(x) > \varphi(0) = 0$,

所以 $f(x) - h(x) = \frac{e^x - x - 1}{e^x(x+1)} > 0$.

所以 $f(x) - h(x)$ 的零点个数为 0 个.

(2) ① 数列 $\{a_n\}$ 为减数列, 证明如下:

因为 $a_1 = 1$, $a_n e^{-a_{n+1}} = f(a_n)$,

所以 $a_{n+1} = -\ln \frac{1 - e^{-a_n}}{a_n}$.

要证 $\{a_n\}$ 为减函数, 只需证 $a_{n+1} < a_n$,

所以 $-\ln \frac{1 - e^{-a_n}}{a_n} < a_n$,

只需证 $-\ln \frac{1 - e^{-x}}{x} < x (x > 0)$, $1 - e^{-x} > x e^{-x}$,

由 $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x} = 1 - e^{-x}$,

所以 $1 - e^{-x} > x e^{-x} = x [1 - (1 - e^{-x})]$,

即 $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x} = 1 - e^{-x} > h(x) = \frac{x}{x+1}$, 由 (1) 可知成立.

② 要证明: $\sum_{i=1}^{n+1} a_i < 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$, 由 $a_1 = 1$, 只需证 $a_{n+1} < \frac{1}{2^n}$, 只需证 $a_{n+1} < \frac{a_n}{2}$

,

由于 $a_1 = 1$, 此时 $a_{n+1} < \frac{a_n}{2} < \frac{a_{n-1}}{2^2} < \cdots < \frac{a_1}{2^n} = \frac{1}{2^n}$, 成立;

所以即证 $-\ln \frac{1-e^{-a_n}}{a_n} < \frac{a_n}{2}$, 即 $-\ln \frac{1-e^{-x}}{x} < \frac{x}{2}$,

而 $\frac{1-e^{-x}}{x} > e^{-\frac{x}{2}}$, $e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} > x (x > 0)$,

令 $m(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} - x (x > 0)$, 则 $m'(x) = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}) - 1 > 0$,

因此 $m(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $m(x) > m(0) = 0$, 于是 $e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} > x (x > 0)$ (成立),

所以原不等式 $\sum_{i=1}^{n+1} a_i < 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 成立.

14 已知函数 $f(x) = \ln(x-1) - k(x-1) + 1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 若 $f(x) \leq 0$ 恒成立, 试确定实数 k 的取值范围.

(3) 证明: $\frac{\ln 2}{3} + \frac{\ln 3}{4} + \frac{\ln 4}{5} + \cdots + \frac{\ln n}{n+1} < \frac{n(n-1)}{4} (n \in \mathbb{N}^* \text{ 且 } n > 1)$.

答案

- (1) 当 $k \leq 0$ 时, $f'(x) = \frac{1}{x-1} - k > 0$, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是增函数;
当 $k > 0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(1, 1 + \frac{1}{k}\right)$ 上是增函数, 在 $\left(1 + \frac{1}{k}, +\infty\right)$ 上为减函数.
- (2) $[1, +\infty)$.
- (3) 证明见解析.

解析

- (1) $\because f(x) = \ln(x-1) - k(x-1) + 1$,
 $\therefore x > 1, f'(x) = \frac{1}{x-1} - k$,
 $\because x > 1, \therefore$ 当 $k \leq 0$ 时, $f'(x) = \frac{1}{x-1} - k > 0$, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是增函数;
当 $k > 0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(1, 1 + \frac{1}{k}\right)$ 上是增函数, 在 $\left(1 + \frac{1}{k}, +\infty\right)$ 上为减函数.
- (2) $\because f(x) \leq 0$ 恒成立,
 $\therefore \forall x > 1, \ln(x-1) - k(x-1) + 1 \leq 0$,
 $\therefore \forall x > 1, \ln(x-1) \leq k(x-1) - 1$,
 $\therefore k > 0$.
由(1)知, $f(x)_{\max} = f\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln \frac{1}{k} \leq 0$,
解得 $k \geq 1$.
故实数 k 的取值范围是 $[1, +\infty)$.
- (3) 令 $k = 1$, 则由(2)知: $\ln(x-1) \leq x-2$ 对 $x \in (1, +\infty)$ 恒成立,

即 $\ln x \leq x - 1$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立.

取 $x = n^2$, 则 $2 \ln n \leq n^2 - 1$,

即 $\frac{\ln n}{n+1} \leq \frac{n-1}{2}, n \geq 2$,

$\therefore \frac{\ln 2}{3} + \frac{\ln 3}{4} + \frac{\ln 4}{5} + \cdots + \frac{\ln n}{n+1} < \frac{n(n-1)}{4} (n \in \mathbf{N}^* \text{ 且 } n > 1).$

15 已知函数 $f(x) = x \ln x - x + 1, g(x) = e^x - ax, a \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小值.

(2) 若 $g(x) \geq 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 求 a 的值.

(3) 求证: $\left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \left(\frac{3}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n < \frac{1}{e-1}$ 对一切大于 2 的正整数 n 都成立.

答案

(1) 0.

(2) 1.

(3) 证明见解析.

解析

(1) $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, 且 $f'(x) = \ln x$.

令 $f'(x) = 0$ 解得 $x = 1$.

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore f(x)_{\min} = f(1) = 0$.

(2) 由 $g(x) = e^x - ax$ 得 $g'(x) = e^x - a$.

当 $a \geq 0$ 时, $g'(x) \geq 0$ 恒成立, $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

又 $g(0) = 1$.

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时, $g(x) < g(0) = 1$, 不满足题意.

当 $a > 0$ 时, 令 $g'(x) > 0$, 得 $x > \ln a$, 令 $g'(x) < 0$, 得 $x < \ln a$.

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 单调递增.

$\therefore g(x)_{\min} = g(\ln a) = e^{\ln a} - a \ln a = a - \ln a$.

若 $g(x) \geq 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 则 $g(x)_{\min} = a - \ln a \geq 1$ 恒成立,

即 $a \ln a - a + 1 \leq 0$.

由(1)知函数 $f(x) = x \ln x - x + 1$ 的最小值 $f(x)_{\min} = f(1) = 0$.

$$\therefore f(a) = \ln a - a + 1 \geq 0,$$

$$\therefore \ln a - a + 1 = 0.$$

故 $a = 1$.

(3) 由(2)知, 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $e^x - x \geq 1$,

即 $1 + x \leq e^x$.

令 $x = -\frac{k}{n} (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2, k = 1, 2, \dots, n-1)$, 则 $0 < 1 - \frac{k}{n} < e^{-\frac{k}{n}}$.

$$\therefore \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n < \left(e^{-\frac{k}{n}}\right)^n = e^{-k}, \text{ 即 } \left(\frac{n-k}{n}\right)^n < e^{-k} (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

$$\therefore \left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \left(\frac{3}{n}\right)^n + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n < e^{-(n-1)} + e^{-(n-2)} + \dots + e^{-1},$$

$$\therefore e^{-(n-1)} + e^{-(n-2)} + \dots + e^{-1} = \frac{e^{-1}(1 - e^{-n+1})}{1 - e^{-1}} < \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} = \frac{1}{e-1}.$$

$$\therefore \left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \left(\frac{3}{n}\right)^n + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n < \frac{1}{e-1}.$$

故 $\left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \left(\frac{3}{n}\right)^n + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n < \frac{1}{e-1}$ 对一切大于2的正整数 n 都成立.

16 已知函数 $f(x) = kx - x \ln x$, $k \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $k = 2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 当 $0 < x \leq 1$ 时, $f(x) \leq k$ 恒成立, 求 k 的取值范围.

(3) 设 $n \in \mathbf{N}^*$, 求证: $\frac{\ln 1}{2} + \frac{\ln 2}{3} + \dots + \frac{\ln n}{n+1} \leq \frac{n(n-1)}{4}$.

答案

(1) 函数 $f(x)$ 单调递增区间为 $(0, e)$, 单调递减区间为 $(e, +\infty)$.

(2) $[1, +\infty)$.

(3) 证明见解析.

解析

(1) 当 $k = 2$ 时, $f(x) = 2x - x \ln x$, $f'(x) = 1 - \ln x$,

由 $f'(x) > 0$, 解得 $0 < x < e$; 由 $f'(x) < 0$, 解得 $x > e$,

因此函数 $f(x)$ 单调递增区间为 $(0, e)$, 单调递减区间为 $(e, +\infty)$.

(2) $f(x) = kx - x \ln x$, 故 $f'(x) = k - 1 - \ln x$.

当 $k \geq 1$ 时, 因为 $0 < x \leq 1$, 所以 $k - 1 \geq 0 \geq \ln x$,

因此 $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 即 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递增,

所以 $f(x) \leq f(1) = k$ 恒成立 .

当 $k < 1$ 时 , 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = e^{k-1} \in (0, 1)$.

当 $x \in (0, e^{k-1})$ 时 , $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增 ;

当 $x \in (e^{k-1}, 1)$ 时 , $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减 ;

于是 $f(e^{k-1}) > f(1) = k$, 与 $f(x) \leq k$ 恒成立相矛盾 .

综上 , k 的取值范围为 $[1, +\infty)$.

(3) 由 (2) 知 , 当 $0 < x \leq 1$ 时 , $x - x \ln x \leq 1$,

令 $x = \frac{1}{n^2} (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} \ln n \leq 1$, 即 $2 \ln n \leq n^2 - 1$,

因此 $\frac{\ln n}{n+1} \leq \frac{n-1}{2}$,

所以 $\frac{\ln 1}{2} + \frac{\ln 2}{3} + \cdots + \frac{\ln n}{n+1} \leq \frac{0}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{n-1}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$.

17 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程为 $6x + 3y - 10 = 0$, 且对任意的 $x \in [0, +\infty)$, $f'(x) \leq k \ln(x+1)$ 恒成立 .

(1) 求 a, b 的值 .

(2) 求实数 k 的最小值 .

(3) 证明 : $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} < \ln(n+1) + 2 (n \in \mathbf{N}^*)$.

答案

(1) $a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$.

(2) 1 .

(3) 见解析 .

解析

(1) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$, $f'(2) = -2$,

$$\therefore 12a + 4b = -2 \text{ ① ,}$$

将 $x = 2$ 代入切线方程得 $y = \frac{2}{3}$,

$$\therefore 8a + 4b = -\frac{2}{3} \text{ ② ,}$$

①②联立 , 解得 $a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$.

(2) 由 (1) 得 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$, $f'(x) = -x^2 + x$,

$\therefore -x^2 + x \leq k \ln(x+1)$ 在 $x \in [0, +\infty)$ 上恒成立 ,

即 $x^2 - x + k \ln(x+1) \geq 0$ 在 $x \in [0, +\infty)$ 恒成立 ,

设 $g(x) = x^2 - x + k \ln(x+1)$, $g(0) = 0$,

$\therefore$ 只需证对于任意的 $x \in [0, +\infty)$ 有 $g(x) \geq g(0)$,

$$g'(x) = 2x - 1 + \frac{k}{x+1} = \frac{2x^2 + x + k - 1}{x+1}, \quad x \in [0, +\infty),$$

设 $h(x) = 2x^2 + x + k - 1$.

(1) 当 $\Delta = 1 - 8(k-1) \leq 0$, 即 $k \geq \frac{9}{8}$ 时, $h(x) \geq 0$,

$\therefore g'(x) \geq 0$, $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增,

$\therefore g(x) \geq g(0)$.

(2) 当 $\Delta = 1 - 8(k-1) > 0$, 即 $k < \frac{9}{8}$ 时, 设 x_1, x_2 是方程 $2x^2 + x + k - 1 = 0$ 的两根

且 $x_1 < x_2$,

由 $x_1 + x_2 = -\frac{1}{2}$, 可知 $x_1 < 0$,

分析题意可知当 $x_2 \leq 0$ 时对任意 $x \in [0, +\infty)$ 有 $g(x) \geq g(0)$,

$\therefore k - 1 \geq 0, k \geq 1$,

$\therefore 1 \leq k < \frac{9}{8}$.

综上所述, 实数 k 的最小值为 1.

(3) 令 $k = 1$, 有 $-x^2 + x \leq \ln(x+1)$, 即 $x \leq x^2 + \ln(x+1)$ 在 $x \in [0, +\infty)$ 恒成立,

令 $x = \frac{1}{n}$, 得 $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2} + \ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) = \frac{1}{n^2} + \ln(n+1) - \ln n$,

$$\therefore \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + [\ln(n+1) - \ln n]$$

$$= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} + \ln(n+1)$$

$$= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} + \ln(n+1)$$

$$= 2 - \frac{1}{n} = \ln(n+1) < \ln(n+1) + 2,$$

$\therefore$ 原不等式得证.

18 已知函数 $f(x) = a \ln x - x + 1 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 若 $f(x) \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 求所求实数 a 的值.

(3) 证明: $\frac{\ln 2}{3} + \frac{\ln 3}{4} + \frac{\ln 4}{5} + \cdots + \frac{\ln n}{n+1} < \frac{n(n-1)}{4} (n \in \mathbf{N}, n > 1)$.

答案

- (1) 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 递减;
 当 $a > 0$ 时, $x \in (0, a)$ 时, $f(x)$ 递增;
 $x \in (a, +\infty)$ 时, $f(x)$ 递减.
 (2) $a = 1$.
 (3) 证明见解析.

解析

- (1) $f'(x) = \frac{a-x}{x}$,
 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减;
 当 $a > 0$ 时, $x \in (0, a)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增;
 $x \in (a, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减.
 (2) 由 (1) 知, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 递减,
 $\therefore f(1) = 0$,
 $\therefore f(x) \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上不恒成立,
 当 $a > 0$ 时, $x \in (0, a)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增;
 $x \in (a, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减;
 $\therefore f(x)_{\max} = f(a) = a \ln a - a + 1$,
 令 $g(a) = a \ln a - a + 1$,
 $\therefore g'(a) = \ln a$,
 $\therefore g(a)$ 的最小值为 $g(1) = 0$
 $\therefore a \ln a - a + 1 \leq 0$ 的解为 $a = 1$.
 (3) 由 (2) 知: $\ln x < x - 1$, $x > 1$
 $\therefore \frac{\ln n}{n+1} = \frac{\ln n^2}{2(n+1)} < \frac{n^2-1}{2(n+1)} = \frac{n-1}{2}$,
 $\therefore \frac{\ln 2}{3} + \frac{\ln 3}{4} + \cdots + \frac{\ln n}{n+1} < \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \cdots + \frac{n-1}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$.

19

已知函数 $f(x) = \ln x$, $g(x) = f(x) + ax^2 + bx$, 函数 $g(x)$ 的图象在点 $(1, g(1))$ 处的切线平行于 x 轴.

- (1) 确定 a 与 b 的关系.
 (2) 试讨论函数 $g(x)$ 的单调性.
 (3) 证明: 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $\ln(1+n) > \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{i^2}$ 成立.

答案

- (1) $b = -2a - 1$
- (2) 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 单调递减;
- 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 函数 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递增, 在 $(1, \frac{1}{2a})$ 单调递减; 在 $(\frac{1}{2a}, +\infty)$ 上单调递增;
- 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;
- 当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 函数 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2a})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{2a}, 1)$ 单调递减; 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.
- (3) 答案见解析.

解析

- (1) 依题意得 $g(x) = \ln x + ax^2 + bx$,
- 则 $g'(x) = \frac{1}{x} + 2ax + b$,
- 由函数 $g(x)$ 的图象在点 $(1, g(1))$ 处的切线平行于 x 轴得: $g'(1) = 1 + 2a + b = 0$, $\therefore$
- $b = -2a - 1$.
- (2) 由 (1) 得 $g'(x) = \frac{2ax^2 - (2a + 1)x + 1}{x} = \frac{(2ax - 1)(x - 1)}{x}$,
- $\therefore$ 函数 $g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,
- $\therefore$ ① 当 $a \leq 0$ 时, $2ax - 1 < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,
- 由 $g'(x) > 0$ 得 $0 < x < 1$, 由 $g'(x) < 0$ 得 $x > 1$,
- 即函数 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 单调递减;
- ② 当 $a > 0$ 时, 令 $g'(x) = 0$, $x = 1$ 或 $x = \frac{1}{2a}$,
- 若 $\frac{1}{2a} < 1$, 即 $a > \frac{1}{2}$ 时, 由 $g'(x) > 0$ 得 $x > 1$ 或 $0 < x < \frac{1}{2a}$, 由 $g'(x) < 0$ 得 $\frac{1}{2a} < x < 1$,
- 即函数 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2a})$, $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{2a}, 1)$ 单调递减;
- 若 $\frac{1}{2a} > 1$, 即 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 由 $g'(x) > 0$ 得 $x > \frac{1}{2a}$ 或 $0 < x < 1$, 由 $g'(x) < 0$ 得 $1 < x < \frac{1}{2a}$,
- 即函数 $g(x)$ 在 $(0, 1)$, $(\frac{1}{2a}, +\infty)$ 单调递增, 在 $(1, \frac{1}{2a})$ 单调递减;
- 若 $\frac{1}{2a} = 1$, 即 $a = \frac{1}{2}$ 时, 在 $(0, +\infty)$ 上恒有 $g'(x) \geq 0$,
- 即函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,
- 综上得: 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 单调递减;
- 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 函数 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递增, 在 $(1, \frac{1}{2a})$ 单调递减; 在 $(\frac{1}{2a}, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 函数 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2a})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{2a}, 1)$ 单调递减; 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

(3) 证法一: 由 (2) 知当 $a = 1$ 时, 函数 $g(x) = \ln x + x^2 - 3x$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增, $\therefore$

$$\ln x + x^2 - 3x \geq g(1) = -2, \text{ 即 } \ln x \geq -x^2 + 3x - 2 = -(-x-1)(x-2),$$

$$\text{令 } x = 1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}^*, \text{ 则 } \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2},$$

$\therefore$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{1} - \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$

,

$$\therefore \ln\left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \dots \times \frac{n+1}{n}\right) > \frac{1-1}{1^2} + \frac{2-1}{2^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2},$$

$$\text{即 } \ln(1+n) > \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{i^2}.$$

证法二: 构造数列 $\{a_n\}$, 使其前 n 项和 $T_n = \ln(1+n)$,

$$\text{则当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = T_n - T_{n-1} = \ln\left(\frac{1+n}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

显然 $a_1 = \ln 2$ 也满足该式,

$$\text{故只需证 } \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{n-1}{n^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2},$$

$$\text{令 } x = \frac{1}{n}, \text{ 即证 } \ln(1+x) - x + x^2 > 0, \text{ 记 } h(x) = \ln(1+x) - x + x^2, x > 0,$$

$$\text{则 } h'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + 2x = \frac{1}{1+x} - 1 + 2x = \frac{x(2x+1)}{1+x} > 0, h(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增, 故 } h(x) > h(0) = 0,$$

$$\therefore \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{n-1}{n^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \text{ 成立,}$$

以下同证法一.

$$\text{证法三: 令 } \varphi(n) = \ln(1+n) - \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{i^2},$$

则

$$\begin{aligned} \varphi(n+1) - \varphi(n) &= \ln(n+2) - \frac{n}{(n+1)^2} - \ln(n+1) = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} \\ &+ \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

,

$$\text{令 } x = 1 + \frac{1}{n+1}, \text{ 则 } x \in (1, 2], \frac{1}{n+1} = x-1,$$

$$n \in \mathbf{N}^*. h(x) = \ln x - (x-1) + (x-1)^2 = \ln x + x^2 - 3x + 2,$$

$\therefore h'(x) = \frac{1}{x} + 2x - 3 = \frac{(2x-1)(x-1)}{x} > 0$. 函数 $h(x)$ 在 $(1, 2]$ 单调递增,
 又 $h(1) = 0$, $\therefore$ 当 $x \in (1, 2]$ 时, $h(x) > 0$, 即 $\varphi(n+1) - \varphi(n) > 0$,
 $\therefore$ 数列 $\varphi(n)$ 单调递增, 又 $\varphi(1) = \ln 2 > 0$, $\therefore$ 即 $\ln(1+n) > \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{i^2}$.

20 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x + a}{x} (a \in \mathbf{R})$.

- (1) 求 $f(x)$ 的极值.
 (2) 求证: $\frac{\ln 2}{6} + \frac{\ln 2 \cdot \ln 3}{24} + \cdots + \frac{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdots \ln n}{(n+1)!} < \frac{n-1}{2n+2}, n \geq 2$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$.

答案

- (1) $f(x)_{\text{极大值}} = e^{a-1}$, 无极小值.
 (2) 证明见解析.

解析

- (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,
 $f'(x) = \frac{1 - (\ln x + a)}{x^2}$, 令 $f'(x) = 0$, 解得: $x = e^{1-a}$,
 当 $f'(x) > 0$ 时, $x < e^{1-a}$, $f(x)$ 在 $(0, e^{1-a})$ 是增函数,
 当 $f'(x) < 0$ 时, $x > e^{1-a}$, $f(x)$ 在 $(e^{1-a}, +\infty)$ 是减函数,
 $\therefore f(x)$ 在 $x = e^{1-a}$ 处取得极大值, $f(x)_{\text{极大值}} = f(e^{1-a}) = e^{a-1}$, 无极小值.
 (2) 由 (1) $f(x) = \frac{\ln x + a}{x} \leq e^{a-1}$,
 取 $a = 1$, $\therefore \ln x \leq x - 1$, 当 $x = 1$ 时取等号,
 令 $x = n$, $\therefore n \geq 2$, 故 $\frac{\ln n}{n+1} < \frac{n-1}{n+1}$,
 $\therefore \frac{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdots \ln n}{(n+1)!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln 2}{3} \cdot \frac{\ln 3}{4} \cdots \frac{\ln n}{n+1} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdots \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-1}{n+1}$,
 $= \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$,
 故 $\frac{\ln 2}{6} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$; $\frac{\ln 2 \cdot \ln 3}{24} < \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$; $\cdots$;
 $\frac{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdots \ln n}{(n+1)!} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$,
 $\therefore \frac{\ln 2}{6} + \frac{\ln 2 \cdot \ln 3}{24} + \cdots + \frac{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdots \ln n}{(n+1)!} < \frac{n-1}{2n+2}, n \geq 2$.