

圆锥曲线解答题

1 2018~2019学年1月四川成都青羊区成都石室中学(文庙校区)高二上学期周测B卷第22题

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 $F(-c, 0)$, 右顶点为 A , 点 E 的坐标为 $(0, c)$, $\triangle EFA$ 的面积为 $\frac{b^2}{2}$.

(1) 求椭圆的离心率.

(2) 设点 Q 在线段 AE 上, $|FQ| = \frac{3}{2}c$, 延长线段 FQ 与椭圆交于点 P , 点 M, N 在 x 轴上, $PM \parallel QN$, 且直线 PM 与直线 QN 间的距离为 c , 四边形 $PQNM$ 的面积为 $3c$.

① 求直线 FP 的斜率.

② 求椭圆的方程.

答案

(1) $\frac{1}{2}$.

(2) ① $\frac{3}{4}$.

② $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

解析

(1) 设椭圆的离心率为 e , 由已知可得 $\frac{1}{2}(c+a)c = \frac{b^2}{2}$,

又由 $b^2 = a^2 - c^2$ 可得 $2c^2 + ac - a^2 = 0$,

即 $2e^2 + e - 1 = 0$, 又因为 $0 < e < 1$, 解得 $e = \frac{1}{2}$.

所以椭圆的离心率为 $\frac{1}{2}$.

(2) ① 依题意不妨设直线 FP 的方程为 $x = my - c (m > 0)$, 则直线 FP 的斜率为 $\frac{1}{m}$.

由 (1) 知 $a = 2c$, 可得直线 AE 的方程为 $\frac{x}{2c} + \frac{y}{c} = 1$,

即 $x + 2y - 2c = 0$, 与直线 FP 的方程联立,

解得 $x = \frac{(2m-2)c}{m+2}$, $y = \frac{3c}{m+2}$,

即点 Q 的坐标为 $(\frac{(2m-2)c}{m+2}, \frac{3c}{m+2})$.

由已知 $|FQ| = \frac{3c}{2}$, 有 $[\frac{(2m-2)c}{m+2} + c]^2 + (\frac{3c}{m+2})^2 = (\frac{3c}{2})^2$,

整理得 $3m^2 - 4m = 0$, 所以 $m = \frac{4}{3}$, 即直线 FP 的斜率为 $\frac{3}{4}$.

② 由 $a = 2c$ 可得 $b = \sqrt{3}c$, 故椭圆的方程可以表示为 $\frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1$.

由 ① 得直线 FP 的方程为 $3x - 4y + 3c = 0$,

联立椭圆的方程即 $\begin{cases} \frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1 \\ 3x - 4y + 3c = 0 \end{cases}$, 消去 y , 整理得 $7x^2 + 6cx - 13c^2 = 0$,

解得 $x = -\frac{13}{7}c$ (舍去) 或 $x = c$, 因此可得点 $P(c, \frac{3}{2}c)$.

则 $|FP| = \sqrt{(c+c)^2 + (\frac{3}{2}c)^2} = \frac{5}{2}c$,

所以 $|PQ| = |FP| - |FQ| = \frac{5}{2}c - \frac{3}{2}c = c$,

由已知, 线段 PQ 的长即为 PM 与 QN 这两条平行直线间的距离,

所以直线 PM 和 QN 都垂直于直线 FP .

因为 $QN \perp FP$, 所以 $|QN| = |FQ| \cdot \tan \angle QFN = \frac{3c}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{9c}{8}$,

所以 $\triangle FQN$ 的面积为 $\frac{1}{2}|FQ||QN| = \frac{27c^2}{32}$;

同理 $\triangle FPM$ 的面积等于 $\frac{75c^2}{32}$;

由四边形 $PQNM$ 的面积为 $3c$, 得 $\frac{75c^2}{32} - \frac{27c^2}{32} = 3c$, 整理得 $c^2 = 2c$,

又由 $c > 0$, 得 $c = 2$.

所以, 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

标注

【题型】平面解析几何 > 圆锥曲线中确定基本量的问题 > 圆锥曲线基本概念应用问题

【题型】平面解析几何 > 椭圆与双曲线的几何性质问题 > 求椭圆的离心率

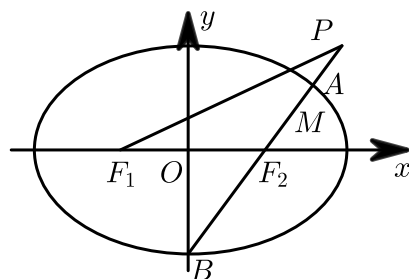
【知识点】平面解析几何 > 椭圆 > 直线和椭圆的位置关系

【知识点】平面解析几何 > 椭圆 > 椭圆的定义、标准方程 > 椭圆的标准方程

2

2014年广东惠州高三一模理科第20题14分

在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $P(a, b)$ ($a > b > 0$) 为动点, F_1, F_2 分别为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左右焦点. 已知 $\triangle F_1PF_2$ 为等腰三角形.



(1) 求椭圆的离心率 e ;

(2) 设直线 PF_2 与椭圆相交于 A, B 两点, M 是直线 PF_2 上的点, 满足 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = -2$, 求点 M 的轨迹方程.

答案

- (1) $e = \frac{1}{2}$.
 (2) $18x^2 - 16\sqrt{3}xy - 15 = 0 (x > 0)$.

解析

- (1) 设 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0) (c > 0)$
 由题意, 可得 $|PF_2| = |F_1F_2|$,
 即 $\sqrt{(a-c)^2 + b^2} = 2c$.
 整理得 $2\left(\frac{c}{a}\right)^2 + \frac{c}{a} - 1 = 0$,
 得 $\frac{c}{a} = -1$ (舍), 或 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$,
 所以 $e = \frac{1}{2}$.
- (2) 由 (1) 知 $a = 2c, b = \sqrt{3}c$,
 可得椭圆方程为 $3x^2 + 4y^2 = 12c^2$,
 直线 PF_2 方程为 $y = \sqrt{3}(x - c)$.
 A, B 两点的坐标满足方程组 $\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 12c^2, \\ y = \sqrt{3}(x - c). \end{cases}$
 消去 y 并整理, 得 $5x^2 - 8cx = 0$.
 解得 $x_1 = 0, x_2 = \frac{8}{5}c$.
 得方程组的解 $\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = -\sqrt{3}c, \end{cases} \begin{cases} x_2 = \frac{8}{5}c, \\ y_2 = \frac{3\sqrt{3}}{5}c. \end{cases}$
 不妨设 $A(\frac{8}{5}c, \frac{3\sqrt{3}}{5}c), B(0, -\sqrt{3}c)$
 设点 M 的坐标为 (x, y) , 则
 $\overrightarrow{AM} = (x - \frac{8}{5}c, y - \frac{3\sqrt{3}}{5}c), \overrightarrow{BM} = (x, y + \sqrt{3}c)$,
 由 $y = \sqrt{3}(x - c) \Rightarrow c = x - \frac{\sqrt{3}}{3}y$.
 于是 $\overrightarrow{AM} = (\frac{8\sqrt{3}}{15}y - \frac{3}{5}x, \frac{8}{5}y - \frac{3\sqrt{3}}{5}x)$,
 $\overrightarrow{BM} = (x, \sqrt{3}x)$. 由 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = -2$,
 即 $(\frac{8\sqrt{3}}{15}y - \frac{3}{5}x) \cdot x + (\frac{8}{5}y - \frac{3\sqrt{3}}{5}x) \cdot \sqrt{3}x = -2$,
 化简得 $18x^2 - 16\sqrt{3}xy - 15 = 0$.
 将 $y = \frac{18x^2 - 15}{16\sqrt{3}x}$ 代入 $c = x - \frac{\sqrt{3}}{3}y$, 得 $c = \frac{10x^2 + 5}{16x} > 0$.
 所以 $x > 0$.
 因此, 点 M 的轨迹方程是 $18x^2 - 16\sqrt{3}xy - 15 = 0 (x > 0)$.

标注

【知识点】 平面解析几何 > 椭圆 > 直线和椭圆的位置关系

【题型】平面解析几何 > 直线与圆锥曲线问题 > 向量点乘问题

3 2020~2021学年12月北京东城区北京市第二中学高三上学期月考第20题15分

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右顶点为 A ，上顶点为 B ，已知椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ， $|AB| = \sqrt{13}$ 。

- (1) 求椭圆的方程。
- (2) 设直线 $l: y = kx (k < 0)$ 与椭圆交于 P, Q 两点， l 与直线 AB 交于点 M ，且点 P, M 均在第四象限，若 $\triangle BPM$ 的面积是 $\triangle BPQ$ 面积的2倍，求 k 的值。

答案

- (1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 。
- (2) $-\frac{1}{2}$ 。

解析

- (1) $\frac{c^2}{a^2} = \frac{5}{9}$ ，且 $a^2 = b^2 + c^2$ ，可得 $2a = 3b$ ，
而且 $|AB| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$ ，从而 $a = 3, b = 2$ ，
即椭圆方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 。
- (2) 设点 P 的坐标为 (x_1, y_1) ，点 M 的坐标为 (x_2, y_2) ，
由题意， $x_2 > x_1 > 0$ ，点 Q 的坐标为 $(-x_1, -y_1)$ ，
由 $\triangle BPM$ 的面积是 $\triangle BPQ$ 面积的2倍可得 $|PM| = 2|PQ|$ ，
从而 $x_2 - x_1 = 2[x_1 - (-x_1)]$ ，即 $x_2 = 5x_1$ 。
直线 AB 的方程为 $2x + 3y = 6$ ，
由方程组 $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ y = kx \end{cases}$ 消去 y ，可得 $x_2 = \frac{6}{3k+2}$ ，
由方程组 $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = kx \end{cases}$ 消去 y 可得 $x_1 = \frac{6}{\sqrt{9k^2+4}}$ 。
而且 $x_2 = 5x_1$ ，带入两边平方，整理可得 $18k^2 + 25k + 8 = 0$ ，
解得 $k = -\frac{8}{9}$ 或 $k = -\frac{1}{2}$ 。
当 $k = -\frac{8}{9}$ 时， $x_2 = -9 < 0$ 不合题意，
当 $k = -\frac{1}{2}$ 时， $x_2 = 12, x_1 = \frac{12}{5}$ 满足，所以 $k = -\frac{1}{2}$ 。

标注

【题型】平面解析几何 > 直线与圆锥曲线问题 > 面积问题

【知识点】平面解析几何 > 椭圆 > 直线和椭圆的位置关系

4 2015年高考真题天津卷理科第19题

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 $F(-c, 0)$ ，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，点 M 在椭圆上且位于第一象限，直线 FM 被圆 $x^2 + y^2 = \frac{b^2}{4}$ 截得的线段的长为 c ， $|FM| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 。

- (1) 求直线 FM 的斜率；
- (2) 求椭圆的方程；
- (3) 设动点 P 在椭圆上，若直线 FP 的斜率大于 $\sqrt{2}$ ，求直线 OP (O 为原点) 的斜率的取值范围。

答案

- (1) $k_{FM} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- (2) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$
- (3) $k_{OP} \in \left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

解析

- (1) 依题意 $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$ ，所以 $b^2 = 2c^2$ ，
所以圆方程为 $x^2 + y^2 = \frac{c^2}{2}$ ，半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}c$ 。
设 FM 与圆 O 交于 A, B 两点， $OT \perp FM$ ，垂足为 T ，则 $AT = \frac{c}{2}$ ， $OA = \frac{\sqrt{2}}{2}c$ 。
所以 $OT = \frac{c}{2}$ 。
在 $Rt\triangle FOT$ 中， $OF = c$ ， $OT = \frac{c}{2}$ ，
所以 $\angle TFO = 30^\circ$ ，
所以 $k_{FM} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。
- (2) 依题意 M 点坐标为 $\left(2 - c, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ ，代入椭圆方程 $\frac{x^2}{3c^2} + \frac{y^2}{2c^2} = 1$ 得 $c = 1$ 。
所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 。
- (3) 设 $P(x_0, y_0)$ ，则 $2x_0^2 + 3y_0^2 = 6$ 。
因为 $k_{FP} = \frac{y_0}{x_0 + 1} > \sqrt{2}$ ，
所以 $y_0^2 > 2(x_0 + 1)^2$ ，
所以 $6 = 2x_0^2 + 3y_0^2 > 2x_0^2 + 3 \cdot 2(x_0 + 1)^2 = 8x_0^2 + 12x_0 + 6$ ，
解得 $x_0 \in \left(-\frac{3}{2}, 0\right) (x_0 \neq -1)$ ，
所以 $k_{OP}^2 = \frac{y_0^2}{x_0^2} = \frac{2 - \frac{2}{3}x_0^2}{x_0^2} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{x_0^2}$ 。
① 当 $x_0 \in (-1, 0)$ 时， $k_{OP}^2 > \frac{4}{3}$ ，

因为 $x_0 < 0, y_0 > 0$,

所以 $k_{OP} < 0$,

所以 $k_{OP} < -\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

②当 $x_0 \in \left(-\frac{3}{2}, -1\right)$ 时, $k_{OP}^2 \in \left(\frac{2}{9}, \frac{4}{3}\right)$,

因为 $x_0 < 0, y_0 < 0$,

所以 $k_{OP} > 0$,

所以 $k_{OP} \in \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

综上, $k_{OP} \in \left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

标注

【知识点】平面解析几何 > 椭圆 > 直线和椭圆的位置关系

【题型】平面解析几何 > 直线与圆锥曲线问题 > 最值问题

5

2017~2018学年10月北京东城区北京市第一六六中学高三上学期月考理科第18题13分

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F , 右顶点为 A , 离心率为 $\frac{1}{2}$. 已知 A 是抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, F 到抛物线的准线 l 的距离为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆的方程和抛物线的方程.

(2) 设 l 上两点 P, Q 关于 x 轴对称, 直线 AP 与椭圆相交于点 B (B 异于点 A), 直线 BQ 与 x 轴相交于点 D . 若 $\triangle APD$ 的面积为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 求直线 AP 的方程.

答案

(1) 椭圆的方程为 $x^2 + \frac{4y^2}{3} = 1$, 抛物线的方程为 $y^2 = 4x$.

(2) 直线 AP 的方程为 $3x + \sqrt{6}y - 3 = 0$, 或 $3x - \sqrt{6}y - 3 = 0$.

解析

(1) 设 F 的坐标为 $(-c, 0)$. 依题意, $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, $\frac{p}{2} = a$, $a - c = \frac{1}{2}$, 解得 $a = 1$, $c = \frac{1}{2}$, $p = 2$, 于是 $b^2 = a^2 - c^2 = \frac{3}{4}$.

所以, 椭圆的方程为 $x^2 + \frac{4y^2}{3} = 1$, 抛物线的方程为 $y^2 = 4x$.

(2) 设直线 AP 的方程为 $x = my + 1 (m \neq 0)$,

与直线 l 的方程 $x = -1$ 联立, 可得 $P(-1, -\frac{2}{m})$, 故 $Q(-1, \frac{2}{m})$,

联立方程 $\begin{cases} x = my + 1 \\ x^2 + \frac{4y^2}{3} = 1 \end{cases}$, 消去 x 整理得 $(3m^2 + 4)y^2 + 6my = 0$, 解得 $y = 0$ 或

$y = \frac{-6m}{3m^2 + 4}$.

由点 B 异于点 A ，可得 $B(\frac{-3m^2+4}{3m^2+4}, \frac{-6m}{3m^2+4})$ ，

由 $Q(-1, \frac{2}{m})$ ，可得直线 BQ 的方程为

$$(\frac{-6m}{3m^2+4} - \frac{2}{m})(x+1) - (\frac{-3m^2+4}{3m^2+4} + 1)(y - \frac{2}{m}) = 0,$$

令 $y=0$ ，解得 $x = \frac{2-3m^2}{3m^2+2}$ ，故 $D(\frac{2-3m^2}{3m^2+2}, 0)$ ，

$$\text{所以 } |AD| = 1 - \frac{2-3m^2}{3m^2+2} = \frac{6m^2}{3m^2+2},$$

又因为 $\triangle APD$ 的面积为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ，

$$\text{故 } \frac{1}{2} \times \frac{6m^2}{3m^2+2} \times \frac{2}{|m|} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \text{ 整理得 } 3m^2 - 2\sqrt{6}|m| + 2 = 0,$$

$$\text{解得 } |m| = \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ 所以 } m = \pm \frac{\sqrt{6}}{3},$$

所以，直线 AP 的方程为 $3x + \sqrt{6}y - 3 = 0$ ，或 $3x - \sqrt{6}y - 3 = 0$ 。

标注

【题型】平面解析几何 > 直线与圆锥曲线问题 > 面积问题

【知识点】平面解析几何 > 椭圆 > 直线和椭圆的位置关系

6

2012年高考真题天津卷文科第19题

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，点 $P(\frac{\sqrt{5}}{5}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a)$ 在椭圆上。

(1) 求椭圆的离心率。

(2) 设 A 为椭圆的左顶点， O 为坐标原点。若点 Q 在椭圆上且满足 $|AQ| = |AO|$ ，求直线 OQ 的斜率的值。

答案

(1) $e = \frac{\sqrt{6}}{4}$ 。

(2) $k = \pm\sqrt{5}$ 。

解析

(1) 因为点 $P(\frac{\sqrt{5}}{5}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a)$ 在椭圆上，

$$\text{故 } \frac{a^2}{5a^2} + \frac{a^2}{2b^2} = 1, \text{ 可得 } \frac{b^2}{a^2} = \frac{5}{8}.$$

$$\text{于是 } e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{3}{8}, \text{ 所以椭圆的离心率 } e = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

(2) 设直线 OQ 的斜率为 k ，则其方程为 $y = kx$ ，

设点 Q 的坐标为 (x_0, y_0) ，

$$\text{由条件得 } \begin{cases} y_0 = kx_0 \\ \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \end{cases}, \text{ 消去 } y_0 \text{ 并整理得}$$

$$x_0^2 = \frac{a^2 b^2}{k^2 a^2 + b^2} \quad ①$$

由 $|AQ| = |AO|$, $A(-a, 0)$ 及 $y_0 = kx_0$, 得 $(x_0 + a)^2 + k^2 x_0^2 = a^2$,

整理得 $(1 + k^2)x_0^2 + 2ax_0 = 0$, 而 $x_0 \neq 0$,

故 $x_0 = \frac{-2a}{1 + k^2}$, 代入①,

整理得 $(1 + k^2)^2 = 4k^2 \cdot \frac{a^2}{b^2} + 4$

由 (I) 知 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{5}{8}$, 故 $(1 + k^2)^2 = \frac{32}{5}k^2 + 4$,

即 $5k^4 - 22k^2 - 15 = 0$, 可得 $k^2 = 5$,

所以直线 OQ 的斜率 $k = \pm\sqrt{5}$.

标注

【题型】平面解析几何 > 圆锥曲线中确定基本量的问题 > 圆锥曲线基本概念应用问题

【知识点】平面解析几何 > 椭圆 > 直线和椭圆的位置关系

7

2008年天津高考文科

已知中心在原点的双曲线 C 的一个焦点是 $F_1(-3, 0)$, 一条渐近线的方程是 $\sqrt{5}x - 2y = 0$.

(1) 求双曲线 C 的方程

(2) 若以 $k(k \neq 0)$ 为斜率的直线 l 与双曲线 C 相交于两个不同的点 M, N , 且线段 MN 的垂直平分线与两坐标轴围成的三角形的面积为 $\frac{81}{2}$, 求 k 的取值范围.

答案

(1) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$

(2) $\left(-\infty, -\frac{5}{4}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{4}, \infty\right)$

解析

(1) 设双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$. 由题设得

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 9, \\ \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}. \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a^2 = 4, \\ b^2 = 5. \end{cases} \text{所以双曲线 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

(2) 设直线 l 方程为 $y = kx + m (k \neq 0)$. 点 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$ 的坐标满足方程组

$$\begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1. \end{cases}$$

将①式代入②式, 得 $\frac{x^2}{4} - \frac{(kx + m)^2}{5} = 1$, 整理得 $(5 - 4k^2)x^2 - 8kmx - 4m^2 - 20 = 0$

此方程有两个不等实根, 于是 $5 - 4k^2 \neq 0$,

且 $\Delta = (-8km)^2 + 4(5 - 4k^2)(4m^2 + 20) > 0$. 整理得

$$m^2 + 5 - 4k^2 > 0 . \quad (3)$$

由根与系数的关系可知线段 MN 的中点坐标 (x_0, y_0) 满足

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4km}{5 - 4k^2}, y_0 = kx_0 + m = \frac{5m}{5 - 4k^2}$$

从而线段 MN 的垂直平分线的方程为 $y - \frac{5m}{5 - 4k^2} = -\frac{1}{k} \left(x - \frac{4km}{5 - 4k^2} \right)$.

此直线与 x 轴, y 轴的交点坐标分别为 $\left(\frac{9km}{5 - 4k^2}, 0 \right), \left(0, \frac{9m}{5 - 4k^2} \right)$.

由题设可得 $\frac{1}{2} \left| \frac{9km}{5 - 4k^2} \right| \cdot \left| \frac{9m}{5 - 4k^2} \right| = \frac{81}{2}$ 整理得 $m^2 = \frac{(5 - 4k^2)^2}{|k|}, k \neq 0$.

将上式代入③式得 $\frac{(5 - 4k^2)^2}{|k|} + 5 - 4k^2 > 0$,

整理得 $(4k^2 - 5)(4k^2 - |k| - 5) > 0, k \neq 0$.

解得 $0 < |k| < \frac{\sqrt{5}}{2}$ 或 $|k| > \frac{5}{4}$.

所以 k 的取值范围是 $\left(-\infty, -\frac{5}{4} \right) \cup \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, 0 \right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \cup \left(\frac{5}{4}, \infty \right)$

标注

【题型】平面解析几何 > 直线与圆锥曲线问题 > 面积问题

【知识点】平面解析几何 > 双曲线 > 直线和双曲线的位置关系

8

2019~2020学年5月四川成都双流县双流中学高二下学期月考文科第20题12分

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 连接椭圆的四个顶点得到的菱形的面积为4

(1) 求椭圆的方程 .

(2) 设直线 l 与椭圆相交于不同的两点 A, B , 已知点 A 的坐标为 $(-a, 0)$, 点 $Q(0, y_0)$ 在线段 AB 的垂直平分线上, 且 $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = 4$, 求 y_0 的值 .

答案

(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) $y_0 = \pm 2\sqrt{2}$ 或 $y_0 = \pm \frac{2\sqrt{14}}{5}$.

解析

(1) 由 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 得 $3a^2 = 4c^2$,

再由 $c^2 = a^2 - b^2$, 得 $a = 2b$.

由题意可知, $\frac{1}{2} \times 2a \times 2b = 4$, 即 $ab = 2$.

解方程组 $\begin{cases} a = 2b \\ ab = 2 \end{cases}$ 得 $a = 2, b = 1$. 所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 由(1)可知 $A(-2, 0)$, 设 B 点的坐标为 (x_1, y_1) , 直线 l 的斜率为 k ,

则直线 l 的方程为 $y = k(x + 2)$, 于是 A, B 两点的坐标满足方程组 $\begin{cases} y = k(x + 2) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$

由方程组消去 y 并整理, 得 $(1 + 4k^2)x^2 + 16k^2x + (16k^2 - 4) = 0$,

由 $-2x_1 = \frac{16k^2 - 4}{1 + 4k^2}$, 得 $x_1 = \frac{2 - 8k^2}{1 + 4k^2}$, 从而 $y_1 = \frac{4k}{1 + 4k^2}$,

设线段 AB 的中点为 M , 则 M 的坐标为 $(-\frac{8k^2}{1 + 4k^2}, \frac{2k}{1 + 4k^2})$.

以下分两种情况:

(1) 当 $k = 0$ 时, 点 B 的坐标为 $(2, 0)$.

线段 AB 的垂直平分线为 y 轴, 于是 $\vec{QA} = (-2, -y_0)$, $\vec{QB} = (2, -y_0)$,

由 $\vec{QA} \cdot \vec{QB} = 4$ 得 $y_0 = \pm 2\sqrt{2}$.

(2) 当 $k \neq 0$ 时, 线段 AB 的垂直平分线方程为 $y - \frac{2k}{1 + 4k^2} = \frac{1}{k}(x + \frac{8k^2}{1 + 4k^2})$

令 $x = 0$, 解得 $y_0 = \frac{6k}{1 + 4k^2}$.

由 $\vec{QA} = (-2, -y_0)$, $\vec{QB} = (x_1, y_1 - y_0)$,

$\vec{QA} \cdot \vec{QB} = -2x_1 - y_0(y_1 - y_0)$

$= \frac{-2(2 - 8k^2)}{1 + 4k^2} + \frac{6k}{1 + 4k^2}(\frac{4k}{1 + 4k^2} + \frac{6k}{1 + 4k^2})$,

整理得 $7k^2 = 2$, 故 $k = \pm \frac{\sqrt{14}}{7}$, 所以 $y_0 = \pm \frac{2\sqrt{14}}{5}$.

综上 $y_0 = \pm 2\sqrt{2}$ 或 $y_0 = \pm \frac{2\sqrt{14}}{5}$.

标注

【知识点】平面向量 > 平面向量的运算 > 数量积 > 数量积的坐标表达式

【知识点】平面解析几何 > 直线与方程 > 直线的位置关系 > 直线的垂直

【知识点】平面解析几何 > 椭圆 > 椭圆的简单几何性质 > 椭圆的离心率

【知识点】平面解析几何 > 椭圆 > 直线和椭圆的位置关系

【题型】平面解析几何 > 直线与圆锥曲线问题 > 向量点乘问题

【题型】平面解析几何 > 圆锥曲线中确定基本量的问题 > 椭圆、双曲线、抛物线的基本量求

解

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，右顶点为 A ，上顶点为 B 。已知 $|AB| = \frac{\sqrt{3}}{2} |F_1 F_2|$ 。

(1) 求椭圆的离心率。

(2) 设 P 为椭圆上异于其顶点的一点，以线段 PB 为直径的圆经过点 F_1 ，经过点 F_2 的直线 l 与该圆相切于点 M ， $|MF_2| = 2\sqrt{2}$ 。求椭圆的方程。

答案

(1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。

解析

(1) $\because a^2 + b^2 = \frac{3}{4} \cdot 4c^2 = 2(a^2 - b^2) \therefore a^2 = 2b^2, a^2 = 2c^2, \therefore e = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) 由 (1) 知 $a^2 = 2c^2, b^2 = c^2$,

故椭圆方程为 $\frac{x^2}{2c^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$ 。

设 $P(x_0, y_0)$ ，由 $F_1(-c, 0), B(0, c)$,

有 $\overrightarrow{F_1 P} = (x_0 + c, y_0), \overrightarrow{F_1 B} = (c, c)$ 。

由已知，有 $\overrightarrow{F_1 P} \cdot \overrightarrow{F_1 B} = 0$ ，即 $(x_0 + c)c + y_0 c = 0$ 。

又 $c \neq 0$ ，故有 $x_0 + y_0 + c = 0$ 。①

因为点 P 在椭圆上，所以 $\frac{x_0^2}{2c^2} + \frac{y_0^2}{c^2} = 1$ 。②

由①和②可得 $3x_0^2 + 4cx_0 = 0$ 。

而点 P 不是椭圆的顶点，

故 $x_0 = -\frac{4}{3}c$ 。

代入①得 $y_0 = \frac{c}{3}$ ，即点 P 的坐标为 $(-\frac{4c}{3}, \frac{c}{3})$ 。

设圆的圆心为 $T(x_1, y_1)$ ，

则 $x_1 = \frac{-\frac{4}{3}c + 0}{2} = -\frac{2}{3}c, y_1 = \frac{-\frac{c}{3} + c}{2} = \frac{2}{3}c$ ，

进而圆的半径 $r = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - c)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}c$ 。

由已知，有 $|TF_2|^2 = |MF_2|^2 + r^2$ ，

又 $|MF_2| = 2\sqrt{2}$ ，

故有 $(c + \frac{2}{3}c)^2 + (0 - \frac{2}{3}c)^2 = 8 + \frac{5}{9}c^2$ ，解得 $c^2 = 3$ 。

所以所求椭圆的方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。

标注

【知识点】平面解析几何 > 椭圆 > 直线和椭圆的位置关系

【题型】平面解析几何 > 圆锥曲线中确定基本量的问题 > 椭圆、双曲线、抛物线的基本量求解

10

2018~2019学年12月天津静海区静海区第一中学高二上学期月考第19题15分

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上顶点为 B ，左焦点为 F ，离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ，

- (1) 求直线 BF 的斜率；
- (2) (Ⅱ) 设直线 BF 与椭圆交于点 P (P 异于点 B)，过点 B 且垂直于 BF 的直线与椭圆交于点 Q (Q 异于点 B) 直线 PQ 与 y 轴交于点 M ， $|PM| = \lambda |MQ|$ 。(i) 求 λ 的值；
(ii) 若 $|PM| \sin \angle BQP = \frac{7\sqrt{5}}{9}$ ，求椭圆的方程。

答案

- (1) 2
- (2) (i) $\lambda = \frac{7}{8}$ (ii) 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$

解析

- (1) 设 $F(-c, 0)$ ，由已知离心率 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 与 $a^2 = b^2 + c^2$ ，可得 $a = \sqrt{5}c$ ， $b = 2c$ ，
 $\therefore B(0, b)$ ， $F(-c, 0)$ 。

故直线 BF 的斜率为 $k = \frac{b-0}{0-(-c)} = \frac{2c}{c} = 2$ 。

- (2) 设点 $P(x_P, y_P)$ ， $Q(x_Q, y_Q)$ ， $M(x_M, y_M)$ 。

(i) 由 (I) 可得椭圆的方程为 $\frac{x^2}{5c^2} + \frac{y^2}{4c^2} = 1$ ，直线 BF 的方程为 $y = 2x + 2c$ ，
将直线方程与椭圆方程联立，消去 y ，整理得 $3x^2 + 5cx = 0$ ，解得 $x_P = -\frac{5c}{3}$ ，

$\therefore BQ \perp BP$ ， $\therefore BQ$ 的方程为 $y = -\frac{1}{2}x + 2c$ ，与椭圆方程联立，消去 y ，

整理得 $21x^2 - 40cx = 0$ ，解得 $x_Q = \frac{40c}{21}$ 。

又因为 $\lambda = \frac{|PM|}{|MQ|}$ ， $x_M = 0 \therefore \lambda = \frac{|x_M - x_P|}{|x_Q - x_M|} = \frac{|x_P|}{|x_Q|} = \frac{7}{8}$ 。

(ii) 由 $\frac{|PM|}{|MQ|} = \frac{7}{8}$ ， $\therefore \frac{|PM|}{|MQ| + |PM|} = \frac{7}{8+7} = \frac{7}{15}$ ， $\therefore |PQ| = \frac{15}{7}|PM|$ ，

又 $\therefore y_P = 2x_P + 2c = -\frac{4}{3}c$ ，

$\therefore |BP| = \sqrt{\left(0 + \frac{5c}{3}\right)^2 + \left(2c + \frac{4c}{3}\right)^2} = \frac{5\sqrt{5}}{3}c$ ，

$\therefore \frac{5\sqrt{5}}{3}c = \frac{5\sqrt{5}}{3}$ ， $\therefore c = 1$ 。

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ 。

标注

【题型】平面解析几何 > 直线与方程 > 倾斜角和斜率的概念 > 斜率计算

【题型】平面解析几何 > 圆锥曲线中确定基本量的问题 > 椭圆、双曲线、抛物线的基本量求解

【知识点】平面解析几何 > 椭圆 > 椭圆的定义、标准方程 > 椭圆的标准方程

【知识点】平面解析几何 > 椭圆 > 椭圆的简单几何性质 > 椭圆的离心率

【知识点】平面解析几何 > 椭圆 > 直线和椭圆的位置关系

11 2011年高考真题天津卷文科第18题

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 . 点 $P(a, b)$ 满足 $|PF_2| = |F_1F_2|$.

- (1) 求椭圆的离心率 e .
- (2) 设直线 PF_2 与椭圆相交于 A, B 两点, 若直线 PF_2 与圆 $(x+1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 16$ 相交于 M, N 两点, 且 $|MN| = \frac{5}{8}|AB|$, 求椭圆的方程.

答案

- (1) $e = \frac{1}{2}$.
- (2) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

解析

- (1) 设 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0) (c > 0)$,

因为 $|PF_2| = |F_1F_2|$,

所以 $\sqrt{(a-c)^2 + b^2} = 2c$,

整理得 $2\left(\frac{c}{a}\right)^2 + \frac{c}{a} - 1 = 0$,

得 $\frac{c}{a} = -1$ (舍) 或 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$,

所以 $e = \frac{1}{2}$.

- (2) 由 (I) 知 $a = 2c, b = \sqrt{3}c$,

可得椭圆方程为 $3x^2 + 4y^2 = 12c^2$,

直线 FF_2 的方程为 $y = \sqrt{3}(x - c)$.

A, B 两点的坐标满足方程组 $\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 12c^2, \\ y = \sqrt{3}(x - c) \end{cases}$

消去 y 并整理, 得 $5x^2 - 8cx = 0$.

解得 $x_1 = 0, x_2 = \frac{8}{5}c$,

得方程组的解 $\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = -\sqrt{3}c, \end{cases} \begin{cases} x_2 = \frac{8}{5}c, \\ y_2 = \frac{3\sqrt{3}}{5}c. \end{cases}$

不妨设 $A\left(\frac{8}{5}c, \frac{3\sqrt{3}}{5}c\right)$, $B(0, -\sqrt{3}c)$,

$$\text{所以 } |AB| = \sqrt{\left(\frac{8}{5}c\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{5}c + \sqrt{3}c\right)^2} = \frac{16}{5}c.$$

$$\text{于是 } |MN| = \frac{5}{8}|AB| = 2c.$$

圆心 $(-1, \sqrt{3})$ 到直线 PF_2 的距离

$$d = \frac{|-\sqrt{3} - \sqrt{3} - \sqrt{3}c|}{2} = \frac{\sqrt{3}|2+c|}{2}.$$

$$\text{因为 } d^2 + \left(\frac{|MN|}{2}\right)^2 = 4^2, \text{ 所以 } \frac{3}{4}(2+c)^2 + c^2 = 16.$$

$$\text{整理得 } 7c^2 + 12c - 52 = 0, \text{ 得 } c = -\frac{26}{7} \text{ (舍)}, \text{ 或 } c = 2.$$

$$\text{所以椭圆方程为 } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

标注

【题型】平面解析几何 > 圆锥曲线中确定基本量的问题 > 椭圆、双曲线、抛物线的基本量求解

【知识点】平面解析几何 > 椭圆 > 直线和椭圆的位置关系

12

2017~2018学年陕西西安长安区长安区第一中学高二上学期期末文科第22题12分

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1$ ($a > \sqrt{3}$) 的右焦点为 F , 右顶点为 A , 已知 $\frac{1}{|OF|} + \frac{1}{|OA|} = \frac{3e}{|FA|}$, 其中 O 为原点, e 为椭圆的离心率.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设过点 A 的直线 l 与椭圆交于点 B (B 不在 x 轴上), 垂直于 l 的直线与 l 交于点 M , 与 y 轴交于点 H , 若 $BF \perp HF$, 且 $\angle MOA = \angle MAO$, 求直线 l 的斜率.

答案

$$(1) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$$(2) \pm \frac{\sqrt{6}}{4}$$

解析

$$(1) \text{ 设 } F(c, 0), \text{ 由 } \frac{1}{|OF|} + \frac{1}{|OA|} = \frac{3e}{|FA|},$$

$$\text{得 } \frac{1}{c} + \frac{1}{a} = \frac{3c}{a(a-c)}, \text{ 即 } a^2 - c^2 = 3c^2,$$

$$\text{又 } a^2 - c^2 = b^2 = 3, \text{ 解得 } c^2 = 1,$$

$$\text{因此 } a^2 = 4,$$

$$\text{所以椭圆的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 设直线的斜率为 k ($k \neq 0$), 则直线 l 的方程为 $y = k(x - 2)$,

设 $B(x_B, y_B)$, 由方程组 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ y = k(x-2), \end{cases}$ 消去 y ,

整理得 $(4k^2 + 3)x^2 - 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0$,

解得 $x = 2$ 或 $x = \frac{8k^2 - 6}{4k^2 + 3}$,

由题意得 $x_B = \frac{8k^2 - 6}{4k^2 + 3}$, 从而 $y_B = \frac{-12k}{4k^2 + 3}$,

由 (1) 知 $F(1, 0)$, 设 $H(0, y_H)$, 有 $\overrightarrow{FH} = (-1, y_H)$, $\overrightarrow{BF} = (\frac{9 - 4k^2}{4k^2 + 3}, \frac{12k}{4k^2 + 3})$,

由 $BF \perp HF$ 得 , $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{HF} = 0$,

所以 $\frac{4k^2 - 9}{4k^2 + 3} + \frac{12ky_H}{4k^2 + 3} = 0$, 解得 $y_H = \frac{9 - 4k^2}{12k}$,

因此直线 MH 的方程为 $y = -\frac{1}{k}x + \frac{9 - 4k^2}{12k}$,

设 $M(x_M, y_M)$, 由方程组 $\begin{cases} y = -\frac{1}{k}x + \frac{9 - 4k^2}{12k} \\ y = k(x - 2) \end{cases}$,

消去 y , 得 $x_M = \frac{20k^2 + 9}{12(k^2 + 1)}$,

在 $\triangle MAO$ 中 , $\angle MAO = \angle MOA \Rightarrow |MA| = |MO|$,

即 $(x_M - 2)^2 + y_M^2 = x_M^2 + y_M^2$,

化简得 $x_M = 1$, 即 $\frac{20k^2 + 9}{12(k^2 + 1)} = 1$,

解得 $k = \pm \frac{\sqrt{6}}{4}$,

所以直线的斜率为 $\pm \frac{\sqrt{6}}{4}$.

标注

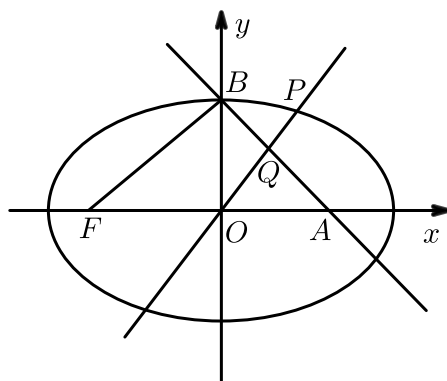
【题型】平面解析几何 > 直线与圆锥曲线问题 > 向量点乘问题

【知识点】平面解析几何 > 椭圆 > 直线和椭圆的位置关系

13

2018~2019学年浙江杭州西湖区杭州学军中学高二上学期期末第22题15分

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F , 上顶点为 B , 已知椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$, 点 A 的坐标为 $(b, 0)$, 且 $|FB| \cdot |AB| = 6\sqrt{2}$.



- (1) 求椭圆的方程 .
- (2) 设直线 $l: y = kx (k > 0)$ 与椭圆在第一象限的交点为 P , 且 l 与直线 AB 交于点 Q , 若 $\frac{|AQ|}{|PQ|} = \frac{5\sqrt{2}}{4} \sin \angle AOQ$ (O 为原点), 求 k 的值 .

答案

- (1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.
- (2) $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{11}{28}$.

解析

- (1) 设椭圆焦距为 $2c$, 由题意可得 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{5}{9}$,
 又由于 $a^2 = b^2 + c^2$, 可得 $2a = 3b$,
 由已知可得 $|FB| = a$, $|AB| = \sqrt{2}b$,
 由 $|FB| \cdot |AB| = 6\sqrt{2}$ 可得 $ab = 6$,
 得 $a = 3$, $b = 2$, 所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.
- (2) 设 P, Q 两点的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 由已知可得 $y_1 > y_2 > 0$,
 故 $|PQ| \sin \angle AOQ = y_1 - y_2$, 又因为 $|AQ| = \frac{y_2}{\sin \angle OAB}$,
 而 $\angle OAB = \frac{\pi}{4}$, 故 $|AQ| = \sqrt{2}y_2$,
 由 $\frac{|AQ|}{|PQ|} = \frac{5\sqrt{2}}{4} \sin \angle AOQ$ 可得 $5y_1 = 9y_2$,
 由方程组 $\begin{cases} y = kx \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$ 消去 x 可得 $y_1 = \frac{6k}{\sqrt{9k^2 + 4}}$,
 易知直线 AB 的方程为 $x + y - 2 = 0$,
 由方程组 $\begin{cases} y = kx \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$, 消去 x 可得 $y_2 = \frac{2k}{k+1}$,
 由 $5y_1 = 9y_2$ 可得 $5(k+1) = 3\sqrt{9k^2 + 4}$,
 两边平方, 整理可得 $56k^2 - 50k + 11 = 0$, 解得 $k = \frac{1}{2}$ 或 $k = \frac{11}{28}$,
 故 k 的值为 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{11}{28}$.

标注

【知识点】 平面解析几何 > 椭圆 > 直线和椭圆的位置关系

【题型】平面解析几何 > 圆锥曲线中确定基本量的问题 > 圆锥曲线基本概念应用问题

14 2015~2016学年3月北京海淀区中央民族大学附属中学高二下学期月考理科第19题15分

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点为 F_1, F_2 , 右顶点为 A , 上顶点为 B . 已知 $|AB| = \frac{\sqrt{3}}{2} |F_1 F_2|$.

- (1) 求椭圆的离心率;
- (2) 设 P 为椭圆上异于其顶点的一点, 以线段 PB 为直径的圆经过点 F_1 , 经过原点的直线 l 与该圆相切. 求直线 l 的斜率.

答案

- (1) 椭圆的离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- (2) 直线 l 的斜率为 $4 + \sqrt{15}$ 或 $4 - \sqrt{15}$.

解析

- (1) 设椭圆的右焦点 F_2 的坐标为 $(c, 0)$. 由 $|AB| = \frac{\sqrt{3}}{2} |F_1 F_2|$, 可得 $a^2 + b^2 = 3c^2$, 又 $b^2 = a^2 - c^2$, 则 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{2}$.
 $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3}c$, 所以 $2a^2 - c^2 = 3c^2$, 解得 $a = \sqrt{2}c$, $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 所以, 椭圆的离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- (2) 由 (I) 知 $a^2 = 2c^2$, $b^2 = c^2$. 故椭圆方程为 $\frac{x^2}{2c^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$.
 设 $P(x_0, y_0)$. 由 $F_1(-c, 0)$, $B(0, c)$, 有 $\overrightarrow{F_1 P} = (x_0 + c, y_0)$, $\overrightarrow{F_1 B} = (c, c)$.
 由已知, 有 $\overrightarrow{F_1 P} \cdot \overrightarrow{F_1 B} = 0$, 即 $(x_0 + c)c + y_0 c = 0$. 又 $c \neq 0$, 故有
 $x_0 + y_0 + c = 0$. ①

又因为点 P 在椭圆上, 故

$$\frac{x_0^2}{2c^2} + \frac{y_0^2}{c^2} = 1. \quad ②$$

由①和②可得 $3x_0^2 + 4cx_0 = 0$. 而点 P 不是椭圆的顶点, 故 $x_0 = -\frac{4c}{3}$, 代入①得

$$y_0 = \frac{c}{3}, \text{ 即点 } P \text{ 的坐标为 } \left(-\frac{4c}{3}, \frac{c}{3}\right).$$

设圆的圆心为 $T(x_1, y_1)$, 则 $x_1 = \frac{-\frac{4}{3}c + 0}{2} = -\frac{2}{3}c$, $y_1 = \frac{\frac{c}{3} + c}{2} = \frac{2}{3}c$, 进而圆的半径
 $r = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - c)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}c$.

设直线 l 的斜率为 k , 依题意, 直线 l 的方程为 $y = kx$.

由 l 与圆相切, 可得 $\frac{|kx_1 - y_1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = r$, 即 $\frac{|k(-\frac{2c}{3}) - \frac{2c}{3}|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{\sqrt{5}}{3}c$,

整理得 $k^2 - 8k + 1 = 0$, 解得 $k = 4 \pm \sqrt{15}$.

所以, 直线 l 的斜率为 $4 + \sqrt{15}$ 或 $4 - \sqrt{15}$.

标注

【题型】平面解析几何 > 直线与圆锥曲线问题 > 向量点乘问题

【知识点】平面解析几何 > 椭圆 > 直线和椭圆的位置关系

15

2009年高考真题天津卷文科第17题14分

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点分别为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0) (c > 0)$, 过点 $E(\frac{a^2}{c}, 0)$ 的直线与椭圆相交于点 A, B 两点, 且 $F_1A // F_2B, |F_1A| = 2|F_2B|$.

- (1) 求椭圆的离心率 .
- (2) 直线 AB 的斜率 .
- (3) 设点 C 与点 A 关于坐标原点对称, 直线 F_2B 上有一点 $H(m, n) (m \neq 0)$ 在 $\triangle AF_1C$ 的外接圆上, 求 $\frac{n}{m}$ 的值 .

答案

- (1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- (2) $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$.
- (3) $\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

解析

(1) 由 $F_1A // F_2B, |F_1A| = 2|F_2B|$, 得 $\frac{|EF_2|}{|EF_1|} = \frac{|F_2B|}{|F_1A|} = \frac{1}{2}$. 从而

$$\frac{\frac{a^2}{c} - c}{\frac{a^2}{c} + c} = \frac{1}{2} , \text{ 整理得 } a^2 = 3c^2 , \text{ 故离心率 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3} .$$

(2) 由 (1) 知, $b^2 = a^2 - c^2 = 2c^2$, 所以椭圆的方程可以写为 $2x^2 + 3y^2 = 6c^2$

设直线 AB 的方程为 $y = k(x - \frac{a^2}{c})$ 即 $y = k(x - 3c)$

由已知设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 则它们的坐标满足方程组 $\begin{cases} y = k(x - 3c) \\ 2x^2 + 3y^2 = 6c^2 \end{cases}$

消去 y 整理, 得 $(2 + 3k^2)x^2 - 18k^2cx + 27k^2c^2 - 6c^2 = 0$

依题意, $\Delta = 48c^2(1 - 3k^2) > 0, -\frac{\sqrt{3}}{3} < k < \frac{\sqrt{3}}{3}$

而 $x_1 + x_2 = \frac{18k^2c}{2 + 3k^2}, x_1x_2 = \frac{27k^2c^2 - 6c^2}{2 + 3k^2}$, 有题设知, 点 B 为线段 AE 的中点, 所以

$$x_1 + 3c = 2x_2$$

联立三式, 解得 $x_1 = \frac{9k^2c - 2c}{2 + 3k^2}, x_2 = \frac{9k^2c + 2c}{2 + 3k^2}$, 将结果代入韦达定理中解得 $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$.

- (3) 由(2)知, $x_1 = 0, x_2 = \frac{3c}{2}$, 当 $k = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ 时, 得 $A(0, \sqrt{2}c)$ 由已知得 $C(0, -\sqrt{2}c)$ 线段 AF_1 的垂直平分线 l 的方程为 $y - \frac{\sqrt{2}c}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x + c)$ 直线 l 与 x 轴的交点 $(\frac{c}{2}, 0)$ 是 $\triangle AF_1C$ 的外接圆的圆心, 因此外接圆的方程为 $(x - \frac{c}{2})^2 + y^2 = (\frac{c}{2} + c)^2$ 直线 BF_2 的方程为 $y = \sqrt{2}(x - c)$, 于是点 $H(m, n)$ 满足方程组 $\begin{cases} (m - \frac{c}{2})^2 + n^2 = \frac{9c^2}{4} \\ n = \sqrt{2}(m - c) \end{cases}$ 由 $m \neq 0$, 解得 $m = \frac{5c}{3}, n = \frac{2\sqrt{2}c}{3}$, 故 $\frac{n}{m} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$ 当 $k = \frac{\sqrt{2}}{3}$ 时, 同理可得 $\frac{n}{m} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

标注

【知识点】平面解析几何 > 椭圆 > 直线和椭圆的位置关系

【题型】平面解析几何 > 直线与圆锥曲线问题 > 定值问题 (证明、探究)

16 2017~2018学年12月天津和平区天津市第二十中学高二上学期月考文科第19题10分

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F , 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 过点 F 且与 x 轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

- (1) 求椭圆的方程.
- (2) 设 A, B 分别为椭圆的左右顶点, 过点 F 且斜率为 k 的直线与椭圆交于 C, D 两点, 若 $\vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{CB} = 8$, 求 k 的值.

答案

- (1) 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$.
- (2) $k = \pm\sqrt{2}$.

解析

- (1) 设 $F(-c, 0)$, 由 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 知 $a = \sqrt{3}c$, 过点 F 且与 x 轴垂直的直线为 $x = -c$, 代入椭圆方程有 $\frac{(-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 解得 $y = \pm \frac{\sqrt{6}b}{3}$, 于是 $\frac{2\sqrt{6}b}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 解得 $b = \sqrt{2}$, 又 $a^2 - c^2 = b^2$, 从而 $a = \sqrt{3}, c = 1$, 所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$.
- (2) 设点 $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$, 由 $F(-1, 0)$ 得直线 CD 的方程为 $y = k(x + 1)$, 由方程组 $\begin{cases} y = k(x + 1) \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$ 消去 y , 整理得 $(2 + 3k^2)x^2 + 6k^2x + 3k^2 - 6 = 0$

$$\begin{aligned} \text{求解可得 } x_1 + x_2 &= \frac{6k^2}{2+3k^2}, x_1 x_2 = \frac{3k^2-6}{2+3k^2}, \text{ 因为 } A(-\sqrt{3}, 0), B(\sqrt{3}, 0), \text{ 所以} \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} &= (x_1 + \sqrt{3}, y_1) \cdot (\sqrt{3} - x_2, -y_2) + (x_2 + \sqrt{3}, y_2) \cdot (\sqrt{3} - x_1, -y_1) \\ &= 6 - 2x_1 x_2 - 2y_1 y_2 = 6 - 2x_1 x_2 - 2k^2(x_1 + 1)(x_2 + 1) \\ &= 6 - (2 + 2k^2)x_1 x_2 - 2k^2(x_1 + x_2) - 2k^2 \\ &= 6 + \frac{2k^2+12}{2+3k^2} \\ \text{由已知得 } 6 + \frac{2k^2+12}{2+3k^2} &= 8, \text{ 解得 } k = \pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

标注

【题型】平面解析几何 > 曲线与方程 > 求曲线方程的问题

【题型】平面解析几何 > 直线与圆锥曲线问题 > 向量点乘问题

【知识点】平面解析几何 > 椭圆 > 直线和椭圆的位置关系

【知识点】平面解析几何 > 椭圆 > 椭圆的定义、标准方程 > 椭圆的标准方程

17

2016年高考真题天津卷理科第19题14分

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (a > \sqrt{3})$ 的右焦点为 F , 右顶点为 A . 已知 $\frac{1}{|OF|} + \frac{1}{|OA|} = \frac{3e}{|FA|}$, 其中 O 为原点, e 为椭圆的离心率.

- (1) 求椭圆的方程;
- (2) 设过点 A 的直线 l 与椭圆交于点 B (B 不在 x 轴上), 垂直于 l 的直线与 l 交于点 M , 与 y 轴交于点 H . 若 $BF \perp HF$, 且 $\angle MOA \leq \angle MAO$, 求直线 l 的斜率的取值范围.

答案

- (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$
- (2) $k \geq \frac{\sqrt{6}}{4}$ 或 $k \leq -\frac{\sqrt{6}}{4}$

解析

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{1}{|OF|} + \frac{1}{|OA|} &= \frac{3e}{|FA|} \\ \therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{a^2-3}} &= \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{a^2-3}}{a}}{a - \sqrt{a^2-3}}, \end{aligned}$$

解之得 $a = 2$,

$$\therefore \text{椭圆方程为: } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

- (2) 由已知, 设 l 斜率为 $k (k \neq 0)$, 方程为 $y = k(x-2)$

$$\text{设 } B(x_B, y_B), M(x_0, k(x_0-2)), H(0, y_H)$$

因为 $\angle MOA \leq \angle MAO$, 所以 $x_0 \geq 1$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = k(x-2) \end{cases} \Rightarrow (3+4k^2)x^2 - 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0, \Delta > 0 \text{ 成立}$$

$$\text{由韦达定理 } 2 \cdot x_B = \frac{16k^2 - 12}{3 + 4k^2}, \therefore x_B = \frac{8k^2 - 6}{3 + 4k^2}, y_B = k(x_B - 2) = \frac{-12k}{3 + 4k^2}$$

$$l_{HM}: y - k(x_0 - 2) = -\frac{1}{k}(x - x_0)$$

$$\text{令 } x = 0, \text{ 得 } y_H = \left(k + \frac{1}{k}\right)x_0 - 2k$$

$$\because HF \perp FB, \therefore \overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{FB} = (-1, y_H) \cdot (x_B - 1, y_B) = 0$$

$$\text{即 } 1 - x_B + y_H y_B = 1 - \frac{8k^2 - 6}{3 + 4k^2} - \frac{12k}{3 + 4k^2} \left[\left(k + \frac{1}{k}\right)x_0 - 2k \right] = 0$$

$$\therefore x_0 = \frac{9 + 20k^2}{12(k^2 + 1)} \geq 1, \therefore 8k^2 \geq 3$$

$$\therefore k \geq \frac{\sqrt{6}}{4} \text{ 或 } k \leq -\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

标注

【知识点】平面解析几何 > 椭圆 > 直线和椭圆的位置关系

【题型】平面解析几何 > 圆锥曲线中确定基本量的问题 > 椭圆、双曲线、抛物线的基本量求解

18 2012年高考真题天津卷理科第19题

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A, B , 点 P 在椭圆上且异于 A, B 两点, O 为坐标原点.

- (1) 若直线 AP 与 BP 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$, 求椭圆的离心率;
- (2) 若 $|AP| = |OA|$, 证明直线 OP 的斜率 k 满足 $|k| > \sqrt{3}$.

答案

(1) $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) 证明见解析.

解析

(1) 设点解: P 的坐标为 (x_0, y_0) , 由题意, 有

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \quad ①$$

$$\text{由 } A(-a, 0), B(a, 0), \text{ 得 } k_{AP} = \frac{y_0}{x_0 + a}, k_{BP} = \frac{y_0}{x_0 - a}.$$

$$\text{由 } k_{AP} \cdot k_{BP} = -\frac{1}{2}, \text{ 可得 } x_0^2 = a^2 - 2y_0^2,$$

$$\text{代入 } ① \text{ 并整理得 } (a^2 - 2b^2)y_0^2 = 0. \text{ 由于 } y_0 \neq 0,$$

$$\text{故 } a^2 = 2b^2, \text{ 于是 } e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{1}{2},$$

所以椭圆的离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) 依题意, 直线 OP 的方程为 $y = kx$,

设点 P 的坐标为 (x_0, y_0) ,

$$\text{由条件得} \begin{cases} y_0 = kx_0 \\ \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \end{cases} ,$$

$$\text{消去 } y_0 \text{ 并整理得 } x_0^2 = \frac{a^2 b^2}{k^2 a^2 + b^2} . \quad ②$$

由 $|AP| = |OA|$, $A(-a, 0)$ 及 $y_0 = kx_0$,

得 $(x_0 + a)^2 + k^2 x_0^2 = a^2$, 整理得

$$(1 + k^2) x_0^2 + 2ax_0 = 0 , \text{ 而 } x_0 \neq 0 ,$$

于是 $x_0 = \frac{-2a}{1 + k^2}$, 代入②, 整理得

$$(1 + k^2)^2 = 4k^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 4 , \text{ 由 } a > b > 0 ,$$

故 $(1 + k^2)^2 > 4k^2 + 4$, 即 $k^2 + 1 > 4$, 因此 $k^2 > 3$,

所以 $|k| > \sqrt{3}$.

标注

【知识点】 平面解析几何 > 椭圆 > 椭圆的简单几何性质 > 椭圆的离心率

【知识点】 平面解析几何 > 椭圆 > 直线和椭圆的位置关系

19 2018年高考真题天津卷文科第20题14分

设函数 $f(x) = (x - t_1)(x - t_2)(x - t_3)$, 其中 $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$, 且 t_1, t_2, t_3 是公差为 d 的等差数列 .

(1) 若 $t_2 = 0, d = 1$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程 .

(2) 若 $d = 3$, 求 $f(x)$ 的极值 .

(3) 若曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = -(x - t_2) - 6\sqrt{3}$ 有三个互异的公共点, 求 d 的取值范围 .

答案

(1) $x + y = 0$.

(2) 极大值为 $f(t_2 - \sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^3 - 9 \times (-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$, 极小值为

$$f(t_2 + \sqrt{3}) = (\sqrt{3})^3 - 9 \times (\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} .$$

(3) $(-\infty, -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}, +\infty)$.

解析

(1) 由已知, 可得 $f(x) = x(x - 1)(x + 1) = x^3 - x$,

故 $f'(x) = 3x^2 - 1$. 因此 $f(0) = 0$, $f'(0) = -1$,

又因为曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$,

故所求切线方程为 $x + y = 0$.

$$(2) \text{ 由已知可得 } f(x) = (x - t_2 + 3)(x - t_2)(x - t_2 - 3) = (x - t_2)^3 - 9(x - t_2) = x^3 - 3t_2x^2 + (3t_2^2 - 9)x - t_2^3 + 9t_2$$

故 $f'(x) = 3x^2 - 6t_2x + 3t_2^2 - 9$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = t_2 - \sqrt{3}$, 或 $x = t_2 + \sqrt{3}$,

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表

x	$(-\infty, t_2 - \sqrt{3})$	$t_2 - \sqrt{3}$	$(t_2 - \sqrt{3}, t_2 + \sqrt{3})$	$t_2 + \sqrt{3}$	$(t_2 + \sqrt{3}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(t_2 - \sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^3 - 9 \times (-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$.

函数 $f(x)$ 的极小值为 $f(t_2 + \sqrt{3}) = (\sqrt{3})^3 - 9 \times (\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$.

(3) 曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = -(x - t_2) - 6\sqrt{3}$ 有三个互异的公共点等价于关于 x 的方程

$$(x - t_2 + d)(x - t_2)(x - t_2 - d) + (x - t_2) + 6\sqrt{3} = 0 \text{ 有三个互异的实数解,}$$

$$\text{令 } u = x - t_2 \text{ 可得 } u^3 + (1 - d^2)u + 6\sqrt{3} = 0,$$

$$\text{设函数 } g(x) = x^3 + (1 - d^2)x + 6\sqrt{3},$$

则曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = -(x - t_2) - 6\sqrt{3}$ 有三个互异的公共点等价于函数 $y = g(x)$ 有三个零点.

$$g'(x) = 3x^2 + (1 - d^2),$$

$$\text{当 } d^2 \leq 1 \text{ 时, } g'(x) \geq 0,$$

这时 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 不合题意.

$$\text{当 } d^2 > 1 \text{ 时, 令 } g'(x) = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = -\frac{\sqrt{d^2 - 1}}{\sqrt{3}}, x_2 = \frac{\sqrt{d^2 - 1}}{\sqrt{3}},$$

易得, $g(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 上单调递增, 在 $[x_1, x_2]$ 上单调递减, 在 $(x_2, +\infty)$ 上单调递增.

$$g(x) \text{ 的极大值 } g(x_1) = g\left(-\frac{\sqrt{d^2 - 1}}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{3}(d^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{9} + 6\sqrt{3} > 0,$$

$$g(x) \text{ 的极小值 } g(x_2) = g\left(\frac{\sqrt{d^2 - 1}}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= -\frac{2\sqrt{3}(d^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{9} + 6\sqrt{3},$$

若 $g(x_2) \geq 0$, 由 $g(x)$ 的单调性可知函数 $y = g(x)$ 至多有两个零点, 不合题意.

若 $g(x_2) < 0$, 即 $(d^2 - 1)^{\frac{3}{2}} > 27$,

也就是 $|d| > \sqrt{10}$, 此时 $|d| > x_2$,

$g(|d|) = |d| + 6\sqrt{3} > 0$, 且 $-2|d| < x_1$,

$g(-2|d|) = -6|d|^3 - 2|d| + 6\sqrt{3} < -62\sqrt{10} + 6\sqrt{3} < 0$,

从而由 $g(x)$ 的单调性 , 可知函数 $y = g(x)$ 在区间 $(-2|d|, x_1)$, (x_1, x_2) , $(x_2, |d|)$ 内各有一个零点 , 符合题意 .

所以 , d 的取值范围是 $(-\infty, -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}, +\infty)$.

标注

【知识点】 导数 > 导数的概念及其意义 > 导数的几何意义

【知识点】 导数 > 导数的应用 > 导数与极值

【题型】 导数 > 导数的应用 > 利用导数研究函数的极值问题 > 求解函数极值

【题型】 导数 > 导数的应用 > 利用导数求曲线的切线方程问题 > 求在某点处的切线方程

【题型】 导数 > 导数的应用 > 利用导数研究函数的零点与交点问题 > 已知零点或根情况求参数范围