

圆锥曲线2

考试数据

2014 ~ 2019 年天津卷考频 100%，模拟题共 48 套试卷中出现频率 100%

知识模块	考点	天津卷	一模	二模
圆锥曲线	椭圆的定义、标准方程、性质	2014-19;2015-19; 2016-19;2017-19; 2018-19;2019-18	24次	24次
	椭圆与直线的位置关系	2014-19;2015-19; 2016-19;2017-19; 2018-19;2019-18	24次	24次

考点分析



高频考点

- ①椭圆的标准方程（如：2018年天津卷理第19题）
- ②抛物线的标准方程（如：2017年天津卷理第19题）
- ③直线与椭圆位置关系求斜率（如：2018年天津卷理第19题，2019年天津卷理第18题）
- ④直线与椭圆位置关系求直线（如：2017年天津卷理第19题）
- ⑤直线与椭圆位置关系求斜率的取值范围（如：2015年天津卷理第19题）
- ⑥椭圆的离心率（如：2014年天津卷理第18题）



考试难点

- ①由已知等式、面积等关系式，找直线与椭圆位置关系（如：2018年天津卷理第19题）
- ②由椭圆与抛物线的位置关系求标准方程（如：2017年天津卷理第19题）
- ③由平面几何角度关系找斜率的关系（如：2016年天津卷理第19题）
- ④由椭圆与圆的关系确定直线的性质（如：2014年天津卷理第18题）
- ⑤已知椭圆上点的向量关系确定斜率的值（如：2013年天津卷理第18题）

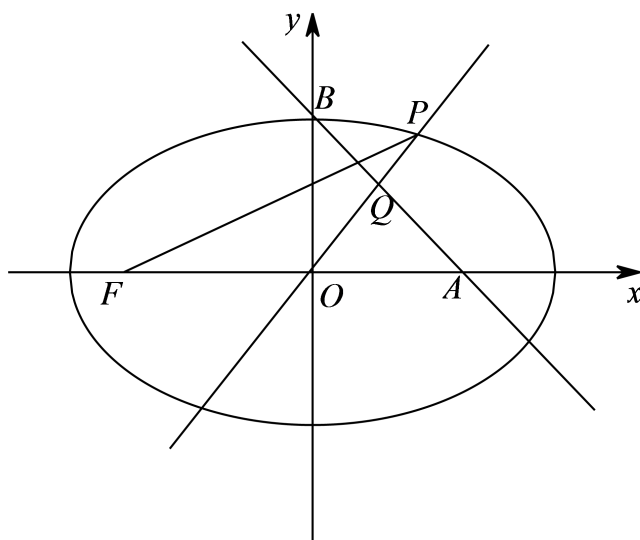
易错点

- ①忽视定义中隐含条件致误（如：2018年天津卷理第19题）
- ②忽视直线存在性的检验致误（如：2016年天津卷理第19题）
- ③忽视曲线的范围致误

一、斜率与角

你先试试看

- 1 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F ，上顶点为 B ，已知椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ，点 A 的坐标为 $(b, 0)$ ，且 $|FB| \cdot |AB| = 6\sqrt{2}$ 。



- (1) 求椭圆的方程。
- (2) 设直线 $l: y = kx (k > 0)$ 与椭圆在第一象限的交点为 P ，且 l 与直线 AB 交于点 Q ，若 $\frac{|AQ|}{|PQ|} = \frac{5\sqrt{2}}{4} \sin \angle AOQ$ (O 为原点)，求 k 的值。

解析：

(1) 设椭圆焦距为 $2c$ ，由题意可得 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{5}{9}$ ，

又由于 $a^2 = b^2 + c^2$ ，可得 $2a = 3b$ ，

由已知可得 $|FB| = a$ ， $|AB| = \sqrt{2}b$ ，

由 $|FB| \cdot |AB| = 6\sqrt{2}$ 可得 $ab = 6$ ，

得 $a = 3$ ， $b = 2$ ，所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 。

-----4分

(2) 设 P, Q 两点的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ，由已知可得 $y_1 > y_2 > 0$ ，

故 $|PQ| \sin \angle AOQ = y_1 - y_2$ ，又因为 $|AQ| = \frac{y_2}{\sin \angle OAB}$ ，

而 $\angle OAB = \frac{\pi}{4}$ ，故 $|AQ| = \sqrt{2}y_2$ ，

-----6分

由 $\frac{|AQ|}{|BQ|} = \frac{5\sqrt{2}}{4} \sin \angle AOQ$ 可得 $5y_1 = 9y_2$ ，

由方程组 $\begin{cases} y = kx \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$ 消去 x 可得 $y_1 = \frac{6k}{\sqrt{9k^2 + 4}}$ ，

-----9分

易知直线 AB 的方程为 $x + y - 2 = 0$ ，

由方程组 $\begin{cases} y = kx \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$ ，消去 x 可得 $y_2 = \frac{2k}{k+1}$ ，

-----11分

由 $5y_1 = 9y_2$ 可得 $5(k+1) = 3\sqrt{9k^2 + 4}$ ，

两边平方，整理可得 $56k^2 - 50k + 11 = 0$ ，解得 $k = \frac{1}{2}$ 或 $k = \frac{11}{28}$ ，

故 k 的值为 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{11}{28}$ 。

-----14分

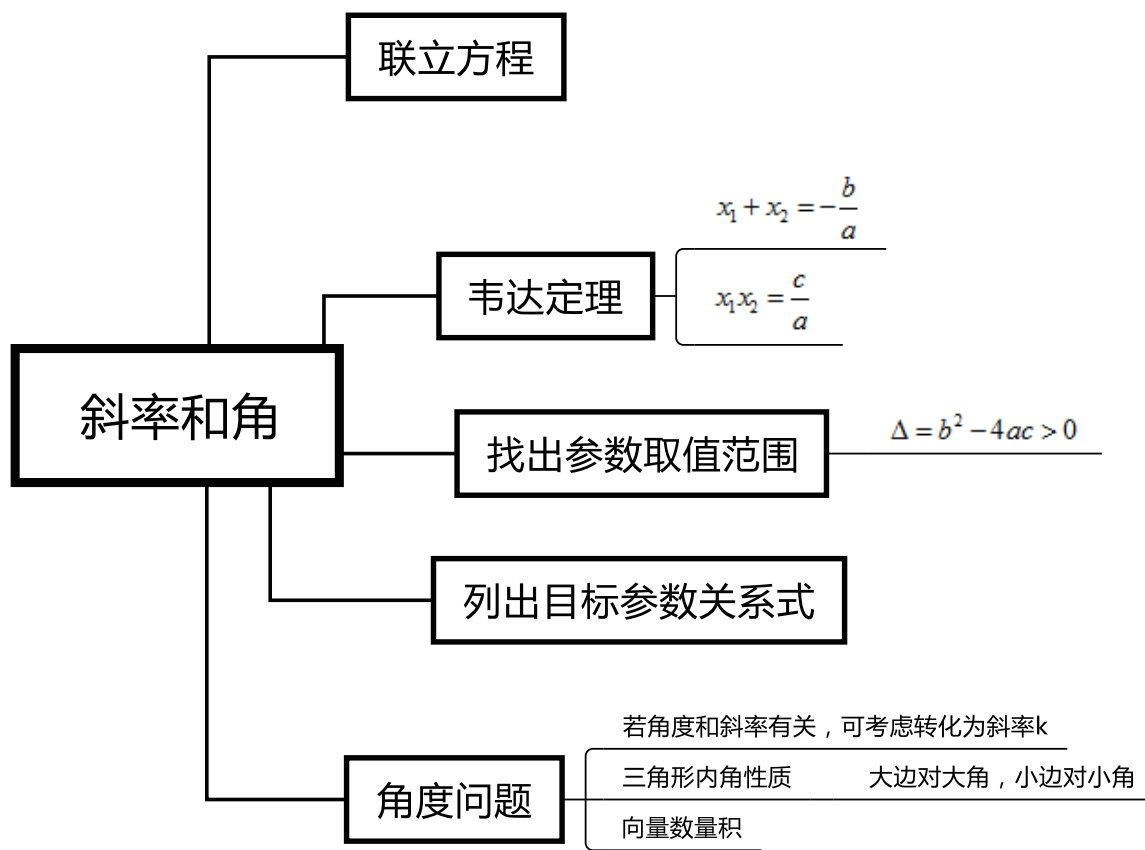
听我慢慢讲

2 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F ，上顶点为 B ．已知椭圆的短轴长为 4，离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ．

(1) 求椭圆的方程．

(2) 设点 P 在椭圆上，且异于椭圆的上、下顶点，点 M 为直线 PB 与 x 轴的交点，点 N 在 y 轴的负半轴上．若 $|ON| = |OF|$ (O 为原点)，且 $OP \perp MN$ ，求直线 PB 的斜率．

导图总结



你再试试看

3 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (a > \sqrt{3})$ 的右焦点为 F ，右顶点为 A 。已知 $\frac{1}{|OF|} + \frac{1}{|OA|} = \frac{3e}{|FA|}$ ，其中 O 为原点， e 为椭圆的离心率。

(1) 求椭圆的方程；

(2) 设过点 A 的直线 l 与椭圆交于点 B (B 不在 x 轴上)，垂直于 l 的直线与 l 交于点 M ，与 y 轴交于点 H 。若 $BF \perp HF$ ，且 $\angle MOA \leq \angle MAO$ ，求直线 l 的斜率的取值范围。



题型通解

数形结合，由 $\angle MOA < \angle MAO$ ，判定点 M 横坐标的取值范围。

登堂入室

4 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，椭圆短轴的一个端点与两个焦点构成三角形的面积为 $\sqrt{3}$ ，过椭圆的右焦点的动直线 l 与椭圆交于 A 、 B 两点。

(1) 求椭圆的方程。

(2) 若线段 AB 的垂直平分线与 x 轴相交于点 D ，与直线 l 交于 N ，当 $\frac{1}{8} < \frac{|DN|}{AB} < \frac{\sqrt{2}}{8}$ 时，求直线 l 的斜率的取值范围。

(3) 在椭圆上是否存在定点 M ，使得对任意斜率等于 $\frac{1}{2}$ 且与椭圆交于 P 、 Q 两点的直线 (P 、 Q 两点均不在 x 轴上)，都满足 $k_{PM} + k_{QM} = 0$ (其中 k_{PM} 为直线 PM 的斜率， k_{QM} 为直线 QM 的斜率)？若存在，求出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由。

二、定点定值

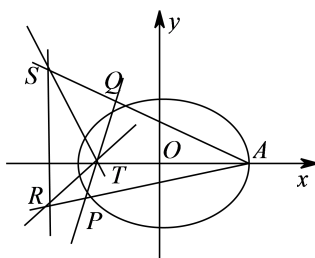
你先试试看

5 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{1}{2}$ ，且它的左焦点 F_1 与右顶点 A 的距离 $|AF_1| = 6$ 。

(1) 求椭圆 C 的标准方程。

(2) 过点 $T(-3, 0)$ 作与 x 轴不重合的直线 l 交椭圆于 P, Q 两点，连接 AP, AQ 分别交直线 $x = -\frac{16}{3}$ 于 R, S 两点，求证：直线 RT 与直线 ST 的斜率之积为定值。

解析：



(1) 设椭圆的左焦点 F_1 的坐标为 $(-c, 0)$,

依题意 $b^2 = a^2 - c^2$, $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, $|AF_1| = a + c = 6$.

解得 $a = 4$, $c = 2$, $b^2 = a^2 - c^2 = 12$.

$\therefore$ 椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

-----4分

(2) 设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$,

由直线 PQ 与 x 轴不重合, 故可设直线 $PQ: y = k(x + 3)$,

由 $\begin{cases} y = k(x + 3) \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \end{cases}$ 整理得.

则 $x_1 + x_2 = -\frac{24k^2}{4k^2 + 3}$, $x_1 x_2 = \frac{36k^2 - 48}{4k^2 + 3}$.

-----6分

由 A, P, R 三点共线, 可得 $\frac{y_R - 0}{-\frac{16}{3} - 4} = \frac{y_1 - 0}{x_1 - 4}$, 即 $y_R = -\frac{28}{3} \cdot \frac{y_1}{x_1 - 4}$,

由 A, Q, S 三点共线, 同理可得 $y_S = -\frac{28}{3} \cdot \frac{y_2}{x_2 - 4}$.

-----9分

$$k_{RT} \cdot k_{ST} = \frac{y_R - 0}{-\frac{16}{3} + 3} \cdot \frac{y_S - 0}{-\frac{16}{3} + 3} = \frac{9y_R \cdot y_S}{49}$$

$$= \frac{16y_1 y_2}{x_1 x_2 - 4(x_1 + x_2) + 16}.$$

-----11分

而 $y_1 y_2 = k^2 (x_1 + 3)(x_2 + 3) = k^2 [x_1 x_2 + 3(x_1 + x_2) + 9]$,

$$\text{故 } k_{RT} \cdot k_{ST} = 16k^2 \cdot \frac{x_1 x_2 + 3(x_1 + x_2) + 9}{x_1 x_2 - 4(x_1 + x_2) + 16}$$

$$= 16k^2 \cdot \frac{\frac{36k^2 - 48}{4k^2 + 3} - \frac{72k^2}{4k^2 + 3} + \frac{36k^2 + 27}{4k^2 + 3}}{\frac{36k^2 - 48}{4k^2 + 3} + \frac{96k^2}{4k^2 + 3} + \frac{64k^2 + 48}{4k^2 + 3}} = -\frac{12}{7}.$$

$\therefore$ 直线 RT 与直线 ST 的斜率之积为定值 $-\frac{12}{7}$.

-----14分

听我慢慢讲

6 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $(1, \frac{3}{2})$ ，且离心率 $e = \frac{1}{2}$ 。

(1) 求椭圆 E 的方程。

(2) 设椭圆 E 的右顶点为 A ，若直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 E 相交于 M, N 两点（异于 A 点），且满足 $MA \perp NA$ ，试证明直线 l 经过定点，并求出该定点的坐标。

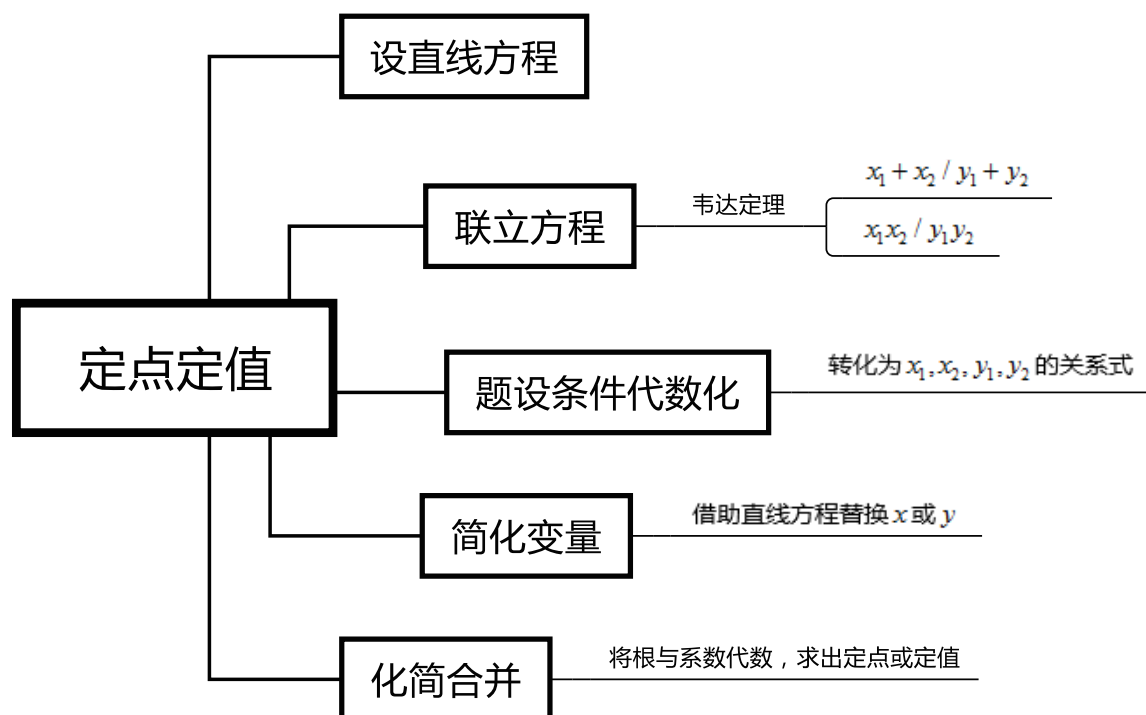


题型通解

定点问题：

- ① 设直线_____，设点坐标 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ；
- ② 将直线与圆锥曲线联立，得到_____与_____。（_____与_____）；
- ③ 将题目条件代数化，即可得到_____；
- ④ 利用_____，将 y 用 x 替换。（将 x 用 y 替换）；
- ⑤ 化简合并，将根与系数代入，即可得到_____，_____；
- ⑥ 将 k, m 的关系代入直线方程，求出定点。

导图总结



你再试试看

7 已知椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)，离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，其一个焦点在抛物线 C_2 ：

$y^2 = 2px$ ($p > 0$)的准线上，且抛物线 C_2 与直线 $l: x - y + \sqrt{6} = 0$ 相切。

(1) 求椭圆 C_1 的方程。

(2) 若点 M, N 为椭圆 C_1 上的两个不同的点， T 为平面内任意一点，满足：

$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ ，直线 OM 与 ON 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$ ，试说明：是否存在两个定点

F_1, F_2 ，使得 $|TF_1| + |TF_2|$ 为定值？若存在，求点 F_1, F_2 的坐标；若不存在，则说明理由。



题型通解

定值问题：

- ① 设直线，设点坐标 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ；
- ② 将直线与圆锥曲线联立，得到_____与_____、(_____与_____)；
- ③ 将题目所求定值代数式用 x_1, x_2, y_1, y_2 表示出来；
- ④ 利用_____，将 y 用 x 替换（或将 x 用 y 替换）；
- ⑤ 化简合并，借助韦达定理，将根与系数代入，化简即可。

8 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与 y 轴的交点为 A, B (点 A 位于点 B 的上方), F 为左焦点, 原点 O 到直线 FA 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}b$.

(1) 求椭圆 C 的离心率.

(2) 设 $b = 2$, 直线 $y = kx + 4$ 与椭圆 C 交于不同的两点 M, N , 求证: 直线 BM 与直线 AN 的交点 G 在定直线上.

登堂入室

9 已知椭圆 C 的中心在坐标原点，焦点在 x 轴上，离心率为 $\frac{1}{2}$ ，过椭圆的左焦点 F 且倾斜角为 60° 的直线与圆 $x^2 + y^2 = \frac{b^2}{a^2}$ 相切

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 若直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 C 交于不同的两点 M, N (M, N 是左、右顶点)，若以 MN 为直径的圆恰好经过椭圆 C 的右顶点 A ，判断直线 l 是否过定点，若是，求出该定点的坐标. 若不是，请说明理由.

10 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，左右焦点分别为 $F_1(-1, 0)$ 、 $F_2(1, 0)$ ，左右顶点为 $A_1(-2, 0)$ 、 $A_2(2, 0)$ ，上下顶点为 $B_1(0, \sqrt{3})$ 、 $B_2(0, -\sqrt{3})$

(1) 已知 P 点为椭圆上一点， PA_1 与 y 轴交于 M 点， PA_2 与 y 轴交于 N 点，问 $|ON| \cdot |OM|$ 是否为定值？若是，求出定值；若不是，请说明理由

(2) 已知 P 点坐标为 $(4, 0)$ ，过 P 点的直线交椭圆于 $C(x_1, y_1)$ 、 $D(x_2, y_2)$ 两点， E 是 C 点关于 x 轴的对称点，求 DE 与 x 轴的交点 F 坐标

三、圆与向量

你先试试看

11 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点为 F_1, F_2 ，右顶点为 A ，上顶点为 B 。已知

$$|AB| = \frac{\sqrt{3}}{2} |F_1 F_2|.$$

(1) 求椭圆的离心率；

(2) 设 P 为椭圆上异于其顶点的一点，以线段 PB 为直径的圆经过点 F_1 ，经过原点的直线 l 与该圆相切。求直线的斜率。

解析：

(1) 设椭圆的右焦点 F_2 的坐标为 $(c, 0)$. 由 $|AB| = \frac{\sqrt{3}}{2}|F_1F_2|$, 可得 $a^2 + b^2 = 3c^2$, 又 $b^2 = a^2 - c^2$, 则 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{2}$.

$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3}c$, 所以 $2a^2 - c^2 = 3c^2$, 解得 $a = \sqrt{2}c$, $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以, 椭圆的离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

-----4分

(2) 由(I)知 $a^2 = 2c^2$, $b^2 = c^2$. 故椭圆方程为 $\frac{x^2}{2c^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$.

设 $P(x_0, y_0)$. 由 $F_1(-c, 0)$, $B(0, c)$, 有 $\overrightarrow{F_1P} = (x_0 + c, y_0)$, $\overrightarrow{F_1B} = (c, c)$.

由已知, 有 $\overrightarrow{F_1P} \cdot \overrightarrow{F_1B} = 0$, 即 $(x_0 + c)c + y_0c = 0$. 又 $c \neq 0$, 故有

$$x_0 + y_0 + c = 0. \quad ①$$

又因为点 P 在椭圆上, 故

$$\frac{x_0^2}{2c^2} + \frac{y_0^2}{c^2} = 1. \quad ②$$

-----7分

由①和②可得 $3x_0^2 + 4cx_0 = 0$. 而点 P 不是椭圆的顶点, 故 $x_0 = -\frac{4c}{3}$, 代入①得 $y_0 = \frac{c}{3}$, 即点 P 的坐标为 $(-\frac{4c}{3}, \frac{c}{3})$.

-----8分

设圆的圆心为 $T(x_1, y_1)$, 则 $x_1 = \frac{-\frac{4}{3}c + 0}{2} = -\frac{2}{3}c$, $y_1 = \frac{\frac{c}{3} + c}{2} = \frac{2}{3}c$, 进而圆的半径

$$r = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - c)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}c.$$

-----10分

设直线 l 的斜率为 k , 依题意, 直线 l 的方程为 $y = kx$.

由 l 与圆相切, 可得 $\frac{|kx_1 - y_1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = r$, 即 $\frac{|k(-\frac{2c}{3}) - \frac{2c}{3}|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{\sqrt{5}}{3}c$,

-----12分

整理得 $k^2 - 8k + 1 = 0$, 解得 $k = 4 \pm \sqrt{15}$.

所以, 直线 l 的斜率为 $4 + \sqrt{15}$ 或 $4 - \sqrt{15}$.

-----14分

听我慢慢讲

12 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的两焦点为 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, 椭圆的上顶点 M 满足 $\overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{F_2M} = 0$.

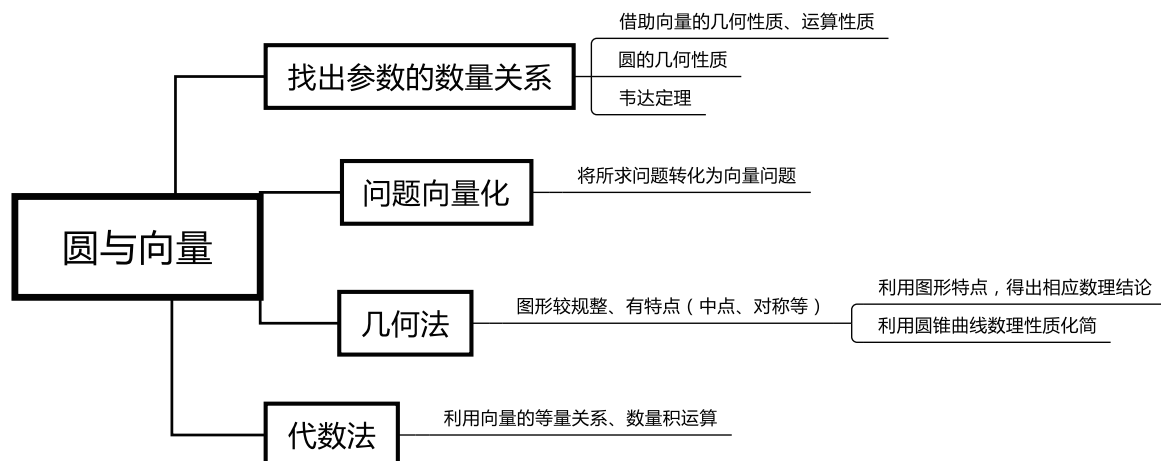
(1) 求椭圆 C 的离心率 e .

(2) 若以点 $N(0, 2)$ 为圆心, 且与椭圆 C 有公共点的圆的最大半径为 $\sqrt{26}$.

① 求此时椭圆 C 的方程.

② 椭圆 C 上是否存在两点 A, B 关于直线 $l: y = kx - 1$ ($k \neq 0$) 对称, 若存在, 求出 k 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

总结导图



你再试试看

13 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 左右焦点分别为 $F_1(-1, 0)$ 、 $F_2(1, 0)$, 左右顶点为 $A_1(-2, 0)$ 、 $A_2(2, 0)$, 上下顶点为 $B_1(0, \sqrt{3})$ 、 $B_2(0, -\sqrt{3})$

(1) 若点 P 是椭圆 E 上异于 $A_1(-2, 0)$ 、 $A_2(2, 0)$ 的任意一点, 直线 A_1P 、 A_2P 与直线 $x = 4$ 分别交于 MN 两点, 证明: 以 MN 为直径的圆与直线 PF_2 相切于点 F_2

(2) 过点 F_1 的直线交椭圆于 $C(x_1, y_1)$ 、 $D(x_2, y_2)$ 两点, 已知 $\overrightarrow{A_2D} \cdot \overrightarrow{A_2C} = 2$, 求此时直线 CD 的方程

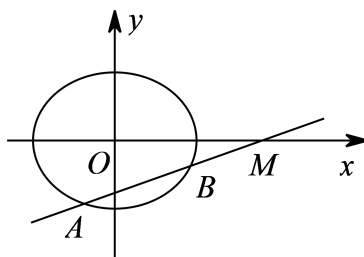


题型通解

① 结合向量共线、平行、垂直、数量积运算, 找出根与系数的关系.

② 结合圆的标准方程、图像性质, 相切、相离、垂径定理、切线定理等, 找出根与系数的关系.

- 14 如图所示, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 其中 $e = \frac{1}{2}$, 焦距为 2, 过点 $M(4, 0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于点 A, B , 点 B 在 AM 之间. 又点 A, B 的中点横坐标为 $\frac{4}{7}$, 且 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$.



- (1) 求椭圆 C 的标准方程.
- (2) 求实数 λ 的值.

登堂入室

15 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，以椭圆上任一点与左、右焦点 F_1, F_2 为顶点的三角形的周长为 $4(\sqrt{2} + 1)$ 。

(1) 求椭圆的标准方程。

(2) 若直线 l_1 过原点 O ，直线 l_2 与直线 l_1 相交于点 Q ， $|\overrightarrow{OQ}| = 1$ ，且 $l_2 \perp l_1$ ，直线 l_2 与椭圆交于 A, B 两点，问是否存在这样的直线 l_2 ，使 $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BQ} = -1$ 成立。若存在，求出直线 l_2 的方程；若不存在，请说明理由。

四、试炼之地

1. 斜率与角

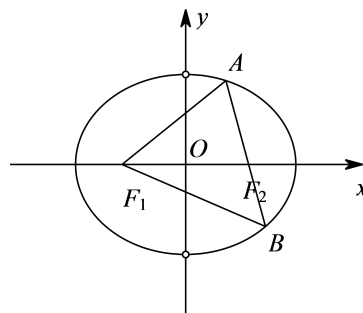
16 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，左右焦点分别为 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$ ，左右顶点为 $A_1(-2, 0), A_2(2, 0)$ ，上下顶点为 $B_1(0, \sqrt{3}), B_2(0, -\sqrt{3})$ 。

(1) 过点 F_1 的直线交椭圆于 $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$ 两点， E 是 C 点关于 x 轴的对称点，证明： $E, D, P(-4, 0)$ 三点共线。

(2) 椭圆上两点 $C(1, \frac{3}{2}), D(-1, -\frac{3}{2})$ ， $CE \perp x$ 轴于 E 点， MN 两点在椭圆上，并且 $MN \parallel A_2D$ ，判断 $\angle MCE$ 与 $\angle NCE$ 的大小关系。

2. 定点定值

- 17 如图,椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 ,离心率 $e = \frac{1}{2}$. 过 F_2 的直线交椭圆 C 于 A 、 B 两点,且 $\triangle ABF_1$ 的周长为8.

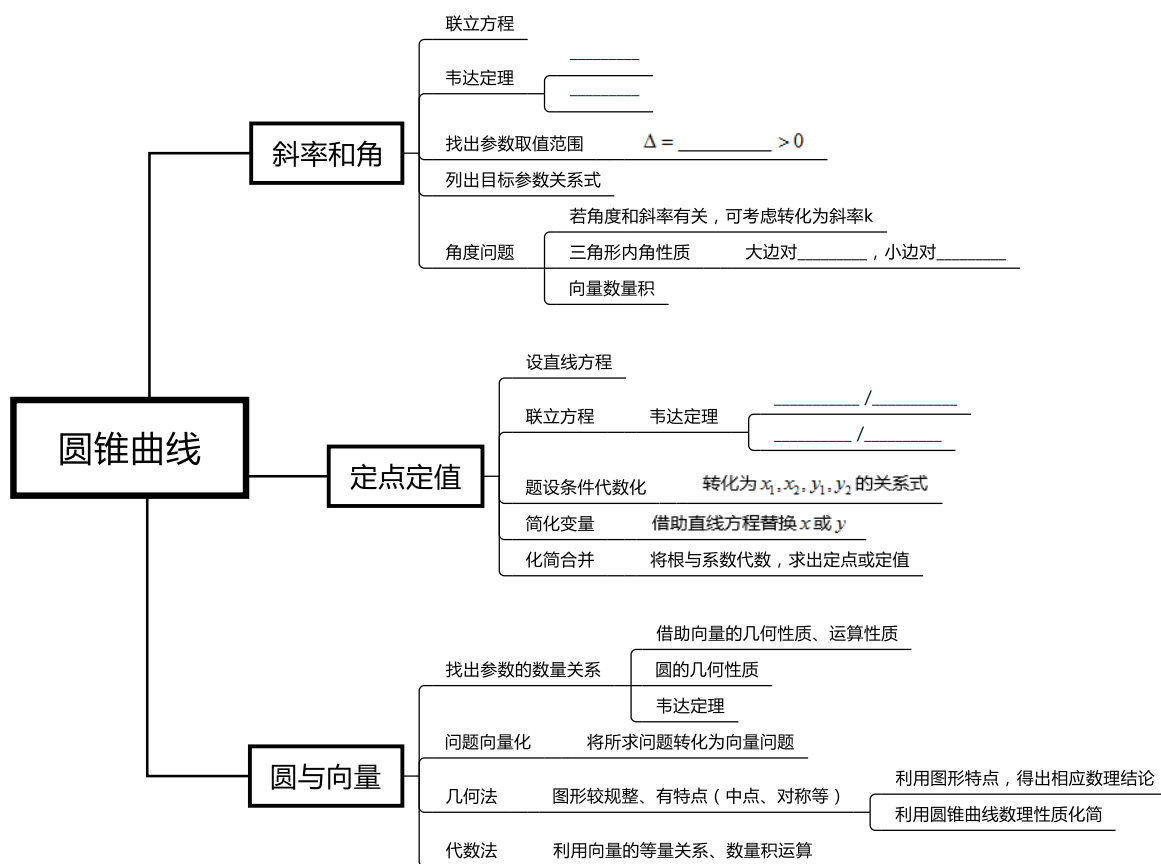


- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 若直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 C 相切于 P 点,且与直线 $x = -4$ 相交于 Q 点,求证:直线 PF_1 垂直于直线 QF_1 .

3. 圆与向量

- 18 已知过点 $(0, -2\sqrt{3})$ ，斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l 过椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的焦点，椭圆 C 的中心关于直线 l 的对称点在直线 $x = \frac{a^2}{2}$ 上.
- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 过点 $E(-2, 0)$ 的直线 m 交椭圆 C 于点 M, N ，且满足 $\tan \angle MON = \frac{4\sqrt{6}}{3\vec{OM} \cdot \vec{ON}}$ (O 为坐标原点)，求直线 m 的方程.

思维大导图



易错总结

- ① 设直线没有讨论斜率不存在的情况
- ② 直线与椭圆相交时没有考虑判别式
- ③ 求取值范围应用基本不等式时没有检验等号成立的条件

小憩一下

乌鸦悖论

乌鸦悖论，也叫做亨佩尔的乌鸦或亨佩尔悖论，是二十世纪四十年代德国逻辑学家卡尔·古斯塔夫·亨佩尔(*Carl Gustav Hempel*)为了说明归纳法违反直觉而提出的一个悖论。

亨佩尔给出了归纳法原理的一个例子：“所有乌鸦都是黑色的”的论断。我们可以出去观察成千上万只乌鸦，然后发现他们都是黑的。在每一次观察之后，我们对“所有乌鸦都是黑的”的信任度会逐渐提高。归纳法原理在这里看起来是合理的。

现在问题出现了。“所有乌鸦都是黑的”的论断在逻辑上和“所有不是黑色的东西不是乌鸦”等价。如果我们观察到一只红苹果，它不是黑色的，也不是乌鸦，那么这次观察必会增加我们对“所有不是黑色的东西不是乌鸦”的信任度，因此更加确信“所有的乌鸦都是黑色的”！

其他一些哲学家质疑“等价原理”。也许红苹果能够增加我们对论断“所有不是黑色的东西不是乌鸦”的信任度，而不增加我们对“所有乌鸦都是黑色的”信任。这个提议受到质疑，因为你不能对等价的两个命题有不同的信任度，如果你知道他们都是真的或都是假的。

这样一来，虽然“所有乌鸦都是黑色的”和“所有不是黑色的东西都不是乌鸦”这两个命题所拥有的信任度必须相等，但只有“黑色的乌鸦”才能同时增加两者的信任度，而“非黑色的非乌鸦”并不增加任何一个命题的信任度。