

天津导数高考真题

1 2010年高考真题天津卷理科

(改编自2010天津理21) 已知函数 $f(x) = \frac{x}{e^x}$, 若 $x_1 \neq x_2$ 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 证明 : $x_1 + x_2 > 2$.

2 2017年高考真题天津卷理科第20题14分

设 $a \in \mathbf{Z}$, 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 6x + a$ 在区间 $(1, 2)$ 内有一个零点 x_0 , $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数 .

- (1) 求 $g(x)$ 的单调区间 .
- (2) 设 $m \in [1, x_0) \cup (x_0, 2]$, 函数 $h(x) = g(x)(m - x_0) - f(m)$, 求证 : $h(m)h(x_0) < 0$.
- (3) 求证 : 存在大于0的常数 A , 使得对于任意的正整数 p, q , 且 $\frac{p}{q} \in [1, x_0) \cup (x_0, 2]$, 满足 $|\frac{p}{q} - x_0| \geq \frac{1}{Aq^4}$.

3 2011年高考真题天津卷文科第19题

已知函数 $f(x) = 4x^3 + 3tx^2 - 6t^2x + t - 1, x \in \mathbf{R}$, 其中 $t \in \mathbf{R}$.

- (1) 当 $t = 1$ 时 , 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程 ;
- (2) 当 $t \neq 0$ 时 , 求 $f(x)$ 的单调区间 ;
- (3) 证明 : 对任意的 $t \in (0, +\infty)$, $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内均存在零点 .

4 2014年高考真题天津卷理科第20题

已知函数 $f(x) = x - ae^x (a \in \mathbf{R})$, $x \in \mathbf{R}$. 已知函数 $y = f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$.

- (1) 求 a 的取值范围 ;
- (2) 证明 $\frac{x_2}{x_1}$ 随着 a 的减小而增大 ;
- (3) 证明 $x_1 + x_2$ 随着 a 的减小而增大 .

5 2015年高考真题天津卷理科第20题

已知函数 $f(x) = nx - x^n (x \in \mathbf{R})$, 其中 $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 2$.

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性 ;
- (2) 设曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P , 曲线在点 P 处的切线方程为 $y = g(x)$, 求证 : 对于任意的正实数 x , 都有 $f(x) \leq g(x)$;
- (3) 若关于 x 的方程 $f(x) = a$ (a 为实数) 有两个正实根 x_1, x_2 , 求证 : $|x_2 - x_1| < \frac{a}{1-n} + 2$.

6 2018年高考真题天津卷理科第20题14分

已知函数 $f(x) = a^x$, $g(x) = \log_a x$, 其中 $a > 1$.

- (1) 求函数 $h(x) = f(x) - x \ln a$ 的单调区间 .
- (2) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线与曲线 $y = g(x)$ 在点 $(x_2, g(x_2))$ 处的切线平行 , 证明 $x_1 + g(x_2) = -\frac{2 \ln \ln a}{\ln a}$.
- (3) 证明当 $a \geq e^{\frac{1}{2}}$ 时 , 存在直线 l , 使 l 是曲线 $y = f(x)$ 的切线 , 也是曲线 $y = g(x)$ 的切线 .

7 2011年高考真题天津卷理科第19题

已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = \ln x - ax^2, x > 0$. ($f(x)$ 的图像连续不断)

- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间 ;
- (2) 当 $a = \frac{1}{8}$ 时 , 证明 : 存在 $x_0 \in (2, +\infty)$, 使 $f(x_0) = f(\frac{3}{2})$;
- (3) 若存在均属于区间 $[1, 3]$ 的 α, β , 且 $\beta - \alpha \geq 1$, 使 $f(\alpha) = f(\beta)$, 证明 $\frac{\ln 3 - \ln 2}{5} \leq a \leq \frac{\ln 2}{3}$.

8 2016年高考真题天津卷文科第20题14分

设函数 $f(x) = x^3 - ax - b$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$

- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间 ;
- (2) 若 $f(x)$ 存在极值点 x_0 , 且 $f(x_1) = f(x_0)$, 其中 $x_1 \neq x_0$, 求证 : $x_1 + 2x_0 = 0$;
- (3) 设 $a > 0$, 函数 $g(x) = |f(x)|$, 求证 : $g(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$.

9 2012年高考真题天津卷理科第20题

已知函数 $f(x) = x - \ln(x + a)$ 的最小值为 0, 其中 $a > 0$.

- (1) 求 a 的值;
- (2) 若对任意的 $x \in [0, +\infty)$, 有 $f(x) \leq kx^2$ 恒成立, 求实数 k 的最小值;
- (3) 证明 $\sum_{i=1}^n \frac{2}{2i-1} - \ln(2n+1) < 2 (n \in \mathbf{N}^*)$.

10 2018年高考真题天津卷文科第20题14分

设函数 $f(x) = (x - t_1)(x - t_2)(x - t_3)$, 其中 $t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R}$, 且 t_1, t_2, t_3 是公差为 d 的等差数列.

- (1) 若 $t_2 = 0, d = 1$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程.
- (2) 若 $d = 3$, 求 $f(x)$ 的极值.
- (3) 若曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = -(x - t_2) - 6\sqrt{3}$ 有三个互异的公共点, 求 d 的取值范围.

11 2012年高考真题天津卷文科第20题

已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1-a}{2}x^2 - ax - a$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $a > 0$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-2, 0)$ 内恰有两个零点, 求 a 的取值范围;
- (3) 当 $a = 1$ 时, 设函数 $f(x)$ 在区间 $[t, t+3]$ 上的最大值为 $M(t)$, 最小值为 $m(t)$, 记 $g(t) = M(t) - m(t)$, 求函数 $g(t)$ 在区间 $[-3, -1]$ 上的最小值.

12 2019年高考真题天津卷文科第20题14分

设函数 $f(x) = \ln x - a(x-1)e^x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

- (1) 若 $a \leq 0$, 讨论 $f(x)$ 单调性.
- (2) 若 $0 < a < \frac{1}{e}$.
 - ① 证明: $f(x)$ 恰有两个零点.
 - ② 设 x_0 为 $f(x)$ 的极值点, x_1 为 $f(x)$ 的零点, 且 $x_1 > x_0$, 证明: $3x_0 - x_1 > 2$.

13 2019年高考真题天津卷理科第20题14分

设函数 $f(x) = e^x \cos x$, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间.
- (2) 当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 证明 $f(x) + g(x) \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq 0$.
- (3) 设 x_n 为函数 $u(x) = f(x) - 1$ 在区间 $\left(2n\pi + \frac{\pi}{4}, 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ 内的零点, 其中 $n \in \mathbf{N}$, 证明 $2n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n < \frac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0 - \cos x_0}$.

14 2015年高考真题天津卷文科第20题

已知函数 $f(x) = 4x - x^4$, $x \in \mathbf{R}$.

- (1) 求 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 设曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P , 曲线在点 P 处的切线方程为 $y = g(x)$, 求证: 对于任意的正实数 x , 都有 $f(x) \leq g(x)$;
- (3) 若方程 $f(x) = a$ ($a \in \mathbf{R}$) 有两个正实数根 x_1, x_2 且 $x_1 < x_2$, 求证: $x_2 - x_1 < -\frac{a}{3} + 4^{\frac{1}{3}}$.

15 2014年高考真题天津卷文科第19题

已知函数 $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}ax^3$ ($a > 0$), $x \in \mathbf{R}$.

- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值.
- (2) 若对于任意的 $x_1 \in (2, +\infty)$, 都存在 $x_2 \in (1, +\infty)$, 使得 $f(x_1) \cdot f(x_2) = 1$, 求 a 的取值范围.

16 2010年高考真题天津卷文科第20题12分

已知函数 $f(x) = ax^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$ ($x \in \mathbf{R}$), 其中 $a > 0$.

- (1) 若 $a = 1$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程.
- (2) 若在区间 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 上, $f(x) > 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

17 2016年高考真题天津卷理科第20题13分

设函数 $f(x) = (x-1)^3 - ax - b$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$.

- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 若 $f(x)$ 存在极值点 x_0 , 且 $f(x_1) = f(x_0)$, 其中 $x_1 \neq x_0$, 求证: $x_1 + 2x_0 = 3$;
- (3) 设 $a > 0$, 函数 $g(x) = |f(x)|$, 求证: $g(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$.

18 天津高考

已知函数 $f(x) = \frac{2ax - a^2 + 1}{x^2 + 1}$ ($x \in \mathbf{R}$), 其中 $a \in \mathbf{R}$.

- (1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程;
- (2) 当 $a \neq 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值.

19 2017年高考真题天津卷文科第19题14分

设 $a, b \in \mathbf{R}$, $|a| \leq 1$. 已知函数 $f(x) = x^3 - 6x^2 - 3a(a-4)x + b$, $g(x) = e^x f(x)$.

- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间.
- (2) 已知函数 $y = g(x)$ 和 $y = e^x$ 的图象在公共点 (x_0, y_0) 处有相同的切线.
 - ① 求证: $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数等于 0.
 - ② 若关于 x 的不等式 $g(x) \leq e^x$ 在区间 $[x_0 - 1, x_0 + 1]$ 上恒成立, 求 b 的取值范围.

20 2010年高考真题天津卷理科第21题14分

已知函数 $f(x) = xe^{-x}$ ($x \in \mathbf{R}$).

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值.
- (2) 已知函数 $y = g(x)$ 的图象与函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称. 证明当 $x > 1$ 时, $f(x) > g(x)$.
- (3) 如果 $x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 证明 $x_1 + x_2 > 2$.

21 2014年高考真题天津卷

已知函数 $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}ax^3$ ($a > 0$), $x \in \mathbf{R}$.

- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值.
- (2) 若对于任意的 $x_1 \in (2, +\infty)$, 都存在 $x_2 \in (1, +\infty)$, 使得 $f(x_1) \cdot f(x_2) = 1$, 求 a 的取值范围.

22 2019年高考真题天津卷文科

设函数 $f(x) = \ln x - a(x-1)e^x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

- (1) 若 $a \leq 0$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.
- (2) 若 $0 < a < \frac{1}{e}$,
 - (i) 证明 $f(x)$ 恰有两个零点;
 - (ii) 设 x_0 为 $f(x)$ 的极值点, x_1 为 $f(x)$ 的零点, 且 $x_1 > x_0$, 证明: $3x_0 - x_1 > 2$.

23 2014年高考真题天津卷理科

(改编自2014天津理20) 设函数 $f(x) = x - ae^x$, 若 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) 是 $f(x)$ 的两个零点.

- (1) 证明: $\frac{x_2}{x_1}$ 随着 a 的减小而增大;
- (2) 证明: $x_1 + x_2$ 随着 a 的减小而增大.

24 2013年高考真题天津卷理科第20题

已知函数 $f(x) = x^2 \ln x$

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 证明: 对任意的 $t > 0$, 存在唯一的 s 使 $t = f(s)$;
- (3) 设 (II) 中所确定的 s 关于 t 的函数为 $s = g(t)$, 证明: 当 $t > e^2$ 时, 有 $\frac{2}{5} < \frac{\ln g(t)}{\ln t} < \frac{1}{2}$.

25 2020年高考真题天津卷第20题16分

已知函数 $f(x) = x^3 + k \ln x$ ($k \in \mathbf{R}$) , $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数 .

(1) 当 $k = 6$ 时 ,

① 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程 .

② 求函数 $g(x) = f(x) - f'(x) + \frac{9}{x}$ 的单调区间和极值 .

(2) 当 $k \geq -3$ 时 , 求证 : 对任意的 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 > x_2$, 有

$$\frac{f'(x_1) + f'(x_2)}{2} > \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} .$$

26 2013年高考真题天津卷文科第20题

设 $a \in [-2, 0]$, 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 - (a+5)x, & x \leq 0 \\ x^3 - \frac{a+3}{2}x^2 + ax, & x > 0 \end{cases}$.

(1) 证明 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内单调递减 , 在区间 $(1, +\infty)$ 内单调递增 ;

(2) 设曲线 $y = f(x)$ 在点 $P_i(x_i, f(x_i))$ ($i = 1, 2, 3$) 处的切线相互平行 , 且 $x_1 x_2 x_3 \neq 0$. 证明

$$x_1 + x_2 + x_3 > -\frac{1}{3} .$$