

21年统计概率模考

- 1 甲乙两人独立地破译一份密码，已知各人能破译的概率分别为 $\frac{1}{3}$ ， $\frac{1}{4}$ ，则两人都成功破译的概率为 _____，密码被破译的概率为 _____。

答案 1: $\frac{1}{12}$
2: $\frac{1}{2}$

解析 记 A 为“甲译出密码”， B 为“乙译出密码”， C 为“密码被成功破译”，

$$\begin{aligned} \text{则 } P(A) &= \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}, \\ \therefore P(AB) &= P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}, \\ P(C) &= 1 - [1 - P(A)][1 - P(B)] \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- 2 已知 A 袋内有大小相同的1个红球和3个白球， B 袋内有大小相同的2个红球和4个白球，现从 A 、 B 两个袋内各任取2个球，则恰好有1个红球的概率为 _____；记取出的4个球中红球的个数为随机变量 X ，则 X 的数学期望为 _____。

答案 1: $\frac{7}{15}$
2: $\frac{7}{6}$

解析 方法一：列表计算：

$$P(\xi = 1) = \frac{C_1^1 C_3^1}{C_4^2} \cdot \frac{C_2^2}{C_6^2} + \frac{C_3^2}{C_4^2} \cdot \frac{C_2^1 C_4^1}{C_6^2} = \frac{7}{15},$$

所以 ξ 的所有可能取值为：0，1，2，3，

$$P(\xi = 0) = \frac{C_3^2}{C_4^2} \cdot \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{1}{5},$$

$$P(\xi = 3) = \frac{C_1^1 C_3^1}{C_4^2} \cdot \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{30},$$

$$P(\xi = 2) = 1 - P(\xi = 0) - P(\xi = 1) - P(\xi = 3) = \frac{3}{10},$$

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

$$\text{则 } E(\xi) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{30} = \frac{7}{6} .$$

方法二：从A袋中取出红球的个数为 ξ_1 ，

$$\text{则 } \xi_1 \sim B\left(2, \frac{1}{4}\right), \text{ 从B袋中取出红球个数为 } \xi_2 \sim B\left(2, \frac{1}{3}\right),$$

$$\text{所以 } E(\xi) = E(\xi_1) + E(\xi_2) = 2 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{7}{6} .$$

- 3 某市有A, B, C, D四个景点，一位游客来该市游览，已知该游客游览A的概率为 $\frac{2}{3}$ ，游览B, C, D的概率都是 $\frac{1}{2}$ ，且该游客是否游览这四个景点相互独立，则该游客至多游览一个景点的概率为 _____；用随机变量X表示该游客游览的景点个数，则随机变量X的数学期望 $E(X) =$ _____.

答案

$$\begin{aligned} 1: & \frac{1}{4} \\ 2: & \frac{13}{6} \end{aligned}$$

解析

1：记“该游客游览*i*个景点”为事件 $A_i, i = 0, 1,$

$$\text{则 } P(A_0) = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24},$$

$$P(A_1) = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 + \left(1 - \frac{2}{3}\right) C_3^1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{24},$$

所以该游客至多游览一座山的概率为

$$P(A_0) + P(A_1) = \frac{1}{24} + \frac{5}{24} = \frac{1}{4}.$$

2：随机变量X的可能取值为0, 1, 2, 3, 4,

$$P(X=0) = P(A_0) = \frac{1}{24},$$

$$P(X=1) = P(A_1) = \frac{5}{24},$$

$$\begin{aligned} P(X=2) &= \frac{2}{3} \times C_3^1 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times C_3^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &\times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=3) &= \frac{2}{3} \times C_3^2 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times C_3^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ &= \frac{7}{24}, \end{aligned}$$

$$P(X=4) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{12},$$

所以 X 的概率分布为：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{12}$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{24} + 1 \times \frac{5}{24} + 2 \times \frac{9}{24} + 3 \times \frac{7}{24} + 4 \times \frac{2}{24} = \frac{13}{6} .$$

故 X 的数学期望为 $\frac{13}{6}$.

- 4 甲、乙两人参加一次历史知识竞赛，已知在备选的10道试题中，甲、乙分别都能答对其中的8道题．规定每人都从备选题中随机抽出3道题进行回答，至少答对2道题才算合格．则甲不合格的概率是 _____；甲、乙两人中恰有一人合格的概率是 _____ .

答案

1: $\frac{1}{15}$
2: $\frac{224}{225}$

解析

甲的不合格率：

设甲考试不合格为事件 A ，

$$P(A) = \frac{C_8^1 C_2^2}{C_{10}^3} = \frac{8 \times 1}{120} = \frac{1}{15} .$$

设乙考试不合格为事件 B ，

$$\therefore P(B) = \frac{C_8^1 C_2^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{15} ;$$

又 $\because A、B$ 事件相互独立，

$$\therefore \text{甲乙两人考试均不合格的概率为 } P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{15} \times \frac{1}{15} = \frac{1}{225} ,$$

$$\therefore \text{甲乙两人至少一人合格的概率为 } P = 1 - P(AB) = \frac{224}{225} .$$

- 5 将一颗骰子先后抛掷2次，观察向上的点数，两数中至少有一个奇数的概率为 _____，以第一次向上的点数为横坐标 x ，第二次向上的点数为纵坐标 y 的点 (x, y) 在圆 $x^2 + y^2 = 15$ 内部的概率为 _____ .

答案

1: $\frac{3}{4}$
2: $\frac{2}{9}$

解析

设 (x, y) 表示一个基本事件，则掷两次骰子包括： $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)$ ，共36个基本事件。

记“两数中至少有一个为奇数”为事件 B ，则事件 B 与“两数均为偶数”为对立事件，而事件“两数均为偶数”含有9个基本事件，

$$\text{所以 } P(B) = 1 - \frac{9}{36} = \frac{3}{4}.$$

答：两数中至少有一个为奇数的概率为 $\frac{3}{4}$ 。

设 (x, y) 表示一个基本事件，则掷两次骰子包括： $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)$ ，共36个基本事件。

基本事件总数为36，点 (x, y) 在圆 $x^2 + y^2 = 15$ 的内部记为事件 C ，则 C 包含8个事件，分别为 $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)$ ，

$$\text{所以 } P(C) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}.$$

答：点 (x, y) 在圆 $x^2 + y^2 = 15$ 的内部的概率为 $\frac{2}{9}$ 。

- 6 某校从5名学生中选派3人参加劳动技能大赛。已知这5名学生中有高一年级学生2名，高二年级学生2名，高三年级学生1名，则所选3人分别来自不同年级的概率为_____。记所选3人中高一年级学生的人数为 X ，则随机变量 X 的数学期望 $E(X) =$ _____。

答案

$$\begin{aligned} 1: & \frac{2}{5} \\ 2: & \frac{6}{5} \end{aligned}$$

解析

某校从5名学生中选派3人参加劳动技能大赛。

这5名学生中有高一年级学生2名，高二年级学生2名，高三年级学生1名，

基本事件总数 $n = C_5^3 = 10$ ，

所选3人分别来自不同年级包含的基本事件个数 $m = C_2^1 C_2^1 C_1^1 = 4$ ，

$\therefore$ 所选3人分别来自不同年级的概率为 $P = \frac{m}{n} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ ，

记所选3人中高一年级学生的人数为 X ，

则 X 可能取值为0, 1, 2，

$$P(X=0) = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10},$$

$$P(X=1) = \frac{C_2^1 C_3^2}{C_5^3} = \frac{6}{10},$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^2 C_3^1}{C_5^3} = \frac{3}{10},$$

∴ 随机变量的数学期望

$$E(x) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5}.$$

故答案为： $\frac{2}{5}, \frac{6}{5}$.

- 7 甲、乙两人进行投篮比赛，设两人每次投篮是否命中相互之间不受影响，已知甲、乙两人每次投篮命中的概率分别是0.7，0.6. 若甲、乙各投篮一次，则甲命中且乙未命中的概率为 _____；若甲、乙各投篮两次，则甲比乙多命中一次的概率是 _____.

答案 1:0.28

2:0.3024

解析 甲、乙两人每次投篮命中的概率分别是0.7，0.6，甲、乙各投篮一次，
设事件A表示“甲命中且乙未命中”，

则甲命中且乙未命中的概率 $P(A) = 0.7 \times (1 - 0.6) = 0.28$ ；

若甲、乙各投篮两次，则甲比乙多命中一次包含的基本事件有两种情况：

①甲命中一次，乙两次都没命中，概率为：

$$P_1 = C_2^1 \times 0.7 \times 0.3 \times C_2^0 \times 0.4^2 = 0.0672；$$

②甲命中两次，乙命中一次，概率为：

$$P_2 = C_2^2 \times 0.7^2 \times C_2^1 \times 0.6 \times 0.4 = 0.2352，$$

∴ 甲、乙各投篮两次，则甲比乙多命中一次的概率是：

$$P = P_1 + P_2 = 0.0672 + 0.2352 = 0.3024.$$

故答案为：0.28，0.3024.

- 8 现高三年级学生7人，7人中有4人睡眠不足，3人睡眠充足，现从这7人中随机抽取3人作进一步的
身体检查. 用X表示取的3人中睡眠不足的学生人数，则随机变量X的数学期望 _____；设A为事
件“抽取的3人中，既有睡眠充足的学生，也有睡眠不足的学生”则事件A发生的概率为 _____.

答案

$$1: \frac{12}{7}$$

$$2: \frac{6}{7}$$

解析

1: 用 X 表示睡眠不足的员工人数, 则 X 的可能取值为 $0, 1, 2, 3$,

$$P(X=0) = \frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35};$$

$$P(X=1) = \frac{C_4^1 C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35};$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35};$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35},$$

所以 X 的分布列如下:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{35} + 1 \times \frac{12}{35} + 2 \times \frac{18}{35} + 3 \times \frac{4}{35} = \frac{12}{7}.$$

2: 设事件 A : 抽取的3人中, 既有睡眠充足的员工也有睡眠不足的员工,

事件 B 为: 抽取的3人中, 睡眠充足的员工有1人, 睡眠不足的员工有2人;

事件 C 为: 抽取的3人中, 睡眠充足的员工有2人, 睡眠不足的员工有1人;

则 $A = B + C$, 且 $P(B) = P(X=2)$, $P(C) = P(X=1)$,

$$\text{故 } P(A) = P(B \cup C) = P(X=2) + P(X=1) = \frac{6}{7},$$

所以事件 A 发生的概率为: $\frac{6}{7}$.

9

2021年是中国共产党成立100周年. 现有 A, B 两队参加建党100周年知识竞赛, 每队3人, 每人回答一个问题, 答对者为本队赢1分, 答错得0分; A 队中每人答对的概率均为 $\frac{1}{3}$, B 队中3人答对的概率分别为 $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$, 且各答题人答题正确与否互不影响, 若事件 M 表示“ A 队得2分”, 事件 N 表示“ B 队得1分”, 则 $P(MN) = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案

$$\frac{4}{27}$$

解析

每队3人, 每人回答一个问题, 答对者为本队赢1分, 答错得0分,

A 队中每人答对的概率均为 $\frac{2}{3}$, B 队中3人答对的概率分别为 $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$,

且各答题人答题正确与否之间互补影响,

事件 M 表示“ A 队得2分”，事件 N 表示“ B 队得1分”，

$$P(M) = C_3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9},$$

$$P(N) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore P(MN) = P(M)P(N) = \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}.$$

故答案为： $\frac{4}{27}$.

- 10 甲、乙两名同学进行篮球投篮练习，甲同学一次投篮命中的概率为 $\frac{3}{4}$ ，乙同学一次投篮命中的概率为 $\frac{2}{3}$ ，假设两人投篮命中与否互不影响，则甲、乙两人各投篮一次，至少有一人命中的概率是_____ .

答案 $\frac{11}{12}$

解析 设事件 A 为“甲同学投篮一次命中”，事件 B 为“乙同学投篮一次命中”，事件 C 为“甲、乙两人各投篮一次，至少有一人命中”，

$$\begin{aligned} P(C) &= P(AB) + P(\bar{A}B) + P(A\bar{B}) \\ &= P(A)P(B) + P(\bar{A})P(B) + P(A)P(\bar{B}) \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{11}{12}. \end{aligned}$$

- 11 袋子中有5个大小质地完全相同的小球，其中有3个红球，2个黄球，从袋中一次性随机取出3个小球后，再将小球放回．则“取出的3个小球中有2个红球，1个黄球”的概率为_____，记“取出的3个小球中有2个红球，1个黄球”发生的次数为 X ，若重复5次这样的实验，则 X 的数学期望为_____ .

答案 1: $\frac{3}{5}$
2: 3

解析 设事件 A 为取出的3个球中有2个红球，1个黄球，

$$\text{则 } P(A) = \frac{C_3^2 \cdot C_2^1}{C_5^3} = \frac{3}{5},$$

由题意得，重复5次这样的实验，事件A发生的次数 $\times$ 服从二项分布，

$$X \sim B\left(5, \frac{3}{5}\right),$$

$$\text{则 } E(X) = 5 \times \frac{3}{5} = 3,$$

故答案为： $\frac{3}{5}$ ；3.

- 12 对某种型号的仪器进行质量检测，每台仪器最多可检测3次，一旦发现问题，则停止检测，否则一直检测到3次为止．设该仪器一次检测出现问题的概率为0.2，则检测2次停止的概率为 _____；设检测次数为 X ，则 X 的数学期望为 _____．

答案

$$\begin{aligned} 1: & \frac{4}{25} \\ 2: & \frac{61}{25} \end{aligned}$$

解析

$$P = \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{25},$$

X 的可能取值为1、2、3，

$$P(X=1) = \frac{1}{5},$$

$$P(X=2) = \frac{4}{25},$$

$$P(X=3) = \frac{16}{25},$$

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{4}{25} + 3 \times \frac{16}{25} = \frac{61}{25}.$$

- 13 甲、乙两名弓箭手射中10环的概率分别为 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{2}{3}$ （两人射中10环与否相互独立），若两人各射出1箭，共射中1次10环的概率为 _____；若两人各射出2箭，总命中10环数为 X ，则随机变量 X 的期望为 _____．

答案

$$\begin{aligned} 1: & \frac{1}{2} \\ 2: & \frac{7}{3} \end{aligned}$$

解析

$$1: P(\text{甲不中}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, P(\text{乙不中}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

$$P(\text{共中1次}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$

$$2: X = 0, 1, 2, 3, 4,$$

$$P(X=0) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{36},$$

$$P(X=1) = C_2^1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + C_2^1 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{6},$$

$$P(X=2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_2^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \cdot C_2^1 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{13}{36},$$

$$P(X=3) = C_2^1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^2 + C_2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3},$$

$$P(X=4) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9},$$

X 分布列如下：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

$$\therefore E(X) = \frac{1}{36} \times 0 + \frac{1}{6} \times 1 + \frac{13}{36} \times 2 + \frac{1}{3} \times 3 + \frac{1}{9} \times 4 = \frac{7}{3}.$$

- 14 某高校甲、乙、丙、丁四个专业分别有150、150、400、300名学生．为了解学生的就业倾向，用分层抽样的方法从该校这四个专业共抽取40名学生进行调查，应在丙专业抽取的学生人数为_____．

答案 16

解析 应在丙专业抽取的学生人数是 $\frac{400}{150+150+400+300} \times 40 = 16$ ．

- 15 某校象棋社团开展竞赛活动，比赛中双方有一人获胜或者双方和棋则比赛结束．根据以往比赛结果，在一局比赛中，甲战胜乙的概率是 $\frac{1}{2}$ ，两人和棋的概率是 $\frac{1}{6}$ ，则乙战胜甲的概率是_____．
甲乙两人比赛2局，每局胜方记3分，负方记0分，和棋双方各记1分，则甲得分不少于2分的概率是_____．

答案 1: $\frac{1}{3}$
2: $\frac{8}{9}$

解析 1．在比赛中，甲胜乙的概率为 $\frac{1}{2}$ 和棋的概率为 $\frac{1}{6}$ ，

故乙胜甲的概率为 $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

2 . 甲的得分不少于2分（当甲乙和棋时，甲得2分；甲两场任输一场得3分；只有甲两场都输时，得分为零，得分少于2个），故只需计算乙两场都赢的概率，用1减去其已都胜的概率即为甲的得分不少于2个的概率 $1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{9}$.