

导数与数列综合

1 已知函数 $f(x) = \frac{k \ln x}{x}$, $g(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

(1) 若不等式 $f(x) \leq g(x)$ 对于任意的 $x > 0$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

(2) 证明: $\frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \cdots + \frac{\ln n}{n^2} < \frac{2n^2 - n - 1}{4(n+1)} (n \in \mathbf{N}_+, n \geq 2)$.

2 已知函数 $f(x) = a \ln x + bx (a, b \in \mathbf{R})$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $x - 2y - 2 = 0$.

(1) 求 a, b 的值 .

(2) 当 $x > 1$ 时, $f(x) + \frac{k}{x} < 0$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围 .

(3) 证明: 当 $n \in \mathbf{N}^*$, 且 $n \geq 2$ 时, $\frac{2}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \cdots + \frac{1}{n \ln n} > \frac{3n^2 - n - 2}{2n^2 + 2n}$.

3 已知函数 $f(x) = ax \ln x - x + 1$ ($a \in \mathbf{R}$) , 且 $f(x) \geqslant 0$.

(1) 求 a .

(2) 求证 : 当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时 $\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \frac{1}{n^2+3} + \cdots + \frac{1}{4n^2} < 2\ln 2$.

4 已知函数 $f(x) = ax - \ln x$ (a 是常数, 且 $a > 0$) .

(1) 求函数 $f(x)$ 的最值 .

(2) 若函数 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值, 且关于 x 的方程 $f(x) + 2x = x^2 + b$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上恰有两个不相等的实数根, 求实数 b 的取值范围 .

(3) 求证: 当 $n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$ 时, $\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < e$.

5 已知函数 $f(x) = ax + \frac{b}{x} + c$ 的图像在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = x - 1$.

(1) 用 a 表示 b, c .

(2) 若 $f(x) \geq \ln x$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 求 a 的取值范围 .

(3) 证明 : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) + \frac{n}{2(n+1)} \quad (n \geq 1)$.

6 已知 $f(x) = \ln x - x - \frac{a}{x}$, 其中 a 为实数 .

(1) 设 $a = 2$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 当 $x \geq 1$ 时 , $f(x) \leq 0$ 恒成立 , 求实数 a 的取值范围.

(3) 当 $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 2$ 时 , 证明 : $\frac{\ln 2}{3} \cdot \frac{\ln 3}{4} \cdots \frac{\ln n}{n+1} < \frac{1}{n}$.

7 若函数 $f(x) = e^x - ax - 1$ ($a > 0$) 在 $x = 0$ 处取极值 .

(1) 求 a 的值 , 并判断该极值是函数的最大值还是最小值 .

(2) 证明 : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$ ($n \in \mathbf{N}^*$) .

8 已知函数 $f(x) = (x+1)\ln x$, $g(x) = a(x-1)$ ($a \in \mathbf{R}$) .

- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间 .
- (2) 若 $f(x) \geq g(x)$ 对任意的 $x \in [1, +\infty)$ 恒成立 , 求实数 a 的取值范围 .
- (3) 求证 : $\ln 2 \cdot \ln 3 \cdots \ln n > \frac{2^n}{n(n+1)} \quad (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^+)$.

9 已知 $f(x) = e^x - ax - 1$ ($a \in \mathbf{R}$) .

(1) 若 $f(x) \geq 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 求实数 a 范围 .

(2) 求证: 对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, 都有

$$\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{n+1}\right)^{n+1} + \left(\frac{3}{n+1}\right)^{n+1} + \cdots + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} < 1 .$$

10 已知函数 $f(x) = \ln(x-1) - k(x-1) + 1$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间 .
- (2) 若 $f(x) \leq 0$ 恒成立 , 试确定实数 k 的取值范围 .
- (3) 证明 : $\frac{\ln 2}{3} + \frac{\ln 3}{4} + \frac{\ln 4}{5} + \cdots + \frac{\ln n}{n+1} < \frac{n(n-1)}{4}$ ($n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n > 1$) .

11 函数 $f(x) = \ln(x+1) + ax$ 的图象与直线 $y = 2x$ 相切 .

(1) 求 a 的值 .

(2) 证明 : 对于任意正整数 n , $n^n \cdot e^{\frac{n}{n+1}} < \frac{(2n)!}{n!} < n^n \cdot e^{\frac{n+1}{2}}$.

12 函数 $f(x) = a(x+1) - 2\ln(x+1)$ (a 为常数, 且 $a > 0$) 在 $x = 1$ 处取得极值.

- (1) 求实数 a 的值, 并求 $f(x)$ 的单调区间.
- (2) 关于 x 的方程 $f(x) + x^2 + b = 6x + 1 - 8\ln(x+1)$ 在 $[1, 2]$ 上恰有 1 个实数根, 求实数 b 的取值范围.
- (3) 求证: 当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $\ln n < \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} + \frac{n-1}{2} (i \in \mathbf{N}^*)$.

13 函数 $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x}$, $h(x) = \frac{x}{x+1}$.

(1) 判断 $x > 0$ 时 , $f(x) - h(x)$ 的零点个数 , 并加以说明 .

(2) 正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_n e^{-a_{n+1}} = f(a_n)$.

① 判断数列 $\{a_n\}$ 的单调性并加以证明 .

② 证明 : $\sum_{i=1}^{n+1} a_i < 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

14 已知函数 $f(x) = \ln(x-1) - k(x-1) + 1$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间 .
- (2) 若 $f(x) \leq 0$ 恒成立 , 试确定实数 k 的取值范围 .
- (3) 证明 : $\frac{\ln 2}{3} + \frac{\ln 3}{4} + \frac{\ln 4}{5} + \cdots + \frac{\ln n}{n+1} < \frac{n(n-1)}{4} (n \in \mathbb{N}^* \text{ 且 } n > 1)$.

15 已知函数 $f(x) = x \ln x - x + 1, g(x) = e^x - ax, a \in \mathbf{R}$.

- (1) 求 $f(x)$ 的最小值 .
- (2) 若 $g(x) \geq 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立 , 求 a 的值 .
- (3) 求证 : $\left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \left(\frac{3}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n < \frac{1}{e-1}$ 对一切大于 2 的正整数 n 都成立 .

16 已知函数 $f(x) = kx - x \ln x$, $k \in \mathbf{R}$.

- (1) 当 $k = 2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.
- (2) 当 $0 < x \leq 1$ 时, $f(x) \leq k$ 恒成立, 求 k 的取值范围.
- (3) 设 $n \in \mathbf{N}^*$, 求证: $\frac{\ln 1}{2} + \frac{\ln 2}{3} + \cdots + \frac{\ln n}{n+1} \leq \frac{n(n-1)}{4}$.

17 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程为 $6x + 3y - 10 = 0$, 且对任意的 $x \in [0, +\infty)$, $f'(x) \leq k \ln(x+1)$ 恒成立 .

(1) 求 a, b 的值 .

(2) 求实数 k 的最小值 .

(3) 证明 : $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} < \ln(n+1) + 2 (n \in \mathbf{N}^*)$.

18 已知函数 $f(x) = a \ln x - x + 1 (a \in \mathbf{R})$.

- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间 .
- (2) 若 $f(x) \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立 , 求所求实数 a 的值 .
- (3) 证明 : $\frac{\ln 2}{3} + \frac{\ln 3}{4} + \frac{\ln 4}{5} + \cdots + \frac{\ln n}{n+1} < \frac{n(n-1)}{4} (n \in \mathbf{N}, n > 1)$.

19 已知函数 $f(x) = \ln x$, $g(x) = f(x) + ax^2 + bx$, 函数 $g(x)$ 的图象在点 $(1, g(1))$ 处的切线平行于 x 轴 .

- (1) 确定 a 与 b 的关系 .
- (2) 试讨论函数 $g(x)$ 的单调性 .
- (3) 证明 : 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $\ln(1+n) > \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{i^2}$ 成立 .

20 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x + a}{x} (a \in \mathbf{R})$.

(1) 求 $f(x)$ 的极值.

(2) 求证: $\frac{\ln 2}{6} + \frac{\ln 2 \cdot \ln 3}{24} + \cdots + \frac{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdots \ln n}{(n+1)!} < \frac{n-1}{2n+2}, n \geqslant 2 \text{ 且 } n \in \mathbf{N}^*.$

