

基本不等式小测

1 已知 $a + 2b = 1$ ($a > 0, b > 0$)，则 $\frac{a+2b}{a} + \frac{b+2}{b}$ 的最小值等于 _____。

答案 10

解析 由题可知： $\frac{a+2b}{a} + \frac{b+2}{b} = 1 + \frac{2b}{a} + 1 + \frac{2}{b} = 2 + \frac{2b}{a} + \frac{2}{b}$
 $= 2 + \frac{2b}{a} + \frac{2(a+2b)}{b} = 2 + \frac{2b}{a} + \frac{2a}{b} + 4$
 $\geq 2\sqrt{\frac{2b}{a} \cdot \frac{2a}{b}} + 6 = 10$ ，
 当且仅当 $\frac{2b}{a} = \frac{2a}{b} \Rightarrow b = a$ 时等号成立，
 又 $a + 2b = 3b = 1$ ，所以 $a = b = \frac{1}{3}$ ，
 故 $a = b = \frac{1}{3}$ 时等号成立，最小值为 10。

2 已知正数 x, y 满足 $x^2y + 4xy^2 + 6xy = x + 4y$ ，则 $\frac{xy}{x+4y}$ 的最大值为 _____。

答案 $\frac{1}{8}$

解析 $\because$ 正数 x, y 满足 $x^2y + 4xy^2 + 6xy = x + 4y$ ，
 $\therefore xy(x + 4y + 6) = x + 4y$ ，
 $\therefore xy = \frac{x + 4y}{x + 4y + 6}$
 令 $x + 4y = t$ ，则 $xy = \frac{t}{t+6}$ 且 $t > 0$ ，
 $\because x + 4y \geq 2\sqrt{4xy} = 4\sqrt{xy}$ ，当且仅当 $x = 4y$ 时取等号，
 $\therefore t \geq 4\sqrt{\frac{t}{t+6}}$ 即 $t^2 + 6t - 16 \geq 0$ ，
 $\therefore t \geq 2$ 或 $t \leq -8$ (舍)，
 $\therefore \frac{xy}{x+4y} = \frac{1}{t+6} \leq \frac{1}{8}$
 $\therefore \frac{xy}{x+4y}$ 的最大值为 $\frac{1}{8}$ 。
 故答案为： $\frac{1}{8}$ 。

3 已知 x, y 是正数, $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1$, 则 $\frac{2x+y}{xy+1}$ 的最小值为 _____ .

答案 $\frac{8}{9}$

解析 $\because \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1$, 且 x, y 是正数,
 $\therefore 1 = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} \geq 2\sqrt{\frac{2}{xy}}$,
 $\therefore xy \geq 8$, 当且仅当 $y = 2x$ 时等号成立,
 又 $\because \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1$,
 $\therefore \frac{2x+y}{xy} = 1$,
 $\therefore 2x+y = xy$,
 $\therefore \frac{2x+y}{xy+1} = \frac{xy}{xy+1} = 1 - \frac{1}{xy+1}$,
 $\because xy \geq 8$,
 $\therefore xy+1 \geq 9$,
 $\therefore -\frac{1}{xy+1} \geq -\frac{1}{9}$,
 $\therefore \frac{2x+y}{xy+1} \geq 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

4 已知 $x > 0, y > 0, x + 2y = 3$, 则 $\frac{x^2+3y}{xy}$ 的最小值是 ().

A. $3 - 2\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{2} + 1$

C. $\sqrt{2} - 1$

D. $\sqrt{2} + 1$

答案 B

解析 $\frac{x^2+3y}{xy} = \frac{x^2+y(x+2y)}{xy}$
 $= \frac{x^2+xy+2y^2}{xy}$
 $= \frac{x}{y} + \frac{2y}{x} + 1$
 $\geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{2y}{x}} + 1$
 $= 1 + 2\sqrt{2}$,

当且仅当 $\frac{x}{y} = \frac{2y}{x}$ 时取得最小值, 即 $x = \sqrt{2}y$ 时.

故选: B.

5 已知正实数 x, y 满足 $4x^2 + y^2 = 1 + 2xy$ ，则当 $x =$ _____ 时， $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{xy}$ 的最小值是 _____。

答案 1: $\frac{1}{2}$
2: 6

解析 $\because 4x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{4x^2 \cdot y^2} = 4xy$ ，
即 $1 + 2xy \geq 4xy$ ， $xy \leq \frac{1}{2}$ ，
当且仅当 $2x = y$ 即 $x = \frac{1}{2}$ 取等。
 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{xy} \geq 2\sqrt{\frac{2}{xy}} + \frac{1}{xy} \geq 2 \times 2 + 2 \geq 6$ ，
当且仅当 $2x = y$ 取等。
故答案为： $\frac{1}{2}$ ；6。

6 已知实数 a, b, c, d 满足 $a + b = 1, c + d = 1$ ，则 $\frac{1}{abc} + \frac{1}{d}$ 的最小值是 ()。

A. 10

B. 9

C. $4\sqrt{2}$

D. $3\sqrt{3}$

答案 B

解析 $\because a + b = 1, c + d = 1$ ，
 $\therefore ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ，
 $\therefore \frac{1}{ab} \geq 4$ ，当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 时，取等号。
则 $\frac{1}{abc} + \frac{1}{d} \geq 4 \cdot \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$
 $= (c + d) \cdot \left(\frac{4}{c} + \frac{1}{d}\right)$
 $= 5 + \frac{4d}{c} + \frac{c}{d} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{4d}{c} \cdot \frac{c}{d}} = 9$ ，
当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 时，且 $c = \frac{2}{3}, d = \frac{1}{3}$ 时， $\frac{1}{abc} + \frac{1}{d}$ 的最小值为 9，
故选 B。