

2023 年天津高考模拟试题分类二三模小题

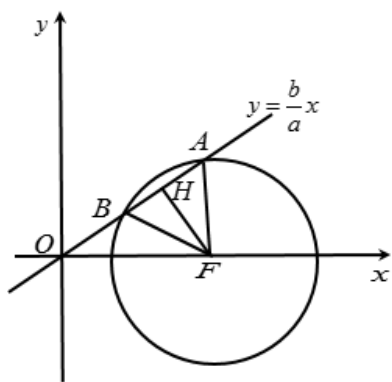
一、单选题(共 0 分)

1. (2023 天津河北 统考二模) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F ，以 F 为圆心，以 a 为半径的圆与双曲线 C 的一条渐近线交于 A, B 两点，若 $\overline{OA} = 2\overline{OB}$ (O 为坐标原点)，则双曲线 C 的离心率为 ()。

- A. $\frac{\sqrt{17}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{15}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{11}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{3}$

【分析】设双曲线的一条渐近线方程为 $y = \frac{b}{a}x$ ， H 为 AB 的中点，可得 $FH \perp AB$ ，由 $\overline{OA} = 2\overline{OB}$ ，可知 H 为 OA 的三等分点，用两种方式表示 OH ，可得关于 a, b, c 的方程组，结合 $b^2 = c^2 - a^2$ 即可得到双曲线 C 的离心率。

【详解】设双曲线的一条渐近线方程为 $y = \frac{b}{a}x$ ， H 为 AB 的中点，可得 $FH \perp AB$ ，



由 $F(c, 0)$ 到渐近线 $bx - ay = 0$ 的距离为 $FH = d = \frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} = b$ ，

所以 $BH = \sqrt{a^2 - b^2}$ ，又 $\overline{OA} = 2\overline{OB}$ ，所以 $OH = 3BH = 3\sqrt{a^2 - b^2}$ ，

因为 $OH = \sqrt{OF^2 - HF^2} = \sqrt{c^2 - b^2}$ ，

所以 $3\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{c^2 - b^2}$ ，整理可得： $9a^2 - c^2 = 8b^2$ ，

即 $9a^2 - c^2 = 8c^2 - 8a^2$ ，所以 $17a^2 = 9c^2$ ，可得 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{17}{9}$ ，所以 $e = \frac{\sqrt{17}}{3}$ ，

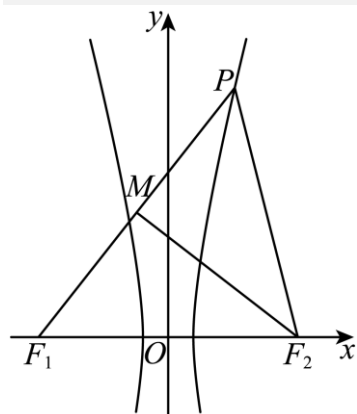
所以双曲线 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{17}}{3}$ ，故选：A。

2. (2023 天津和平 统考二模) 设 F_1, F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，抛物线 $y^2 = 20x$ 的准线过点 F_1 ，若在双曲线右支上存在点 P ，满足 $|PF_2| = |F_1F_2|$ ，且点 F_2 到直线 PF_1 的距离等于双曲线的实轴长，则点 F_2 到该双曲线的渐近线的距离为 ()

- A. 3 B. 4 C. $2\sqrt{7} - 1$ D. 5

【答案】B 【分析】取 PF_1 的中点 M ，连接 F_2M ，分析可得 $c = 5$ ， $F_2M \perp PF_1$ ，利用双曲线的定义结合已知条件可得出 $\triangle PF_2M$ 三边边长，利用勾股定理可求得 a 的值，进而可求得 b 的值，最后利用点到直线的距离公式可求得结果。

【详解】取 PF_1 的中点 M ，连接 F_2M ，如下图所示：



易知抛物线 $y^2 = 20x$ 的准线方程为 $x = -5$ ，则 $F_1(-5, 0)$ 、 $F_2(5, 0)$ ，

因为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右支上存在点 P ，使得 $|PF_2| = |F_1F_2| = 10$ ，

又因为 M 为 PF_1 的中点，所以， $F_2M \perp PF_1$ ，

由双曲线的定义可得 $|PF_1| = |PF_2| + 2a = 2c + 2a$ ，则 $|PM| = \frac{1}{2}|PF_1| = c + a$ ，

由题意可知， $|F_2M| = 2a$ ，由勾股定理可得 $|PF_2|^2 = |PM|^2 + |F_2M|^2$ ，即 $(2c)^2 = (c + a)^2 + (2a)^2$ ，

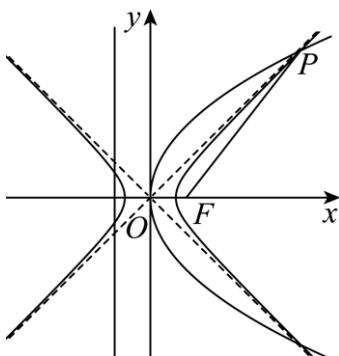
所以， $(c + a)^2 = 4(c^2 - a^2) = 4(c - a)(c + a)$ ，故 $c + a = 4c - 4a$ ，可得 $a = \frac{3c}{5} = 3$ ，

所以， $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ ，双曲线的右焦点 $F_2(c, 0)$ 到渐近线 $y = \frac{b}{a}x$ 的距离为 $d = \frac{\frac{bc}{a}}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} = b = 4$ 。故选：B。

3. (2023 天津南开 统考二模) 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点，点 P 为双曲线的渐近线和抛物线的一个公共点，若 P 到抛物线焦点的距离为 5，则双曲线的方程为 ()

A. $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ B. $3x^2 - \frac{3y^2}{2} = 1$ C. $x^2 - y^2 = 2$ D. $2x^2 - 2y^2 = 1$ 【答案】D

【分析】由抛物线的标准方程求出准线方程即可求出双曲线的左焦点，即可求 c ；由 P 为双曲线的渐近线和抛物线的一个公共点， P 到抛物线焦点的距离为 5，可求出点 P 的坐标，把点 P 代入双曲线的渐近线方程即可得出 a 与 b 相等，再根据 $c^2 = a^2 + b^2$ 即可求解。



【详解】

由题意知，抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线方程为 $x = -1$ ，所以双曲线的左焦点坐标为 $(-1, 0)$ ，所以双曲线的 $c = 1$ 。

又因为点 P 为双曲线的渐近线和抛物线的一个公共点，若 P 到抛物线焦点的距离为 5，所以 $x_P + 1 = 5$ ，所以 $x_P = 4$ ，代入抛物线方程即可得 $P(4, 4)$ 。

因为 $P(4, 4)$ 在双曲线的渐近线方程 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 上，所以 $a = b$ ，又因为双曲线中， $c^2 = a^2 + b^2$ ，所以 $a^2 = b^2 = \frac{1}{2}$ ，

所以双曲线的方程为： $2x^2 - 2y^2 = 1$ 。故选：D

4. (2023 天津红桥 统考二模) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点 F 与抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点重合，过 F 作与一条渐近线平行的直线 l ，交另一条渐近线于点 A ，交抛物线 $y^2 = 8x$ 的准线于点 B ，若三角形 AOB (O 为原点) 的面积 $3\sqrt{3}$ ，则双曲线的方程为 ()

A. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ B. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ C. $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ D. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 【答案】D

【分析】由抛物线方程得出焦点坐标和准线方程，联立直线 l 与渐近线方程得出 A 的坐标，联立直线与准线方程得出 B 的坐标，根据三角形的面积得出 $b = \sqrt{3}a$ ，再结合 $c = 2$ ， $c^2 = a^2 + b^2$ ，可解得结果。

【详解】由 $y^2 = 8x$ 得 $p = 4$ ，所以 $F(2, 0)$ ，所以直线 $l: y = \frac{b}{a}(x - 2)$ ，抛物线的准线为： $x = -2$ ，

$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{b}{a}(x-2) \\ y = -\frac{b}{a}x \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{b}{a} \end{cases}, \text{ 所以 } A(1, -\frac{b}{a}), \text{ 联立 } \begin{cases} y = \frac{b}{a}(x-2) \\ x = -2 \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{4b}{a} \end{cases}, \text{ 所以 } B(-2, -\frac{4b}{a}),$$

$$\text{所以 } S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}(\frac{b}{a} + \frac{4b}{a}) \cdot (1+2) - \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{4b}{a} - \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{b}{a} = \frac{3b}{a}, \text{ 所以 } \frac{3b}{a} = 3\sqrt{3}, \text{ 所以 } \frac{b}{a} = \sqrt{3}, \text{ 即 } b = \sqrt{3}a,$$

又 $c = 2$, $c^2 = a^2 + b^2$, 所以 $4 = a^2 + 3a^2$, 所以 $a^2 = 1$, 所以 $b^2 = 3a^2 = 3$, 所以双曲线的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$. 故选: D.

【点睛】本题考查了抛物线和双曲线的几何性质, 考查了三角形的面积, 考查了运算求解能力, 属于基础题.

5. (2023 天津二模) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 虚轴的上端点为 B , P 为左支上的一个动点, 若 $\triangle PBF$ 周长的最小值等于实轴长的 3 倍, 则该双曲线的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ C. $\sqrt{10}$ D. $\sqrt{2}$

【答案】A 【分析】先通过分析得到当且仅当 B, P, F' 共线, $\triangle PBF$ 周长取得最小值, 且为 $2a + 2\sqrt{b^2 + c^2}$, 可得 $6a = 2a + 2\sqrt{b^2 + c^2}$, 解方程即得解.

【详解】由题意可得 $B(0, b)$, $F(c, 0)$, 设 $F'(-c, 0)$, 由双曲线的定义可得

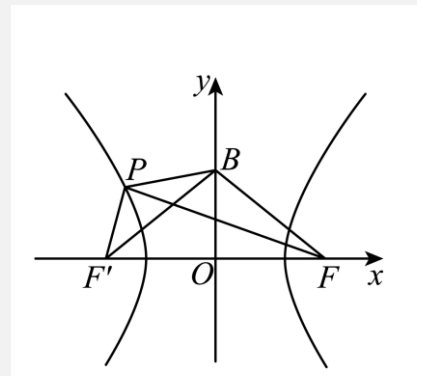
$$|PF| - |PF'| = 2a, \quad |PF| = |PF'| + 2a, \quad |BF| = |BF'| = \sqrt{b^2 + c^2}, \text{ 则 } \triangle BPF \text{ 的周长为}$$

$$|PB| + |PF| + |BF| = |PB| + |PF'| + 2a + |BF'| \geq 2|BF'| + 2a, \text{ 当且仅当 } B, P, F' \text{ 共线,}$$

取得最小值, 且为 $2a + 2\sqrt{b^2 + c^2}$, 由题意可得 $6a = 2a + 2\sqrt{b^2 + c^2}$, 即

$$4a^2 = b^2 + c^2 = 2c^2 - a^2, \text{ 即 } 5a^2 = 2c^2,$$

$$\text{则 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{2}, \text{ 故选 A}$$



6. (2023 春 天津和平 高三天津一中校考阶段练习) 已知抛物线 $E: y = \frac{1}{8}x^2$ 的焦点为 F , 其准线 l 与坐标轴交于点 A ,

点 P 为 E 上一点, 当 $\frac{|PF|}{|PA|}$ 取最小值时, 点 P 恰好在以 A, F 为焦点的双曲线 Γ 上, 则双曲线 Γ 的实轴长等于 ()

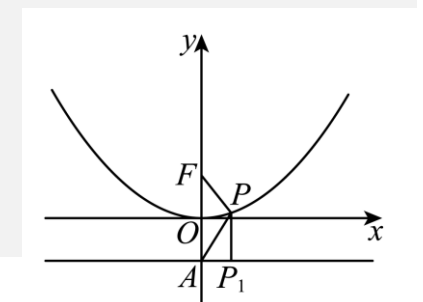
- A. $2\sqrt{2} - 2$ B. $4\sqrt{2} - 4$ C. $2\sqrt{3} + 2$ D. $4\sqrt{3} - 4$ 【答案】B

【分析】根据抛物线的定义可得 $\frac{|PF|}{|PA|} = \frac{|PP_1|}{|PA|}$, 又 $\angle \theta = \angle \frac{|PP_1|}{|PA|}$, 可知当直线 PA 与抛物线相切时, 即点 P 为切点时, $\frac{|PF|}{|PA|}$

最小. 设出 PA 方程, 联立直线与抛物线的方程, 根据 $\Delta = 0$, 可求出 k 的值, 进而得出切点 P 的坐标. 然后根据双曲线的定义, 即可得出答案.

【详解】

根据抛物线的对称性, 不妨设点 P 在第一象限, $\angle PAP_1 = \theta$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,



如图, 过点 P 作 $PP_1 \perp l$, 垂足为 P_1 . 根据抛物线的定义, 可得 $|PP_1| = |PF|$, 所以 $\frac{|PF|}{|PA|} = \frac{|PP_1|}{|PA|}$,

在 $Rt\triangle PP_1A$ 中, 有 $\sin \theta = \frac{|PP_1|}{|PA|}$, 因为 $y = \sin x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 所以, 当 θ 最小时, $\sin \theta = \frac{|PP_1|}{|PA|}$ 最小, 即 $\frac{|PF|}{|PA|}$ 最

小, 当直线 PA 与抛物线相切时, 即点 P 为切点时, θ 最小, $\frac{|PF|}{|PA|}$ 最小. 由已知可得, $p = 4$, $F(0, 2)$, $A(0, -2)$,

则可设直线 PA 方程为 $y = kx - 2$, $k > 0$, 联立直线与抛物线的方程 $\begin{cases} y = kx - 2 \\ y = \frac{1}{8}x^2 \end{cases}$ 可得, $x^2 - 8kx + 16 = 0$.

由直线 PA 与抛物线相切, 可知 $\Delta = (-8k)^2 - 4 \times 1 \times 16 = 64(k^2 - 1) = 0$, 解得, $k = \pm 1$ (舍去负值), 所以 $k = 1$,

代入 $x^2 - 8kx + 16 = 0$ 可得, $x = 4$, 此时 $y = \frac{1}{8}x^2 = 2$, 所以切点 $P(4, 2)$.

由已知可设双曲线方程为 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$), 因为点 $P(4, 2)$ 在双曲线上, 根据双曲线的定义可知,

$2a = |PA| - |PF| = \sqrt{(0-4)^2 + (-2-2)^2} - \sqrt{(0-4)^2 + (2-2)^2} = 4\sqrt{2} - 4$, 所以, 双曲线 Γ 的实轴长等于 $2a = 4\sqrt{2} - 4$.

7. (2023 天津 统考二模) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 2, 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过 F 过直线 l 交抛物线于 A, B 两点, 若 l 与双曲线的一条渐近线平行, 则 $|AB| =$ ()

- A. 16 B. $8\sqrt{3}$ C. 8 D. $\frac{16}{3}$

【答案】D 【分析】现根据双曲线的离心率, 求出渐近线的斜率, 继而根据点斜式求得直线 AB 的方程, 联立直线和抛物线方程, 结合韦达定理和焦点弦公式, 即可求解.

【详解】解: 由题意得 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = 2$, 故双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \sqrt{3}x$,

又 l 与双曲线的一条渐近线平行, 不妨设直线 l 的斜率为 $\sqrt{3}$, 又 $F(1, 0)$,

故 l 的直线方程为: $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$, 联立直线方程和抛物线方程得: $3x^2 - 10x + 3 = 0$,

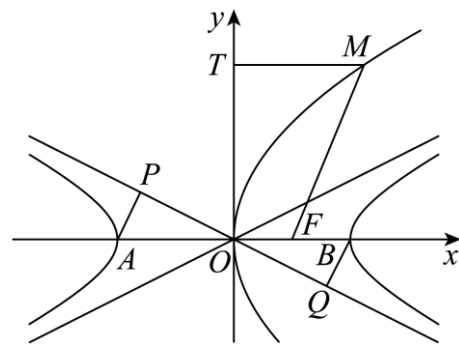
所以 $x_A + x_B = \frac{10}{3}$, 所以 $|AB| = x_A + x_B + p = \frac{10}{3} + 2 = \frac{16}{3}$. 故选: D.

8. (2023 天津 校联考二模) 抛物线 $y^2 = 2ax$ ($a > 0$) 上的点 $M(x_0, 3)$ 到其焦点的距离是 M 到 y 轴距离的 2 倍, 过双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左右顶点 A, B 作 C 的同一条渐近线的垂线, 垂足分别为 P, Q , $|PQ| = 4$, 则双曲线的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{14}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

【答案】D 【分析】由抛物线定义及点在抛物线上求得 $\begin{cases} a = 3 \\ x_0 = \frac{3}{2} \end{cases}$, 进而可得 $A(-3, 0), B(3, 0)$, 结合双曲线渐近线性质的

及 $|PQ| = 4$ 列方程求双曲线参数 c ，即可得离心率。



【详解】由题设， $\begin{cases} x_0 + \frac{a}{2} = 2x_0 \\ 2ax_0 = 9 \end{cases}$ ，可得 $\begin{cases} a = 3 \\ x_0 = \frac{3}{2} \end{cases}$ ，故 $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，

所以 $A(-3, 0), B(3, 0)$ ，渐近线为 $y = \pm \frac{b}{3}x$ ，不妨令 P, Q 在 $y = -\frac{b}{3}x$ 上，

若 $\tan \theta = -\frac{b}{3}$ (θ 为 $y = -\frac{b}{3}x$ 倾斜角)，则

$$|OP| = |OQ| = -3 \cos \theta = \frac{9}{\sqrt{b^2 + 9}},$$

所以 $|PQ| = \frac{18}{\sqrt{b^2 + 9}} = \frac{18}{c} = 4$ ，则 $c = \frac{9}{2}$ ，故 $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$ 。故选：D

9. (2023 天津河西 统考二模) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线方程是 $y = \sqrt{3}x$ ，它的一个焦点在抛物线 $y^2 = 24x$ 的准线上，则双曲线的方程为

A. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{108} = 1$ B. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$ C. $\frac{x^2}{108} - \frac{y^2}{36} = 1$ D. $\frac{x^2}{27} - \frac{y^2}{9} = 1$ 【答案】B

【详解】试题分析：由渐近线是 $y = \sqrt{3}x$ 得 $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$ ，抛物线 $y^2 = 24x$ 的准线为 $x = -6$ ， $\therefore a^2 + b^2 = 36 \therefore a^2 = 9, b^2 = 27$ ，方程为 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$ 考点：双曲线标准方程及性质点评：双曲线抛物线几何性质的综合考查

10. (2023 天津河东 统考二模) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点为 F ，以 OF 为直径的圆与双曲线 C 的渐近线交于不同原点 O 的 A, B 两点，若四边形 $AOBF$ 的面积为 $\frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ ，则双曲线 C 的渐近线方程为

A. $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$ B. $y = \pm \sqrt{2}x$ C. $y = \pm x$ D. $y = \pm 2x$ 【答案】C

【解析】根据题意， $OA \perp AF$ ，双曲线 C 的焦点 F 到 C 的一条渐近线的距离为 b ，所以 $|AF| = b$ ，进而 $|OA| = a$ ，四边形面积为 ab ，由 $ab = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ 可化简得 $\frac{b}{a} = 1$ ，写出渐近线方程即可。

【详解】根据题意， $OA \perp AF$ ，双曲线 C 的焦点 F 到 C 的一条渐近线 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 的距离为 $\frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} = b$ ，则 $|AF| = b$ ，所以 $|OA| = a$ ，所以 $ab = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ ，所以 $\frac{b}{a} = 1$ ，所以双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm x$ 。

【点睛】本题主要考查了双曲线的标准方程，渐近线，点到直线的距离，属于难题。

11. (2023 天津南开 南开中学校考模拟预测) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右顶点、右焦点分别为 A, F ，

过点 A 的直线 l 与 C 的一条渐近线交于点 Q ，直线 QF 与 C 的一个交点为 B ，若 $AQ \cdot AB = AQ \cdot FB$ ，且 $BQ = 3FQ$ ，则 C 的离心率为()

A. 2 B. $\sqrt{5} - 1$ C. $\frac{2 + \sqrt{5}}{3}$ D. $2 + \sqrt{5}$

【答案】C 【分析】由向量数量积等式推出 $l \perp x$ 轴，求出点 Q 坐标，进而得点 B 坐标，再代入双曲线方程求解即得。

【详解】由已知得 $A(a, 0)$ ，设 $F(c, 0)$ ，由 $AQ \cdot AB = AQ \cdot FB$ ，得 $AQ \cdot (AB + BF) = AQ \cdot AF = 0$ ，

【详解】由 $AB=2$, $AC=1$, $\angle BAC=60^\circ$, 由余弦定理可得:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{4 + 1 - 2 \times 2 \times 1 \times \frac{1}{2}} = \sqrt{3},$$

$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2$, $\angle ACB=90^\circ$, $\therefore$ 底面外接圆的圆心在斜边 AB 的中点,

设三角形 ABC 的外接圆的半径为 r , 则 $r = \frac{AB}{2} = 1$,

$$\text{又 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

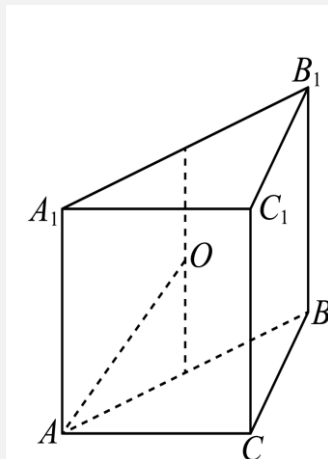
所以 $V_{\text{柱}} = S_{\triangle ABC} \cdot AA_1 = \sqrt{3}$, 所以可得 $AA_1=2$,

因为三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的侧棱垂直于底面,

所以三棱柱的外接球的球心是过底面外接圆的圆心作垂直于底面的直线与中截面的交点,

设外接球的半径为 R , 则 $R^2 = r^2 + \left(\frac{AA_1}{2}\right)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, 所以外接球的表面积 $S = 4\pi R^2 = 4\pi \times 2 = 8\pi$, 故选: A.

【点睛】本题考查三棱柱的体积及三棱柱的棱长与外接球的半径之间的关系, 以及球的表面积公式, 属于中档题.



14. (2023 天津北辰 统考三模) 中国雕刻技艺举世闻名, 雕刻技艺的代表作“鬼工球”, 取鬼斧神工的意思, 制作相当繁复, 成品美轮美奂. 1966 年, 玉石雕刻大师吴公炎将这一雕刻技艺应用到玉雕之中, 他把玉石镂成多层圆球, 层次重叠, 每层都可灵活自如的转动, 是中国玉雕工艺的一个重大突破. 今一雕刻大师在棱长为 12 的整块正方体玉石内部套雕出一个可以任意转动的球, 在球内部又套雕出一个正四面体 (所有棱长均相等的三棱锥), 若不计各层厚度和损失, 则最内层正四面体的棱长最长为 ()



A. $4\sqrt{6}$

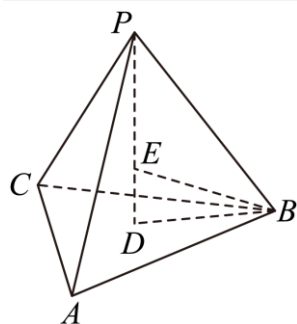
B. $4\sqrt{3}$

C. $2\sqrt{6}$

D. 6

【答案】A 【分析】根据题意, 求正方体的内切球半径, 易知该球为所求正四面体的外接球, 根据正四面体的性质, 可求得棱长. 【详解】由题意, 球是正方体的内切球, 且该球为正四面体的

外接球时, 四面体的棱长最大, 则该球半径 $r = 6$, 如图:



可知 E 为外接球球心, $EP = EB = r$, $PD \perp$ 平面 ABC , D 为底面等边 $\triangle ABC$ 的中心,

设正四面体的棱长为 d , 则 $BD = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} d = \frac{\sqrt{3}}{3} d$, $PD = \sqrt{d^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} d\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3} d$,

在 $\text{Rt}\triangle EDB$ 中, 则 $EB^2 = ED^2 + DB^2$, 即 $r^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} d\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3} d - r\right)^2$, 解得 $d = \frac{2\sqrt{6}}{3} r$, 即 $d = 4\sqrt{6}$.

故选: A

15. (2023 天津河西 统考二模) 在三棱锥 $P - ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $PA = 4\sqrt{2}$, $AB = AC = 4$, $\angle CAB = 90^\circ$, 则三棱锥 $P - ABC$ 外接球的表面积为 ()

A. 32π

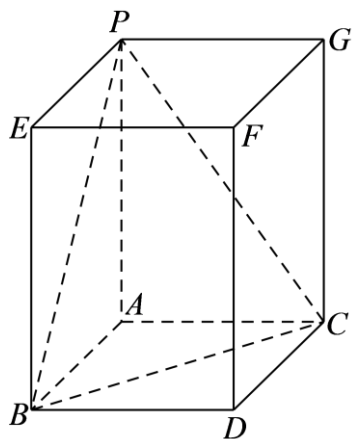
B. 48π

C. 64π

D. 128π

【答案】C 【分析】三棱锥 $P - ABC$ 补成长方体 $ABDC - PEFG$, 计算出长方体 $ABDC - PEFG$ 的体对角线长, 即为

三棱锥 $P-ABC$ 的外接球直径长，再利用球体表面积公式可求得结果.



【详解】在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 平面 ABC ， $PA = 4\sqrt{2}$ ， $AB = AC = 4$ ， $\angle CAB = 90^\circ$ ，

将三棱锥 $P-ABC$ 补成长方体 $ABDC-PEFG$ ，如下图所示，

所以，三棱锥 $P-ABC$ 的外接球直径即为长方体 $ABDC-PEFG$ 的体对角线长，

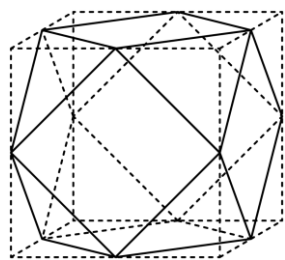
设三棱锥 $P-ABC$ 的外接球直径为 $2R$ ，则 $2R = \sqrt{AB^2 + AC^2 + AP^2} = 8$ ，则 $R = 4$ ，

因此，三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 $S = 4\pi R^2 = 64\pi$ 。

故选：C.

16. (2023 天津 校联考二模) “阿基米德多面体”被称为半正多面体

(semi-regular solid)，是由边数不全相同的正多边形为面围成的多面体，它体现了数学的对称美. 如图所示，将正方体沿交于一顶点的三条棱的中点截去一个三棱锥，共可截去八个三棱锥，得到八个面为正三角形、六个面为正方形的一种半正多面体. 已知正方体边长为 6，则该半正多面体外接球的表面积为 ()



A. 48π

B. 56π

C. 64π

D. 72π

【答案】D 【分析】利用几何体的对称性确定该半正多面体的外接球的球心及半径即可求解. 【详解】

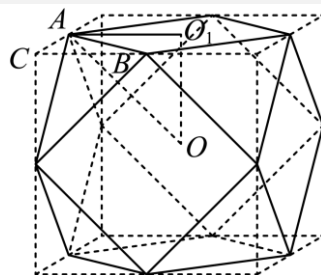
如图，由半正多面体的对称性可知，其对称中心与相应的正方体的对称中心是同一点，

其对称中心为正方体的体对角线的中点 O ，点 O 在平面 ABC 的投影点为 O_1 ，

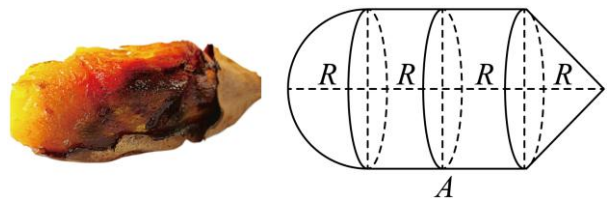
则有 $OO_1 = 3$ ， $AO_1 = 3$ ，所以 $AO = \sqrt{OO_1^2 + AO_1^2} = 3\sqrt{2}$ ，

故该半正多面体的外接球的半径为 $3\sqrt{2}$ ，外接球的表面积为 $4\pi \times (3\sqrt{2})^2 = 72\pi$ 。

故选：D



17. (2023 天津 统考二模) 红薯于 1593 年被商人陈振龙引入中国，也叫甘薯、番薯等，因其生食多汁、熟食如蜜，成为人们喜爱的美食甜点. 敦敦和融融在步行街买了一根香气扑鼻的烤红薯，准备分着吃. 如图，该红薯可近似看作三个部分：左边部分是半径为 R 的半球；中间部分是底面半径为 R 、高为 $2R$ 的圆柱；右边部分是底面半径为 R 、高为 R 的圆锥，若敦敦准备从中间部分的 A 处将红薯切成两块，则两块红薯体积差的绝对值为 ()



A. $\frac{1}{3}\pi R^3$

B. $\frac{2}{3}\pi R^3$

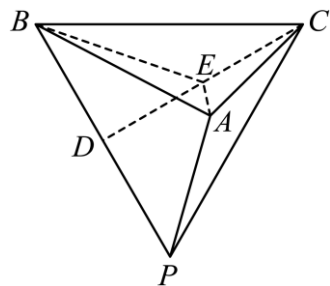
C. $\frac{5}{6}\pi R^3$

D. πR^3

【答案】A 【分析】由球和圆柱，圆锥的体积公式求解即可.

【详解】由题意可知，两块红薯体积差的绝对值为 $\left| \frac{1}{2} \times \frac{4\pi}{3} R^3 + \pi R^2 \cdot R - (\pi R^2 \cdot R + \frac{\pi}{3} R^2 \cdot R) \right|$
 $= \left| \frac{2\pi}{3} R^3 - \frac{\pi}{3} R^3 \right| = \frac{\pi}{3} R^3$. 故选：A.

18. (2023 天津·二模) 如图所示，有一个棱长为 4 的正四面体 $P-ABC$ 容器， D 是 PB 的中点， E 是 CD 上的动点，则下列说法正确的是 ()



① 若 E 是 CD 的中点，则直线 AE 与 PB 所成角为 $\frac{\pi}{2}$

② $\triangle ABE$ 的周长最小值为 $4 + \sqrt{34}$

③ 如果在这个容器中放入 1 个小球 (全部进入)，则小球半径的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

④ 如果在这个容器中放入 10 个完全相同的小球 (全部进入)，则小球半径的最大值为 $\sqrt{6} - 2$

A. ①②

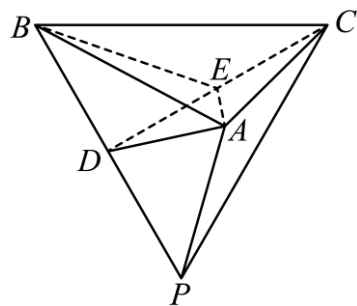
B. ①③

C. ②④

D. ①③④

【答案】D 【分析】对于①，连接 AD ，证明出 $PB \perp AE$ ，即可求出直线 AE 与 PB 所成角为 $\frac{\pi}{2}$ ；对于②，把 $\triangle ACD$ 沿着 CD 展开与面 BDC 同一个平面内，利用余弦定理求出 $AB \neq \sqrt{34}$ ，即可判断；对于③，判断出小球是正四面体的内切球，设半径为 R ，利用等体积法求解；对于④，判断出要使小球半径要最大，则外层小球与四个面相切，设小球半径为 r ，利用几何关系求出 $r = \sqrt{6} - 2$ 。

【详解】对于①：连接 AD ，



在正四面体 $P-ABC$ 中， D 是 PB 的中点，所以 $PB \perp AD, PB \perp CD$ 。

因为 $AD \subset$ 平面 ACD ， $CD \subset$ 平面 ACD ， $AD \cap CD = D$ ，

所以直线 $PB \perp$ 平面 ACD ，

因为 $AE \subset$ 平面 ACD ，

所以 $PB \perp AE$ ，所以直线 AE 与 PB 所成角为 $\frac{\pi}{2}$ ，故①正确；

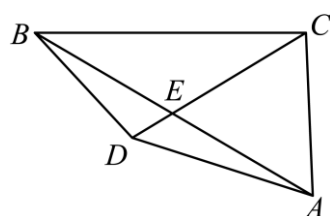
对于②，如图，把 $\triangle ACD$ 沿着 CD 展开与面 BDC 同一个平面内，则周长最小值为 $4 + AB$ ，

由 $AD = CD = 2\sqrt{3}$ ， $AC = 4$ ， $\cos \angle ADC = \frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2AD \cdot CD} = \frac{1}{3}$ ，

所以 $\cos \angle ADB = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \angle ADC \right) = -\sin \angle ADC = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

所以 $AB^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \times 2 \times 2\sqrt{3} \times \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} \right) = 16 + \frac{16\sqrt{6}}{3} \neq 34$ ，所以 $AB \neq \sqrt{34}$ ，所以 $\triangle ABE$ 的周长最小值为 $4 + \sqrt{34}$

不正确，故②错误；



对于③，要使小球半径最大，则小球与四个面相切，是正四面体的内切球，设半径为 R 。

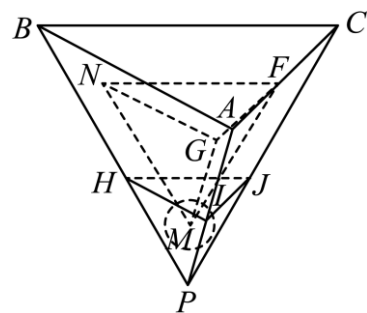
由等体积法可得 $V_{P-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{1}{3} S_{\text{表}} \cdot R$ ，所以半径 $R = \frac{1}{4} h = \frac{\sqrt{6}}{12} \times 4 = \frac{\sqrt{6}}{3}$. 故③正确；

对于④，10 个小球分三层（1 个，3 个，6 个）放进去，要使小球半径要最大，则外层小球与四个面相切，设小球半径为 r ，四个角小球球心连线 $M - N G F$ 是棱长为 $4r$ 的正四面体，其高为 $\frac{4\sqrt{6}}{3} r$ ，由正四面体内切球的半径是高的 $\frac{1}{4}$ 得，

如图正四面体 $P - HIJ$ ，

则 $MP = 3r$ ，正四面体 $P - ABC$ 高为 $3r + \frac{4\sqrt{6}}{3} r + r = \frac{\sqrt{6}}{3} \times 4$ ，得 $r = \sqrt{6} - 2$. 故④正确.

故选：D



19. (2023 天津红桥 统考二模) 用与球心距离为 1 的平面去截球，所得的截面面积为 π ，则球的体积为 ()

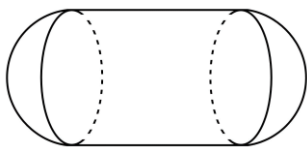
- A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$ B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$ C. $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$ D. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

【答案】D 【分析】利用圆的面积公式和球心到截面圆的距离、截面圆半径及球的半径的关系，结合球的体积公式

即可求解. 【详解】设截面圆的半径为 r ，球的半径为 R ，由题意可知 $\begin{cases} \pi r^2 = \pi \\ R^2 = 1 + r^2 \end{cases}$ ，解得 $r = 1$ ， $R = \sqrt{2}$ ，

所以球的体积为 $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times (\sqrt{2})^3 = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$. 故选：D.

20. (2023 天津南开 统考二模) 如图，某种中药胶囊外形是由两个半球和一个圆柱组成的，半球的直径是 6mm，圆柱高 8mm，则该中药胶囊的体积为 ()



- A. $90\pi \text{ mm}^3$ B. $108\pi \text{ mm}^3$ C. $216\pi \text{ mm}^3$ D. $360\pi \text{ mm}^3$

【答案】B 【分析】由球的体积公式和圆柱的体积公式求解即可；

【详解】由题意得该几何体由两个半球和一个圆柱筒组成，所以体积为一个球体体积和一个圆柱体积之和，

由球体的体积为： $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 3^3 = \frac{108}{3}\pi \text{ mm}^3 = 36\pi \text{ mm}^3$ ，圆柱体积为： $V_2 = \pi R^2 \cdot h = \pi \times 3^2 \times 8 = 72\pi \text{ mm}^3$ ，

所以浮球的体积为： $V = V_1 + V_2 = 36\pi + 72\pi = 108\pi \text{ mm}^3$. 故选：B.

21. (2023 天津河北 统考二模) 已知圆锥的顶点和底面圆周均在球 O 的球面上. 若该圆锥的底面半径为 $2\sqrt{3}$ ，高为 6，则球 O 的表面积为 ()

- A. 32π B. 48π C. 64π D. 80π

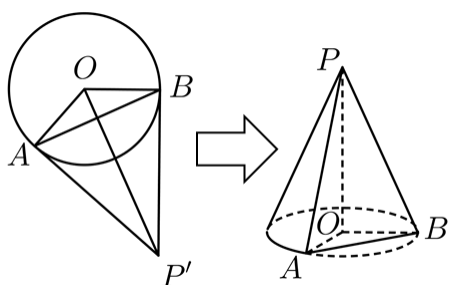
【答案】C 【分析】设球心到圆锥底面的距离为 d ，由题设可得关于 d 的方程，求出其解后可得球的半径，从而可

求其表面积. 【详解】因为 $6 > 2\sqrt{3}$ ，故球心在圆锥的内部且在高上，设球心到圆锥底面的距离为 d ，则有

$(6-d)^2 - d^2 = (2\sqrt{3})^2$ ，解得 $d = 2$ ，则圆半径 $R = 6 - d = 4$ ，表面积 $S = 4\pi R^2 = 64\pi$. 故选：C

22. (2023 天津河西 天津市新华中学校考模拟预测) 如图，过圆 O 外一点 P' 作圆的切线 $P'A$ ， $P'B$ ，切点分别为 A ， B ，

现将 $\triangle P'AB$ 沿 AB 折起到 $\triangle PAB$ ，使点 P 在圆 O 所在平面上的射影为圆心 O ，若三棱锥 $P-AOB$ 的体积是圆锥 PO 体积的 $\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$ ，则 $\frac{OA}{OP'} =$ ()



- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
C. $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】A 【分析】根据锥体体积公式可构造方程求得

$$\sin \angle AOB = \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 由三角形大边对大角的特点可知 } \theta = \frac{2\pi}{3}, \text{ 由}$$

此可知 $\frac{OA}{OP'} = \cos \angle AOP' = \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$. 【详解】设圆 O 的半径为 r ，圆锥的高 $OP = h$ ， $\angle AOB = \theta$ ，

$$\text{则 } V_{P-AOB} = \frac{1}{3} S_{\triangle AOB} \cdot OP = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} r^2 \sin \theta \cdot h = \frac{1}{6} r^2 \sin \theta \cdot h, \text{ 圆锥体积 } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h, \therefore \frac{V_{P-AOB}}{V} = \frac{\frac{1}{6} r^2 \sin \theta \cdot h}{\frac{1}{3} \pi r^2 h} = \frac{\sin \theta}{2\pi} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi},$$

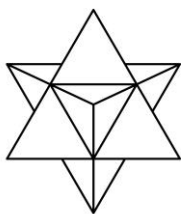
$$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}; \because PO \perp \text{平面 } AOB, OA \subset \text{平面 } AOB, \therefore PO \perp OA, \text{ 则 } PA > OA, \text{ 即 } P'A > OA,$$

$$\therefore \angle AOP' > \angle AP'O, \therefore \angle AOB > \angle AP'B, \text{ 又 } \angle AOB + \angle AP'B = \pi, \therefore \theta = \frac{2\pi}{3}, \therefore \angle AOP' = \frac{\pi}{3}, \therefore \frac{OA}{OP'} = \cos \angle AOP' = \frac{1}{2}.$$

23. (2023 天津和平 统考二模) 如图甲是一水晶饰品，其对应的几何体叫星形八面体，也叫八角星体，是一种二复合四面体，它是由两个有共同中心的正四面体交叉组合而成且所有面都是全等的小正三角形，如图乙所示. 若一星形八面体中两个正四面体的棱长均为 2，则该星形八面体体积为 ()



甲



乙

A. $\sqrt{2}$

B. $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{11\sqrt{2}}{12}$

D. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

【答案】A

【分析】根据已知条件及正四面体的体积公式即可求解.

【详解】由题意可知星行八面体体积为一个棱长为 2 的大正四面体与四个棱长为 1 的小正四面体的体积之和，

$$\text{故该星形八面体体积为 } V = \frac{\sqrt{2}}{12} \times 2^3 + 4 \times \frac{\sqrt{2}}{12} \times 1^3 = \sqrt{2}. \text{ 故选: A.}$$

24. (2023 秋 天津南开 高三南开中学校考阶段练习) 已知一个正四棱柱所有棱长均为 3，若该正四棱柱内接于半球体，即正四棱柱的上底面的四个顶点在球面上，下底面的四个顶点在半球体的底面圆内，则半球体的体积为 ().

A. $\frac{27\sqrt{6}}{2}\pi$

B. $54\sqrt{3}\pi$

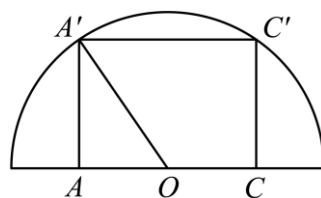
C. $27\sqrt{6}\pi$

D. $27\sqrt{3}\pi$

【答案】A 【分析】作出半球体的截面图，求出半球的半径，即可求得答案.

【详解】设正四棱柱 $ABCD-A'B'C'D'$ 的底面 $ABCD$ 在半球的底面圆上，则球心 O 为 $ABCD$ 的中心，

作出半球体的截面图如图，四边形 $ACC'A'$ 为正四棱柱的对角面，连结 OA' ，

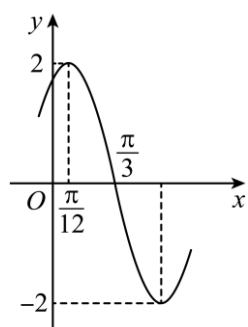


正四棱柱所有棱长均为 3,

所以 $AO = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\therefore A'O = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$, 即半球的半径 $R = \frac{3\sqrt{6}}{2}$, 所以半球体的体积为

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \cdot \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^3 = \frac{27\sqrt{6}}{2} \pi, \text{ 故选: A}$$

25. (2023 天津北辰 统考三模) 已知函数 $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$ ($A > 0$, $\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 关于该函数有下列四个说法:



① $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{4\pi}{3}, 0\right)$ 对称;

② $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{5\pi}{12}$ 对称;

③ $f(x)$ 的图象可由 $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度得到;

④ 若方程 $g(x) = f(tx)$ ($t > 0$) 在 $\left(0, \frac{5\pi}{6}\right)$ 上有且只有两个极值点, 则 t 的最大值为 $\frac{13}{10}$.

以上四个说法中, 正确的个数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】C 【分析】根据函数图象及五点作图法求出函数解析式, 再根据余弦函数的性质一一判断即可.

【详解】依题意可得 $A = 2$, $\frac{1}{4} \times \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}$, $\therefore \omega = 2$,

再根据五点法作图可得 $2 \times \frac{\pi}{12} + \varphi = 0$, 解得 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$, $f(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

因为 $f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2 \cos\left(2 \times \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos \frac{5\pi}{2} = 0$, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{4\pi}{3}, 0\right)$ 对称, 故①正确;

因为 $f\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = 2 \cos\left(-2 \times \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos(-\pi) = -2$, 所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{5\pi}{12}$ 对称, 故②正确;

将 $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度得到 $y = 2 \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{6}\right] = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6} + \pi\right) = -2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$,

故③错误; 因为 $g(x) = f(tx) = 2 \cos\left(2tx - \frac{\pi}{6}\right)$, 当 $x \in \left(0, \frac{5\pi}{6}\right)$ 时且 $t > 0$, $2tx - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi t}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$,

因为函数 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{5\pi}{6}\right)$ 上有且只有两个极值点, 所以 $\pi < \frac{5\pi t}{3} - \frac{\pi}{6} \leq 2\pi$, 解得 $\frac{7}{10} < t \leq \frac{13}{10}$, 即 t 的最大值为 $\frac{13}{10}$, 故④

正确; 故选: C

26. (2023 天津和平 耀华中学校考一模) 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的最小正周期为 π , 其图象关于

直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称. 给出下面四个结论: ①将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到函数图象关于原点对称; ②点

$\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$ 为 $f(x)$ 图象的一个对称中心; ③ $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$; ④ $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{6}]$ 上单调递增. 其中正确的结论为 ()

A. ①②

B. ②③

C. ②④

D. ①④

【答案】C

【解析】根据题设条件，结合三角函数的性质，求得函数的解析式 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ ，再结合三角函数的图象变换和三角函数的性质，逐项判定，即可求解.

【详解】因为函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 的最小正周期为 π ，其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称，

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{2\pi}{\omega} = \pi \\ \frac{\pi}{6}\omega + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} \omega = 2 \\ \varphi = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases},$$

因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ，所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ，因此 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ ，

①将 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后函数解析式为 $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$ ，

由 $2x - \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，得 $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ，所以其对称中心为： $(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, 0), k \in \mathbb{Z}$ ，故①错；

②由 $2x + \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，解得 $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ ，即函数 $f(x)$ 的对称中心为 $(-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, 0), k \in \mathbb{Z}$ ；令 $-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} = \frac{5\pi}{12}$ ，则

$k = 1$ ，故②正确；③由 $f(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，故③错；

④由 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，得 $-\frac{2\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，

即函数 $f(x)$ 的增区间为 $[-\frac{2\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi], k \in \mathbb{Z}$ ，因此 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{6}]$ 上单调递增，故④正确.故选：C.

【点睛】本题主要考查了三角函数的图象与性质的综合应用，其中解答中熟记三角函数的图象与性质，准确运算是解答的关键，着重考查推理与运算能力.

27. (2023 天津 统考二模) 若函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \frac{\pi}{6}) (\omega > 0)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ 上具有单调性，则 ω 的最大值是 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】B 【分析】由 x 的范围确定 $\omega x + \frac{\pi}{6}$ 的范围，分别讨论 $f(x)$ 单调递增和单调递减的情况，根据正弦型函数单调性的判断方法可构造不等式组求得 ω 的范围，进而确定最大值.

【详解】当 $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ 时， $\omega x + \frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{6}]$ ；若 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ 上单调递增，则

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{6} > -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}), \text{ 解得: } \begin{cases} \omega \leq 4 - 12k \\ \omega \leq 2 + 12k \end{cases} (k \in \mathbb{Z}), \text{ 又 } \omega > 0, \therefore \text{若不等式组有解, 则 } \begin{cases} 4 - 12k > 0 \\ 2 + 12k > 0 \end{cases}$$

解得： $-\frac{1}{6} < k < \frac{1}{3}$ ， $\therefore k = 0$ ，则 $0 < \omega \leq 2$ ；

$$\text{若 } f(x) \text{ 在 } [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}] \text{ 上单调递减, 则 } \begin{cases} -\frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{6} > \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}),$$

解得: $\begin{cases} \omega \leq -2-12k \\ \omega \leq 8+12k \end{cases}$, 又 $\omega > 0$, $\therefore$ 若不等式组有解, 则 $\begin{cases} -2-12k > 0 \\ 8+12k > 0 \end{cases}$,

解得: $-\frac{2}{3} < k < -\frac{1}{6}$, 与 $k \in \mathbf{Z}$ 矛盾, $\therefore f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ 上单调递减不成立;

综上所述: $\omega \in (0, 2]$, 则 ω 的最大值为 2. 故选: B.

28. (2023 天津南开 统考二模) 已知函数 $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$, 给出下列结论:

① $f(x + \pi) = f(x)$; ② 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后, 得到的函数图象关于原点对称;

③ 若 $0 < x_1 < x_2 < \frac{5\pi}{12}$, 则 $f(x_1) < f(x_2)$; ④ 对 $\forall x_1, x_2, x_3 \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, 有 $f(x_1) + f(x_3) > f(x_2)$ 成立.

其中正确结论的个数为 () A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】C 【分析】由函数周期性判断①, 由对称性判断②, 由单调性判断③, 取 x_1, x_3 为已知区间内两个最小值点,

x_2 为最大值点, 验证不等式成立, 然后可判断④. 【详解】易知函数 $f(x)$ 的最小正周期是 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, ①正确;

将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后, 得到的图象的函数解析式是 $y = 2\sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{3}\right] + 1 = 2\sin 2x + 1$, 图象关

于点 $(0, 1)$ 对称, 不关于原点对称, ②错;

$x \in (0, \frac{5\pi}{12})$ 时, $2x - \frac{\pi}{3} \in (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$, 因此 $f(x)$ 在 $(0, \frac{5\pi}{12})$ 上单调递增, ③正确;

$x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ 时, $2x - \frac{\pi}{3} \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$, 因此 $x = \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $\sqrt{3} + 1$, $x = \frac{5\pi}{12}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 3, 取

$x_1 = \frac{\pi}{3}, x_3 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{5\pi}{12}$, 则 $f(x_1) + f(x_3) > f(x_2)$ 成立, 因此 $\forall x_1, x_2, x_3 \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, 有 $f(x_1) + f(x_3) > f(x_2)$ 成立, ④正

确, 共有 3 个命题正确. 故选: C.

29. (2023 天津红桥 统考二模) 设函数 $f(x) = \sin \omega x + \cos \omega x (\omega > 0)$ 的最小正周期为 π , 将 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位得函数 $y = g(x)$ 的图象, 则

A. $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减 B. $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right)$ 上单调递减

C. $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增 D. $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right)$ 上单调递增

【答案】A 【详解】 $f(x) = \sin \omega x + \cos \omega x = \sqrt{2} \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$, 则 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 解得 $\omega = 2$, 即

$f(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$;

$y = f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位得函数 $g(x) = \sqrt{2} \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \cos 2x$ 的图象;

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $2x \in (0, \pi)$, 所以 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减.

30. (2023 天津 校联考二模) 已知函数 $f(x) = 2 \cos x \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$, 则下列说法正确的个数是 ()

- ① $f(x)$ 的最小正周期为 π ；② $f(x)$ 图象的对称中心为 $\left(-\frac{\pi}{12} + k\pi, -\frac{1}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ ；③ $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增；
④ 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后，可得到一个奇函数的图象。

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】B

【分析】先化简为 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}$ ，利用周期公式可判断①；令 $2x + \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，求解可判断②；由 $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$ 可得 $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ，从而得到单调性即可判断③；求得平移后的解析式为 $g(x) = \sin 2x - \frac{1}{2}$ ，利用奇函数的定义可判断④。

【详解】

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \cos x \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 2 \cos x \left(\sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x \cdot \frac{1}{2}\right) - 1 = \sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \\ &= \sin 2x \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2x \cdot \sin \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

对于①， $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ ，所以 $f(x)$ 的最小正周期为 π ，①对；

对于②，令 $2x + \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，所以 $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ，②错；

对于③， $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$ ， $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ，而 $y = \sin t$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，

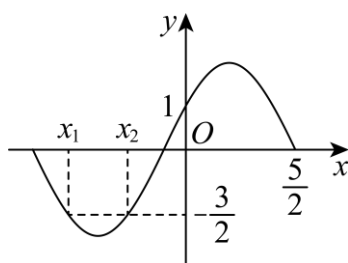
所以 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增，③对；

对于④，将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后得到的函数解析式为 $g(x) = \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} = \sin 2x - \frac{1}{2}$ ，

而 $g(-x) \neq -g(x)$ ，所以 $g(x)$ 不是奇函数，④错。故选：B

31. (2023 天津和平 统考二模) 函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ $\left(\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，

$f(x_1) = f(x_2) = -\frac{3}{2}$ ，则下列四个选项中正确的个数为 ()



① $\cos\left[\frac{\pi}{6}(x_2 - x_1)\right] = \frac{3}{4}$

② 函数 $y = f(x)$ 在 $[2, 5]$ 上单调递减；

③ 函数 $y = f(x)$ 在 $[3, 6]$ 上的值域为 $[-1, 1]$ ；

④ 曲线 $y = f(x)$ 在 $x = -1$ 处的切线斜率为 $\sqrt{3}$ 。

A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

【答案】B 【分析】根据图像求 $y = f(x)$ 的解析式，对于①②③：结合正弦函数的性质分析运算；对于④：结合导

数的几何意义运算求解.

【详解】由图可知：函数 $y = f(x)$ 过点 $(0,1)$ ，则 $f(0) = 2 \sin \varphi = 1$ ，

即 $\sin \varphi = \frac{1}{2}$ ，且 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ，可得 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ，又因为函数 $y = f(x)$ 过点 $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ ，且为减区间的零点，

则 $f\left(\frac{5}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{5}{2}\omega + \frac{\pi}{6}\right) = 0$ ，即 $\sin\left(\frac{5}{2}\omega + \frac{\pi}{6}\right) = 0$ ，则 $\frac{5}{2}\omega + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \pi, k \in \mathbf{Z}$ ，解得 $\omega = \frac{(12k+5)\pi}{15}, k \in \mathbf{Z}$ ，

注意到 $\begin{cases} \frac{T}{4} < \frac{5}{2} \\ \frac{T}{2} > \frac{5}{2} \end{cases}$ ，即 $5 < T < 10$ ，则 $\begin{cases} 5 < \frac{2\pi}{|\omega|} < 10 \\ \omega > 0 \end{cases}$ ，解得 $\frac{\pi}{5} < \omega < \frac{2\pi}{5}$ ，故 $\frac{\pi}{5} < \frac{(12k+5)\pi}{15} < \frac{2\pi}{5}$ ，解得 $k = 0$ ，此时 $\omega = \frac{\pi}{3}$ ，

所以 $f(x) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{6}\right)$ 。

对于①：令 $\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{6} = k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$ ，解得 $x = 3k - 2, k \in \mathbf{Z}$ ，取 $k = 0$ ，则 $x = -2$ ，

即函数 $y = f(x)$ 在 y 轴左侧离 y 轴最近的对称轴为 $x = -2$ ，由图可得 $x_1 + x_2 = -4$ ，即 $x_2 = -4 - x_1$ ，

且 $f(x_1) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}x_1 + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}$ ，即 $\sin\left(\frac{\pi}{3}x_1 + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{3}{4}$ ，

所以 $\cos\left[\frac{\pi}{6}(x_2 - x_1)\right] = \cos\left[\frac{\pi}{6}(-4 - 2x_1)\right] = \cos\left[-\left(\frac{\pi}{3}x_1 + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{3}x_1 + \frac{2\pi}{3}\right)$

$= \cos\left[\left(\frac{\pi}{3}x_1 + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = -\sin\left(\frac{\pi}{3}x_1 + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$ ，

故①正确；

对于②：因为 $x \in [2, 5]$ ，则 $\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$ ，

且 $y = \sin x$ 在 $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$ 不单调，所以 $y = f(x)$ 在 $[2, 5]$ 上不单调，

故②错误；

对于③：因为 $x \in [3, 6]$ ，则 $\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right]$ ， $\sin\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{6}\right) \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$ ，

可得 $f(x) \in [-2, 1]$ ，所以函数 $y = f(x)$ 在 $[3, 6]$ 上的值域为 $[-2, 1]$ ，

故③错误；对于④： $\because f'(x) = \frac{2\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，

可得 $f'(-1) = \frac{2\pi}{3} \cos\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3} \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{3}$ ，曲线 $y = f(x)$ 在 $x = -1$ 处的切线斜率为 $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$ ，故④错

误；故选：B。

【点睛】方法定睛：函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的解析式的确定

(1) A 由最值确定， $A = \frac{1}{2}(\text{最大值} - \text{最小值})$ ；(2) ω 由周期确定；(3) φ 由图象上的特殊点确定。

提醒：根据“五点法”中的零点求 φ 时，一般先根据图象的升降分清零点的类型。

32. (2023 天津河东 统考二模) 已知函数 $f(x) = \sin \omega x - \sqrt{3} \cos \omega x (\omega > 0)$ 的图像与 x 轴的两个相邻交点的距离等于 $\frac{\pi}{2}$,

若将函数 $y = f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到函数 $y = g(x)$ 的图像, 则 $y = g(x)$ 是减函数的区间为.

- A. $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$ B. $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ C. $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ D. $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$

【答案】D 【解析】先化简函数得 $f(x) = 2 \sin(\omega x - \frac{\pi}{3})$, 再由图象与 x 轴的两个相邻交点的距离等于 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$ 得 $T = \pi$,

$\omega = 2$, $f(x) = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{3})$, 再写出平移后的 $g(x)$, 求出单调递减区间判断即可.

【详解】解: $f(x) = \sin \omega x - \sqrt{3} \cos \omega x = 2 \sin(\omega x - \frac{\pi}{3})$

因为图象与 x 轴的两个相邻交点的距离等于 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$ 所以 $T = \pi$, $\omega = 2$ 所以 $f(x) = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{3})$

所以 $g(x) = 2 \sin[2(x + \frac{\pi}{6}) - \frac{\pi}{3}] = 2 \sin 2x$ 由 $\frac{\pi}{2} + k\pi \leq 2x \leq \frac{3\pi}{2} + k\pi$ 得 $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

所以 $y = g(x)$ 是减函数的区间为 $\left[\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right] (k \in \mathbb{Z})$ 分析选项只有 D 符合故选 D.

33. (2023 天津河西 统考二模) 已知函数 $f(x) = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x$, 则下列结论中正确个数为 ()

①函数 $y = f\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$ 为偶函数 ②函数 $y = |f(x)|$ 的最小正周期为 π

③函数 $y = f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值为 1 ④函数 $y = f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}\right] (k \in \mathbb{Z})$

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】C 【分析】化简得到 $f(x) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, 根据三角函数的奇偶性, 单调性和值域得到①③④正确, 确定

$\left|f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| = |f(x)|$ 得到②错误, 得到答案. 【详解】 $f(x) = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$,

对①: $y = f\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos 2x$, 为偶函数, 正确;

对②: $\left|f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|2 \sin\left(2x + \pi - \frac{\pi}{3}\right)\right| = \left|-2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right| = \left|2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right| = |f(x)|$,

故 $\frac{\pi}{2}$ 是 $y = |f(x)|$ 的周期, 错误; 对③: $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, 则 $2x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$, 函数的最大值为 $2 \sin \frac{\pi}{6} = 1$, 正确;

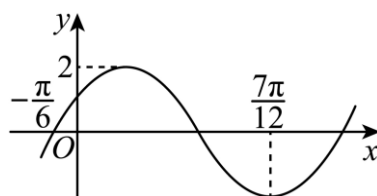
对④: 取 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 解得 $k\pi - \frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 故函数的单调递增区间为

$\left[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}\right] (k \in \mathbb{Z})$, 正确. 故选: C

34. (2023 春 天津和平 高三天津一中校考阶段练习) 已知函数

$f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) \left(\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示, 则下列说法中正确的

是 ()



A. $\varphi = \frac{\pi}{8}$ B. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$ 中心对称

C. 若 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{7\pi}{24}, a\right]$ 上存在最大值, 则实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{\pi}{12}, +\infty\right)$ D. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称

【答案】C 【分析】根据图象求得 $f(x)$ 的解析式, 根据三角函数的对称性、最值等知识对选项进行分析, 从而确定

正确答案. 【详解】由题图知, $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{4}{3} \times \left(\frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{12}\right) = \pi$, 则 $\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

所以 $f(x) = A \sin(2x + \varphi)$. 将 $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 代入得 $A \sin\left(-\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = 0$, 则 $-\frac{\pi}{3} + \varphi = k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 即 $\varphi = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 将 $\left(\frac{7\pi}{12}, -2\right)$ 代入得 $A \sin\left(\frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = -2$, 则 $A = 2$, 所以 $f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, A 选项错误;

当 $x = \frac{2\pi}{3}$ 时, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(2 \times \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \neq 0$,

所以点 $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$ 不是 $f(x)$ 的图象的一个对称中心, B 选项错误; 当 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} < 2$,

所以直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 不是 $f(x)$ 的图象的一个对称轴, D 选项错误;

易得 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{7\pi}{24}, \frac{\pi}{12}\right)$ 上单调递增, 且 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 \sin\left(2 \times \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2$,

即 $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{12}$ 时取得最大值, 所以 $a > \frac{\pi}{12}$, 即实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{\pi}{12}, +\infty\right)$, C 正确.

35. (2023 天津河西 天津市新华中学校考模拟预测) 已知 $f(x) = 2 \sin^2\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) - 1 (\omega > 0)$, 给出下列结论:

①若 $f(x_1) = 1, f(x_2) = -1$, 且 $|x_1 - x_2|_{\min} = \pi$, 则 $\omega = 1$;

②存在 $\omega \in (0, 2)$, 使得 $f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到的图像关于 y 轴对称;

③若 $\omega = 1$, 则 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增;

④若 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上恰有 5 个零点, 则 ω 的取值范围为 $\left(\frac{29}{12}, \frac{35}{12}\right]$. 其中, 所有正确结论的个数是 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】B 【分析】由二倍角公式可得 $f(x) = -\cos\left(2\omega x + \frac{2\pi}{3}\right)$, 利用余弦函数的图像和性质判断各结论即可.

【详解】由题意可得 $f(x) = 2 \sin^2\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) - 1 = -\cos\left(2\omega x + \frac{2\pi}{3}\right)$,

①由 $f(x_1) = 1, f(x_2) = -1$ 且 $|x_1 - x_2|_{\min} = \pi$ 可得两相邻对称轴间的距离为 π , 所以 $\frac{T}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{2\omega} = \pi$, 解得 $\omega = \frac{1}{2}$, 错误;

② $f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得 $g(x) = -\cos\left[2\omega\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{2\pi}{3}\right] = -\cos\left(2\omega x + \frac{2\omega\pi + 4\pi}{6}\right)$,

若 $g(x)$ 关于 y 轴对称, 则 $g(0) = -\cos\left(\frac{2\omega\pi + 4\pi}{6}\right) = \pm 1$, 即 $\frac{2\omega\pi + 4\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

解得 $\omega = -2 + 3k, k \in \mathbb{Z}$, 所以当 $\omega = 1$ 时符合题意, 正确;

③当 $\omega = 1$ 时 $f(x) = -\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$, 所以当 $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ 时 $2x + \frac{2\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right]$,

因为 $\cos x$ 在 $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ 上单调递减, 在 $\left[\pi, \frac{7\pi}{6}\right]$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增, 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递减, 错误;

④设 $t = 2\omega x + \frac{2\pi}{3}$, 当 $x \in [0, \pi)$ 时 $t = 2\omega x + \frac{2\pi}{3} \in \left[\frac{2\pi}{3}, 2\pi\omega + \frac{2\pi}{3}\right)$, $f(x)$ 在 $[0, \pi)$ 上恰有 5 个零点, 即 $y = -\cos t$ 在 $t = 2\omega x + \frac{2\pi}{3} \in \left[\frac{2\pi}{3}, 2\pi\omega + \frac{2\pi}{3}\right)$ 上有 5 个零点, 则 $\frac{11\pi}{2} < 2\pi\omega + \frac{2\pi}{3} \leq \frac{13\pi}{2}$, 解得 $\frac{29}{12} < \omega \leq \frac{35}{12}$, 正确; 综上②④正确,

36. (天津市和平区 2022-2023 学年高三上学期期末数学试题) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2\omega x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\omega x$, ($\omega > 0$),

且 $f(x)$ 的最小正周期为 π , 给出下列结论: ①函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{12}\right]$ 单调递减; ②函数 $f(x)$ 关于直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 对

称; ③把函数 $y = \sin 2x$ 的图象上所有点向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 可得到函数 $y = f(x)$ 的图象.

其中所有正确结论的序号是 ()

- A. ①② B. ①③ C. ②③ D. ①②③

【答案】A 【分析】首先求函数的解析式, 再分别采用代入的方法, 判断①②, 根据函数的平移规律, 求平移后的解

析式, 判断③. 【详解】 $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2\omega x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\omega x = \sin\left(2\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$, ($\omega > 0$), 周期 $T = \frac{2\pi}{2\omega} = \pi$, 得 $\omega = 1$,

所以 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$,

①当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{12}\right)$ 时, $2x + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right) \quad \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{12}\right)$ 单调递减, 故①正确;

②当 $x = \frac{\pi}{12}$ 时, $2 \times \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, 所以函数 $f(x)$ 关于直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 对称, 故②正确

③函数 $y = \sin 2x$ 的图象上所有点向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得函数 $y = \sin 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) \neq \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, 故

③错误. 故选: A

37. (2023 秋 天津南开 高三南开中学校考阶段练习) 已知函数 $f(x) = \cos 2x + 2\sin x \cos x$ ($x \in \mathbf{R}$), 有下述三个结论:

① $f(x)$ 的最小正周期是 π ; ② $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减;

③将 $f(x)$ 的图象上所有点向左平行移动 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后, 得到函数 $g(x) = \sqrt{2}\sin 2x$ 的图象.

其中所有正确结论的编号是 ()

- A. ① B. ② C. ①② D. ①②③ 【答案】C

【分析】利用三角恒等变换化简函数解析式为 $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, 利用正弦型函数的周期公式可判断①; 利用正弦型函数的单调性可判断②; 利用三角函数图象变换可判断③.

【详解】因为 $f(x) = \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

对于①, 函数 $f(x)$ 的最小正周期是 $\frac{2\pi}{2} = \pi$, ①对; 对于②, 当 $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{7\pi}{12} < 2x + \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4}$,

所以, 函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, ②对;

对于③, 将 $f(x)$ 的图象上所有点向左平行移动 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后, 得到

$$g(x) = \sqrt{2} \sin \left[2 \left(x + \frac{\pi}{8} \right) + \frac{\pi}{4} \right] = \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{2} \cos 2x \text{ 的图象, ③错. 故选: C.}$$

二、双空题(共 0 分)

38. (2023 天津和平 统考三模) 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2\omega x + \cos 2\omega x (\omega > 0)$, (i) 若 $\omega = 1$, 将函数 $f(x)$ 沿 x 轴向右平移 $\varphi \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \right)$ 个单位后得到一个偶函数, 则 $\varphi =$ _____; (ii) 若 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$ 上单调递增, 则 ω 的最大值为 _____. 【答案】 $\frac{\pi}{3}$ $\frac{1}{6}$

【分析】(1) 根据三角函数的图象变换求出解析式, 再根据偶函数的定义求解;

(2) 根据函数在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$ 上单调递增, 结合函数的周期可得 $0 < \omega \leq 1$, 再根据单调递增列出不等式即可求得 ω 的最大值.

【详解】 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2\omega x + \cos 2\omega x = 2 \sin \left(2\omega x + \frac{\pi}{6} \right)$, (i) 若 $\omega = 1$, 则 $f(x) = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right)$,

向右平移 $\varphi \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \right)$ 个单位后所得函数为 $y = 2 \sin \left(2x - 2\varphi + \frac{\pi}{6} \right)$, 因为平移得到一个偶函数, 所以

$$-2\varphi + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ 解得 } \varphi = -\frac{\pi}{6} - \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \text{ 因为 } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以当 } k = -1 \text{ 时, } \varphi = \frac{\pi}{3} \text{ 满足题意,}$$

(ii) 若 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$ 上单调递增, 则函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2\omega} > 2 \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right)$, 解得 $0 < \omega \leq 1$,

$$\text{且 } \left(\omega\pi + \frac{\pi}{6}, 2\omega\pi + \frac{\pi}{6} \right) \subseteq \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right), k \in \mathbb{Z}, \text{ 即 } \begin{cases} \omega\pi + \frac{\pi}{6} > -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 2\omega\pi + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}, \text{ 解得 } -\frac{2}{3} + 2k \leq \omega \leq \frac{1}{6} + k, k \in \mathbb{Z},$$

又因为 $0 < \omega \leq 1$, 所以当 $k = 0$ 时, $-\frac{2}{3} < \omega \leq \frac{1}{6}$, 即 $0 < \omega \leq \frac{1}{6}$, 所以 ω 的最大值为 $\frac{1}{6}$. 故答案为: $\frac{\pi}{3}; \frac{1}{6}$.

39. (2023 春 天津南开 高三南开中学校考阶段练习) 教育部决定自 2020 年起, 在部分高校开展基础学科招生改革试点 (也称强基计划). 强基计划主要选拔培养有志于服务国家重大战略需求且综合素质优秀或基础学科拔尖的学生, 强基计划的校考由试点高校自主命题. 已知甲、乙两所大学的笔试环节都设有三门考试科目, 且每门科目是否通过相互独立. 若某考生报考甲大学, 每门科目通过的概率分别为 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ 该考生报考乙大学, 每门科目通过的概率均为 $\frac{1}{2}$, 设 A 为事件“该考生报考乙大学在笔试环节至少通过二门科目”, 事件 A 发生的概率为 _____, 设 X 为该考生通过甲大学的笔试环节科目数, 随机变量 X 的数学期望为 _____. 【答案】 $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$

【分析】(1) 先分析出事件 A 包含该考生报考乙大学在笔试环节通过二门科目和通过三门科目, 利用独立重复试验的概率公式求概率; (2) 分析出 X 的值可能为 0, 1, 2, 3, 分别利用独立重复试验的概率公式求概率, 再求分布列即可.

【详解】(1) 事件 A : 该考生报考乙大学在笔试环节通过二门科目和通过三门科目,

$$\text{所以 } P(A) = C_3^2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \frac{1}{2} + C_3^3 \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{2}.$$

(2) 由题意可得, X 的值可能为 0,1,2,3.

$$P(X=0) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{9}; \quad P(X=1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{18};$$

$$P(X=2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{18}; \quad P(X=3) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{9}.$$

$$\text{即随机变量 } X \text{ 的数学期望为: } EX = 0 \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{7}{18} + 2 \times \frac{7}{18} + 3 \times \frac{1}{9} = \frac{3}{2}.$$

40. (2023 天津河西 天津市新华中学校考模拟预测) 现有 10 道题, 其中 6 道甲类题, 4 道乙类题, 张同学从中任取 3 道题解答.

(1) 已知张同学至少取到 1 道乙类题, 则他取到的题目不是同一类的概率为_____;

(2) 已知所取的 3 道题中有 2 道甲类题, 1 道乙类题. 张同学答对每道甲类题的概率都是 $\frac{3}{5}$, 答对每道乙类题的概率都是 $\frac{4}{5}$, 且各题答对与否相互独立. 用 x 表示张同学答对题的个数, 则 x 的数学期望为_____.

【答案】 $0.96 / \frac{24}{25}$ 2

【分析】(1) 根据题意, 求得事件 A: 至少取到 1 到乙类试题的概率 $P(A) = \frac{100}{120}$ 和事件 B: 至少取到 1 到甲类试题的概率 $P(AB) = \frac{96}{120}$, 结合条件概率的计算公式, 即可求解;

(2) 根据题意得到随机变量 x 的所有可能取值为 0,1,2,3, 求得相应的概率, 得出分布列, 利用期望的公式, 即可求解.

【详解】(1) 解: 由题意知有 10 道题, 其中 6 道甲类题, 4 道乙类题, 张同学从中任取 3 道题解答, 设事件 A: 至少取到 1 到乙类试题的概率, 可得 $P(A) = \frac{C_4^1 C_6^2 + C_4^2 C_6^1 + C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{100}{120}$;

设事件 B: 至少取到 1 到甲类试题的概率, 可得 $P(AB) = \frac{C_4^1 C_6^2 + C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{96}{120}$,

所以取到 1 道乙类题, 则取到的题目不是同一类的概率为 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = 0.96$.

(2) 解: 由题意, 随机变量 x 的所有可能取值为 0,1,2,3,

$$\text{可得 } P(X=0) = C_2^0 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right) = \frac{4}{125}; \quad P(X=1) = C_2^1 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right) + C_2^0 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{28}{125};$$

$$P(X=2) = C_2^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right) + C_2^1 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{4}{5} = \frac{57}{125}; \quad P(X=3) = C_2^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right)^0 \cdot \frac{4}{5} = \frac{36}{125},$$

所以随机变量 x 的分布列为:

x	0	1	2	3
$P(X)$	$\frac{4}{125}$	$\frac{28}{125}$	$\frac{57}{125}$	$\frac{36}{125}$

$$\text{所以数学期望为 } E(X) = 0 \times \frac{4}{125} + 1 \times \frac{28}{125} + 2 \times \frac{57}{125} + 3 \times \frac{36}{125} = 2.$$

故答案为：0.96；2.

41. (2023 春 天津和平 高三天津一中校考阶段练习) 用数字 1, 2, 3, 4, 5 给 3 名男生和 2 名女生随机地编学号, 则男生和女生的学号都不相邻的编法有_____种 (用数字作答); 记随机变量 $\xi = X - Y$, 其中 X, Y 分别为男生、女生的学号之和, 则随机变量 ξ 的数学期望 $E(\xi) =$ _____. 【答案】 12 3

【分析】先考虑男生的编号方法, 再考虑女生的编号方法, 利用分步乘法计数原理求编法数即可, 由条件求出随机变量 ξ 的分布列再由期望公式求其期望. 【详解】由已知男生的编号为 1, 3, 5, 女生的编号为 2, 4,

用 1, 3, 5 给男生编号有 A_3^3 种编号方法, 用 2, 4 给女生编号有 A_2^2 种编号方法, 所以满足条件的编号方法有 12 种,

由已知随机变量 ξ 的取值有 -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9,

$$P(\xi = -3) = \frac{1}{C_5^3} = \frac{1}{10}, \quad P(\xi = -1) = \frac{1}{C_5^3} = \frac{1}{10}, \quad P(\xi = 1) = \frac{2}{C_5^3} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5},$$

$$P(\xi = 3) = \frac{2}{C_5^3} = \frac{1}{5}, \quad P(\xi = 5) = \frac{2}{C_5^3} = \frac{1}{5}, \quad P(\xi = 7) = \frac{1}{C_5^3} = \frac{1}{10}, \quad P(\xi = 9) = \frac{1}{C_5^3} = \frac{1}{10},$$

$$\text{所以 } E(\xi) = (-3) \times \frac{1}{10} + (-1) \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{1}{5} + 5 \times \frac{1}{5} + 7 \times \frac{1}{10} + 9 \times \frac{1}{10} = 3, \text{ 故答案为: } 12; 3$$

42. (2023 天津北辰 统考三模) 有两台车床加工同一型号的零件, 第一台车床加工的优秀率为 15%, 第二台车床加工的优秀率为 10%. 假定两台车床加工的优秀率互不影响, 则两台车床加工零件, 同时出现优秀品的概率为_____; 若把加工出来的零件混放在一起, 已知第一台车床加工的零件数占总数的 60%, 第二台车床加工的零件数占总数的 40%, 现任取一个零件, 则它是优秀品的概率为_____. 【答案】 1.5% 13%

【分析】根据独立事件的乘法公式即可求解第一空, 根据全概率公式即可求解第二空.

【详解】由于第一台车床加工的优秀率为 15%, 第二台车床加工的优秀率为 10%, 所以两台车床加工零件, 同时出现优秀品的概率为 $15\% \times 10\% = 1.5\%$

记 B “加工的零件为优秀品”, $A =$ “零件为第 1 台车床加工”, $\bar{A} =$ “零件为第 2 台车床加工”, $P(A) = 60\%$, $P(\bar{A}) = 40\%$, $P(B|A) = 15\%$, $P(B|\bar{A}) = 10\%$,

由全概率公式可得 $P(B) = P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = 60\% \times 15\% + 40\% \times 10\% = 13\%$,

故答案为: 1.5%, 13%

43. (2023 天津河西 统考二模) 设甲、乙两位同学上学期间, 每天 7:30 之前到校的概率均为 $\frac{2}{3}$. 假定甲、乙两位同学到校情况互不影响, 且任一同学每天到校情况相互独立. 用 x 表示甲同学上学期间的三天中 7:30 之前到校的天数, 则随机变量 x 的数学期望为_____; 设 M 为事件“上学期间的三天中, 甲同学在 7:30 之前到校的天数比乙同学在 7:30 之前到校的天数恰好多 2”, 则事件 M 发生的概率为_____. 【答案】 2 $\frac{20}{243}$

【分析】由题设知 $X \sim B(3, \frac{2}{3})$, 根据二项分布的期望公式求期望, 应用独立事件乘法公式及互斥事件的加法公式求

M 为事件的概率. 【详解】由题意知: $X = \{0, 1, 2, 3\}$, 且服从 $X \sim B(3, \frac{2}{3})$,

$$\therefore E(X) = np = 3 \times \frac{2}{3} = 2.$$

甲同学在 7:30 之前到校的天数比乙同学在 7:30 之前到校的天数恰好多 2 的基本事件有{甲 3 天乙 1 天, 甲 2 天乙 0 天}, 又 $P(X=0)=C_3^0(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^0=\frac{1}{27}$, $P(X=1)=C_3^1(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^1=\frac{6}{27}$, $P(X=2)=C_3^2(\frac{1}{3})^1(\frac{2}{3})^2=\frac{12}{27}$, $P(X=3)=C_3^3(\frac{1}{3})^0(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$, $\therefore P=\frac{8}{27}\times\frac{6}{27}+\frac{12}{27}\times\frac{1}{27}=\frac{20}{243}$. 故答案为: 2, $\frac{20}{243}$.

44. (2023 天津和平 统考二模) 在学校大课间体育活动中, 甲、乙两位同学进行定点投篮比赛, 每局比赛甲、乙每人各投篮一次, 若一方命中且另一方未命中, 则命中的一方本局比赛获胜, 否则为平局. 已知甲、乙每次投篮命中的概率分别为 $\frac{4}{5}$ 和 $\frac{3}{4}$, 且每局比赛甲、乙命中与否互不影响, 各局比赛也互不影响. 则进行 1 局投篮比赛, 甲、乙平局的概率为_____; 设共进行了 10 局投篮比赛, 其中甲获胜的局数为 X , 求 X 的数学期望 $E(X)=$ _____.

【答案】 $\frac{13}{20}/0.65$ 2

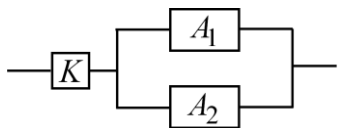
【分析】第一空, 考虑两人平局情况, 根据相互独立事件的乘法公式, 即可求得答案; 第二空, 求出甲每局获胜的概率, 确定甲获胜的局数 $X \sim B(10, \frac{1}{5})$, 根据二项分布的期望公式即可求得答案.

【详解】由题意知甲、乙每次投篮命中的概率分别为 $\frac{4}{5}$ 和 $\frac{3}{4}$,

则甲、乙平局的情况为两人都投中或都不中, 故平局概率为 $\frac{4}{5} \times \frac{3}{4} + (1 - \frac{4}{5})(1 - \frac{3}{4}) = \frac{13}{20}$; 甲每局获胜的概率为

$\frac{4}{5} \times (1 - \frac{3}{4}) = \frac{1}{5}$, 故共进行了 10 局投篮比赛, 其中甲获胜的局数为 X , 则 $X \sim B(10, \frac{1}{5})$, 故 $E(X) = 10 \times \frac{1}{5} = 2$,

45. (2023 天津 校联考二模) 如图, 用 K 、 A_1 、 A_2 三类不同的元件连接成一个系统. 当 K 正常工作且 A_1 、 A_2 至少有一个正常工时, 系统正常工作, 已知 K 、 A_1 、 A_2 正常工作的概率依次为 $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$, 则系统正常工作的概率为_____, 在系统能够正常工作的前提下, 只有 K 和 A_1 正常工作的概率为_____.



【答案】 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}/0.25$

【分析】根据概率乘法公式可求解空 1, 根据条件概率的计算公式即可求解空 2.

【详解】记“系统正常工作”为事件 A , 则概率为 $P(A) = \frac{3}{4} \times C_2^1 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$,

“ K 和 A_1 正常工作”为事件 AB , 则概率为 $P(AB) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$,

在系统能够正常工作的前提下, 只有 K 和 A_1 正常工作的概率为 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$,

46. (2023 天津红桥 统考二模) 随着我国经济发展越来越好, 外出旅游的人越来越多, 现有两位游客慕名来天津旅游, 他们分别从“天津之眼摩天轮、五大道风景区、古文化街、意式风情街、海河观光游船、盘山风景区”这 6 个景点中随机选择 1 个景点游玩, 记事件 A 为“两位游客中至少有一人选择天津之眼摩天轮”, 事件 B 为“两位游客选择的

景点不同”，则 $P(A) = \frac{11}{36}$ ， $P(B|A) = \frac{10}{11}$. 【答案】 $\frac{11}{36}$ $\frac{10}{11}$

【详解】由题意，两位游客从 6 个景点中随机选择 1 个景点游玩，每人都有 6 种不同的选法，故共有 $6 \times 6 = 36$ (种) 不同的选法.

两人都不选择天津之眼摩天轮的方法有 $5 \times 5 = 25$ (种)，

故两位游客中至少有一人选择天津之眼摩天轮的方法共有 $36 - 25 = 11$ (种)，

所以故两位游客中至少有一人选择天津之眼摩天轮的概率 $P(A) = \frac{11}{36}$.

AB 表示两位游客中至少有一人选择天津之眼摩天轮，且两位游客选择的景点不同，即一人选择天津之眼摩天轮，

另一人选择其它景点，共有 $A_2^1 A_5^1 = 10$ (种) 选法，故 $P(AB) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ ，所以 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{18}}{\frac{11}{36}} = \frac{10}{11}$.

47. (2023 天津南开 统考二模) 一个盒子中装有 5 个电子产品，其中有 3 个一等品，2 个二等品，从中每次抽取 1 个产品.若抽取后不再放回，则抽取三次，第三次才取得一等品的概率为_____；若抽取后再放回，共抽取 10 次，则平均取得一等品_____次.

【答案】 $0.1/\frac{1}{10}$ 6

【分析】由全概率公式即可求出抽取三次，第三次才取得一等品的概率；设 x 为抽取一等品的次数，抽取一等品的概率为 $\frac{3}{5}$ ，则 $X \sim \left(10, \frac{3}{5}\right)$ ，求出 $E(X)$ ，即可得出答案.

【详解】令 A_i 为第 $i (i = 1, 2, 3)$ 次取得一等品，所以抽取三次，第三次才取得一等品的概率为：

$$P(\overline{A_1} \overline{A_2} A_3) = P(\overline{A_1}) P(\overline{A_2} | \overline{A_1}) P(A_3 | \overline{A_1} \overline{A_2}) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{1}{10},$$

若抽取后再放回，则设 x 为抽取一等品的次数，抽取一等品的概率为 $\frac{3}{5}$ ，则 $X \sim \left(10, \frac{3}{5}\right)$ ， $E(X) = 10 \times \frac{3}{5} = 6$.

所以平均取得一等品 6 次.故答案为： $\frac{1}{10}$ ；6.

48. (2023 天津 统考二模) 某篮球队对队员进行考核，规则是①每人进行 5 个轮次的投篮；②每个轮次每人投篮 2 次，若至少投中 1 次，则本轮通过，否则不通过.已知队员甲投篮 1 次投中的概率为 0.6，如果甲各次投篮投中与否互不影响，那么甲第一轮通过的概率为_____；甲 5 个轮次通过的次数 x 的期望是_____.

【答案】 $0.84/\frac{21}{25}$ $4.2/\frac{21}{5}$

【详解】 A_i = “第 i 次投中”， $i = 1, 2$ ，

则甲第一轮通过的概率为 $P = 1 - P(\overline{A_1} \overline{A_2}) = 1 - P(\overline{A_1}) P(\overline{A_2}) = 1 - 0.4 \times 0.4 = 0.84$.

x 的可能取值为 0, 1, 2, 3, 4, 5， x 服从二项分布 $X \sim B(5, 0.84)$ ，

则甲 5 个轮次通过的次数 x 的期望是 $E(X) = 5 \times 0.84 = 4.2$.故答案为：0.84；4.2.

49. (2023 天津和平 统考三模) 有 3 台车床加工同一型号的零件，第 1 台加工的次品率为 6%，第 2, 3 台加工的次

品率均为 5%；加工出来的零件混放在一起，且第 1，2，3 台车床加工的零件数分别占总数的 25%，30%，45%。现从加工出来的零件中任取一个零件，则取到的零件是次品的概率为_____，取到的零件是次品，且是第 3 台车床加工的概率为_____。【答案】 0.0525 $\frac{3}{7}$

【分析】首先用数学语言表示已知条件，设 $B =$ “任取一个零件为次品”， $A_i =$ “零件为第 i 台车床加工”($i=1, 2, 3$)，则 $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ ， A_1, A_2, A_3 两两互斥。 $P(A_1) = 0.25$ ， $P(A_2) = 0.3$ ， $P(A_3) = 0.45$ ， $P(B|A_1) = 0.06$ ， $P(B|A_2) = P(B|A_3) = 0.05$ 。由条件概率公式计算 $P(B)$ ；由条件概率公式 $P(A_3|B) = \frac{P(A_3B)}{P(B)}$ 计算。

【详解】设 $B =$ “任取一个零件为次品”， $A_i =$ “零件为第 i 台车床加工”($i=1, 2, 3$)，则 $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ ， A_1, A_2, A_3 两两互斥。根据题意得 $P(A_1) = 0.25$ ， $P(A_2) = 0.3$ ， $P(A_3) = 0.45$ ， $P(B|A_1) = 0.06$ ， $P(B|A_2) = P(B|A_3) = 0.05$ 。由全概率公式，

得 $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) = 0.25 \times 0.06 + 0.3 \times 0.05 + 0.45 \times 0.05 = 0.0525$ 。

“如果取到的零件是次品，计算它是第 i ($i=1, 2, 3$) 台车床加工的概率”，就是计算在 B 发生的条件下，事件 A_i 发生的概率。

$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3B)}{P(B)} = \frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)} = \frac{0.45 \times 0.05}{0.0525} = \frac{3}{7}.$$
 故答案为：0.0525； $\frac{3}{7}$

三、填空题(共 0 分)

50. (2023 天津南开 南开中学校考模拟预测) 在临床上，经常用某种试验来诊断试验者是否患有某种癌症，设 $A =$ “试验结果为阳性”， $B =$ “试验者患有此癌症”，据临床统计显示 $P(A|B) = 0.99$ ， $P(\bar{A}|\bar{B}) = 0.98$ 。已知某地人群中患有此种癌症的概率为 0.001，现从该人群中随机抽在了 1 人，其试验结果是阳性，则此人患有此种癌症的概率为_____。【答案】 $\frac{11}{233}$

【分析】根据已知得出 $P(A|\bar{B})$ ， $P(B)$ 与 $P(\bar{B})$ ，再由条件概率公式与全概率公式计算得出结果。

【详解】由题意可得：

$$P(A|\bar{B}) = 1 - P(\bar{A}|\bar{B}) = 0.02, \quad P(B) = 0.001, \quad P(\bar{B}) = 0.999,$$

$$\begin{aligned} \therefore P(B|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})}, \\ &= \frac{0.99 \times 0.001}{0.99 \times 0.001 + 0.02 \times 0.999} = \frac{99}{2097} = \frac{11}{233}, \end{aligned}$$
 故答案为： $\frac{11}{233}$ 。

51. (2023 天津和平 耀华中学校考一模) 高三年级某 8 位同学的体重分别为 90，100，110，120，140，150，150，160 (单位：kg)，现在从中任选 3 位同学去参加拔河，则选中的同学中最大的体重恰好为这组数据的第 70 百分位数的概率是_____。【答案】 $\frac{25}{56}$

【分析】利用第 p 百分位数的定义及求法得到第 70 百分位数，根据古典概型的概率计算公式，组合数公式计算可得概率。【详解】因为 $8 \times 70\% = 5.6$ ，

$\therefore$ 第 70 百分位数是第六个数，即 150，

∴ 事件 A = “选中的同学中最大体重恰好为这组数据的第 70 百分位数”的概率 $P(A) = \frac{C_2^1 C_5^2 + C_2^2 C_5^1}{C_8^3} = \frac{25}{56}$.

52. (2023 天津南开 南开中学校考模拟预测) 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) \left(\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2} \right)$, $f(x) \leq \left| f\left(\frac{\pi}{6}\right) \right|$,

$f(x) + f\left(\frac{4\pi}{3} - x\right) = 0$, $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{36}, \frac{\pi}{6}\right)$ 上单调, 则正整数 ω 的最大值为_____.

【答案】7 【分析】根据 $f(x) \leq \left| f\left(\frac{\pi}{6}\right) \right|$ 可知直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 为 $f(x)$ 图象的对称轴, 根据 $f(x) + f\left(\frac{4\pi}{3} - x\right) = 0$ 可得 $f(x)$ 的对称中心为 $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$, 结合三角函数的周期性可得 $\omega = 2k + 1, k \in \mathbf{N}$, 再根据 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{36}, \frac{\pi}{6}\right)$ 上单调, 可得 $0 < \omega \leq \frac{36}{5}$, 当 ω 取到最大值 7 时, 求解 φ , 检验在 $\left(\frac{\pi}{36}, \frac{\pi}{6}\right)$ 上单调性看是否满足, 即可得答案.

【详解】∵ $f(x) \leq \left| f\left(\frac{\pi}{6}\right) \right|$, ∴ 直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 为 $f(x)$ 图象的对称轴, ∵ $f(x) + f\left(\frac{4\pi}{3} - x\right) = 0$, ∴ $f(x)$ 的对称中心为 $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$,

∴ $\frac{1+2k}{4}T = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{N}$, ∴ $T = \frac{2\pi}{2k+1} = \frac{2\pi}{\omega}, k \in \mathbf{N}$, ∴ $\omega = 2k + 1, k \in \mathbf{N}$.

又 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{36}, \frac{\pi}{6}\right)$ 上单调, ∴ $\frac{T}{2} > \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{36} = \frac{5\pi}{36}$. ∴ $T = \frac{2\pi}{\omega} > \frac{5\pi}{18}$, ∴ $0 < \omega \leq \frac{36}{5}$, 又 $\omega = 2k + 1, k \in \mathbf{N}$,

∴ 当 $\omega = 7$ 时, $f(x) = A \sin(7x + \varphi)$, 因为直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 为 $f(x)$ 图象的对称轴, 所以 $7 \times \frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

解得 $\varphi = -\frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 则 $f(x) = A \sin\left(7x + \frac{\pi}{3}\right)$,

当 $x \in \left(\frac{\pi}{36}, \frac{\pi}{6}\right)$ 时, $7x + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{19\pi}{36}, \frac{3\pi}{2}\right)$, 则 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{36}, \frac{\pi}{6}\right)$ 上单调,

则正整数 ω 的最大值为 7.

53. (2023 春 天津南开 高三南开中学校考阶段练习) 设复数 z 满足 $(1+2i)z = 3-4i$ (i 为虚数单位), 则 $|z|$ 的值为

_____. 【答案】 $\sqrt{5}$.

详解: 因为 $(1+2i)z = 3-4i$, 所以 $z = \frac{3-4i}{1+2i} = \frac{(3-4i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = -1-2i$, 所以 $|z| = \sqrt{5}$

54. (2023 天津南开 南开中学校考模拟预测) 若复数 z 满足 $(z+i)i = -3$, 则 $|z| =$ _____. 【答案】2

【详解】由题知, $(z+i)i = -3$, 所以 $z = \frac{-3}{i} - i = \frac{-3i}{-1} - i = 2i$, 所以 $|z| = 2$. 故答案为: 2

55. (2023 天津河西 天津市新华中学校考模拟预测) 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $2-3i^{2023} = \frac{1-2bi}{a+bi}$, 其中 i 为虚数单位, 则 $|a+bi|$

的值为_____. 【答案】 $2\sqrt{5}$

【分析】化简已知等式, 利用复数相等联立方程组, 进而可得结果. 【详解】解: $i^{2023} = i^{4 \times 505 + 3} = -i$,

则由 $2 - 3i^{2023} = \frac{1-2bi}{a+i}$, 得 $(2+3i)(a+i) = 1-2bi$, 即 $(2a-3) + (2+3a)i = 1-2bi$, 所以 $\begin{cases} 2a-3=1 \\ 2+3a=-2b \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a=2 \\ b=-4 \end{cases}$,

所以 $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2} = 2\sqrt{5}$. 答案为: $2\sqrt{5}$.

56. (2023 春 天津和平 高三天津一中校考阶段练习) 若 $(i+1)(z-1) = 2$, 则 $|\bar{z}+1| =$ _____. 【答案】 $\sqrt{10}$

【分析】根据复数的除法运算求出复数 z , 可得 $\bar{z} = 2+i$, 再根据复数模的计算即可得答案.

【详解】由 $(i+1)(z-1) = 2$ 可得 $z = \frac{2}{i+1} + 1 = \frac{2(1-i)}{2} + 1 = 2-i$, 故 $\bar{z} = 2+i$, 则 $|\bar{z}+1| = |3+i| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$,

57. (2023 天津和平 耀华中学校考一模) 若 $z = 1+i$, 则 $|iz+3\bar{z}| =$ _____. 【答案】 $2\sqrt{2}$

【分析】先求出 $iz+3\bar{z} = 2-2i$, 再利用复数的模长公式求解即可.

【详解】 $\because z = 1+i, \therefore iz+3\bar{z} = i+i^2+3(1-i) = i-1+3-3i = 2-2i, \therefore |iz+3\bar{z}| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$ 故答案为: $2\sqrt{2}$

58. (2023 天津北辰 统考三模) 已知 i 是虚数单位, 复数 $\frac{7+i}{3+4i}$ 的虚部为 _____. 【答案】 -1

【解析】利用复数的除法运算求解. 【详解】因为 $\frac{7+i}{3+4i} = \frac{(7+i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = 1-i$, 所以其虚部为 -1 , 故答案为: -1

59. (2023 天津河西 统考二模) 若复数 z 满足 $(3-4i)z = |4+3i|$, 则 z 的虚部为 _____. 【答案】 $\frac{4}{5}$.

【解析】根据复数的除法与模长公式求解 z 再得出虚部即可.

【详解】由题 $z = \frac{\sqrt{4^2+3^2}}{3-4i} = \frac{5(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{5(3+4i)}{25} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$. 故虚部为 $\frac{4}{5}$. 故答案为: $\frac{4}{5}$

60. (2023 天津和平 统考二模) 复数 z 满足 $(1+i)z = |\sqrt{3}-i|$, 则 $z =$ _____.

【答案】 $1-i/-i+1$

【详解】因为复数 z 满足 $(1+i)z = |\sqrt{3}-i|$, 所以 $z = \frac{|\sqrt{3}-i|}{1+i} = \frac{2}{1+i} = 1-i$, 故答案为: $1-i$.

61. (2023 天津 校联考二模) i 为虚数单位, 复数 $z = \frac{1+i}{1-2i} - i$, 复数 z 的共轭复数为 $\bar{z}$, 则 $\bar{z}$ 的虚部为 _____. 【答

案】 $\frac{2}{5}$ / 0.4 【分析】先化简得 $z = -\frac{1}{5} - \frac{2i}{5}$, 即得复数 $\bar{z}$ 和它的虚部.

【详解】由题得 $z = \frac{1+i}{1-2i} - i = \frac{(1+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} - i = \frac{-1+3i}{5} - i = -\frac{1}{5} - \frac{2i}{5}$,

所以 $\bar{z} = -\frac{1}{5} + \frac{2i}{5}$. 所以 $\bar{z}$ 的虚部为 $\frac{2}{5}$. 故答案为: $\frac{2}{5}$.

62. (2023 天津红桥 统考二模) 若 i 是虚数单位, 则复数 $\frac{1+i}{1-i} =$ _____. 【答案】 i

【分析】直接根据复数的除法运算即可得解. 【详解】解: $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = i$. 故答案为: i .

63. (2023 天津南开 统考二模) i 是虚数单位, 复数 $\frac{-25i}{3+4i}$ 的虚部为 _____. 【答案】 -3

【分析】直接根据复数的除法运算以及复数虚部的概念即可得到答案.【详解】

$$\frac{-25i}{3+4i} = \frac{-25i(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{-25i(3-4i)}{25} = -4-3i, \text{ 故其虚部为 } -3, \text{ 故答案为: } -3.$$

64. (2023 天津 统考二模) i 是虚数单位, 复数 $\frac{3+i}{2-i} =$ _____. 【答案】 $1+i/i+1$

【详解】复数 $\frac{3+i}{2-i} = \frac{(3+i)(2+i)}{5} = \frac{5+5i}{5} = 1+i$, 答案为: $1+i$

65. (2023 天津和平 统考三模) 已知圆 C 的圆心与点 $P(-2,1)$ 关于直线 $y=x+1$ 对称, 直线 $3x+4y-11=0$ 与圆 C 相交于 A 、 B 两点, 且 $|AB|=6$, 则圆 C 的方程为 _____. 【答案】 $x^2+(y+1)^2=18$

【详解】设圆心坐标 $C(a, b)$

∵ 圆心与 P 关于直线 $y=x+1$ 对称 ∴ 直线 CP 与 $y=x+1$ 垂直 ∴ $y=x+1$ 的斜率为 1

∴ 直线 CP 的斜率为 -1 ∴ $\frac{1-b}{-2-a} = -1$ 化简得: $a+b+1=0$ ①

∵ CP 的中点在直线 $y=x+1$ 上 ∴ $\frac{1+b}{2} = \frac{a-2}{2} + 1$ 化简得: $a-b-1=0$ ② 联立①②得到: $a=0, b=-1$

∴ 圆心的坐标为: $(0, -1)$ ∴ 圆心 C 到直线 AB 的距离 $d = \frac{|-4-11|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 3, \frac{1}{2}|AB|=3$

∴ 根据勾股定理得到半径 $r^2=18$. ∴ 圆的方程为 $x^2+(y+1)^2=18$.

66. (2023 天津北辰 统考三模) 直线 l 经过点 $P(2, -3)$, 与圆 $C: x^2 + y^2 + 2x + 2y - 14 = 0$ 相交截得的弦长为 $2\sqrt{7}$, 则直线 l 的方程为 _____. 【答案】 $5x - 12y - 46 = 0$ 或 $x = 2$

【详解】圆 $C: x^2 + y^2 + 2x + 2y - 14 = 0$, 即 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 16$, 圆心为 $C(-1, -1)$, 半径 $r = 4$,

因为直线与圆相交截得的弦长为 $2\sqrt{7}$,

所以圆心到直线的距离 $d = \sqrt{4^2 - (\sqrt{7})^2} = 3$,

若直线的斜率不存在, 此时直线方程为 $x = 2$, 满足圆心 $C(-1, -1)$ 到直线 $x = 2$ 的距离为 3, 符合题意;

若直线的斜率存在, 设斜率为 k , 则直线方程为 $y + 3 = k(x - 2)$, 即 $kx - y - 2k - 3 = 0$,

则 $d = \frac{|-k+1-2k-3|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}} = 3$, 解得 $k = \frac{5}{12}$, 所以直线方程为 $y + 3 = \frac{5}{12}(x - 2)$, 即 $5x - 12y - 46 = 0$,

综上可得直线方程为 $5x - 12y - 46 = 0$ 或 $x = 2$. 故答案为: $5x - 12y - 46 = 0$ 或 $x = 2$

67. (2023 天津 统考二模) 经过点 $(0,0), (0,4), (3,3)$ 的圆的方程为 _____.

【答案】 $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$

【分析】设圆的一般方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, 代入点坐标, 待定系数求解即可.

【详解】设圆的一般方程为，代入点 $(0,0), (0,4), (3,3)$ 可得：

$$\begin{cases} F = 0 \\ 16 + 4E + F = 0 \\ 18 + 3D + 3E + F = 0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} F = 0 \\ D = -2 \\ E = -4 \end{cases} \text{故圆的一般方程为: } x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \text{ 故答案为: } x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$$

68. (2023 天津南开 统考二模) 若直线 $kx - y - 2k + 3 = 0$ 与圆 $x^2 + (y+1)^2 = 4$ 相切，则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{3}{4}$ / 0.75 【分析】由圆心到切线的距离等于半径求解.

【详解】由题意圆心为 $(0, -1)$ ，半径为2，所以 $\frac{|1 - 2k + 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2$ ，解得 $k = \frac{3}{4}$. 故答案为: $\frac{3}{4}$.

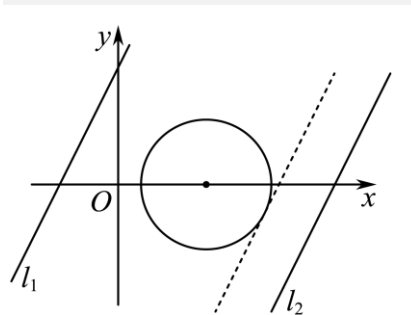
69. (2023 天津红桥 统考二模) 已知直线 $x - \sqrt{3}y + 8 = 0$ 和圆 $x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 相交于 A, B 两点. 若 $|AB| = 6$ ，则 r 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$. 【答案】5

【分析】根据圆的方程得到圆心坐标和半径，由点到直线的距离公式可求出圆心到直线的距离 d ，进而利用弦长公式 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2}$ ，即可求得 r . 【详解】因为圆心 $(0,0)$ 到直线 $x - \sqrt{3}y + 8 = 0$ 的距离 $d = \frac{8}{\sqrt{1+3}} = 4$ ，由 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2}$ 可得 $6 = 2\sqrt{r^2 - 4^2}$ ，解得 $r = 5$. 故答案为: 5.

70. (2023 天津 校联考二模) $P(x, y)$ 为圆 $x^2 - 6x + y^2 + 4 = 0$ 上任意一点，点 P 到直线 $l_1: 2x - y + 4 = 0$ 与到直线 $l_2: 2x - y + m = 0$ 的距离之和与点 P 的位置无关，则 m 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$. 【答案】 $(-\infty, -11]$

【分析】作出图形，结合图形可知当圆 C 位于直线 l_1 与 l_2 之间时为所求，根据直线与圆相切时是临界值即可求解.

【详解】依题意，圆的标准方程为 $(x-3)^2 + y^2 = 5$



由图可知当圆 C 位于两直线 l_1 与 l_2 之间时，点 P 到直线 l_1 和 l_2 的距离之和与点 P 的位置无关，此时点 P 到两直线 l_1 和 l_2 的距离之和即为 l_1 与 l_2 两平行直线间的距离，当直线 l_2 与圆相切时， $\frac{|6 - 0 + m|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ ，解得 $m = -11$ 或 $m = -1$ (舍去)，所以 $m \leq -11$ ，即 m 的取值范围是 $(-\infty, -11]$ ，故答案为: $(-\infty, -11]$.

71. (2023 天津河西 统考二模) 写出过点 $(2,0)$ 且被圆 $x^2 - 4x + y^2 - 2y + 4 = 0$ 截得的弦长为 $\sqrt{2}$ 的一条直线的方程 $\underline{\hspace{2cm}}$. 【答案】 $y = x - 2$ (只需填其中的一个即可)

【分析】将圆的方程化为标准方程，求出圆心、半径. 根据弦长，得出圆心到直线的距离 $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 先判断斜率不存在时是否满足，然后设出斜率，得出直线方程，表示出圆心到直线的距离 $d_1 = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}$ ，得出方程，即可解出 k 的值.

【详解】圆的方程可化为 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ ，圆心为 $(2,1)$ ，半径 $r = 1$ ，

由弦长为 $\sqrt{2}$ 可得, 圆心到直线的距离 $d = \sqrt{r^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

当直线斜率不存在时, 直线方程为 $x = 2$, 此时圆心在直线上, 弦长为 $2r = 2$, 不满足题意, 所以直线的斜率存在.

设直线的斜率为 k , 则直线的方程为 $y = k(x - 2)$, 即 $kx - y - 2k = 0$,

此时圆心到直线的距离 $d_1 = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 解得 $k = \pm 1$. 所以, 直线的方程为 $y = x - 2$ 或 $y = -x + 2$. 故答案为: $y = x - 2$.

72. (2023 天津和平 耀华中学校考一模) 圆 $x^2 + y^2 - 4 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 12 = 0$ 的公共弦的长为_____. 【答

案】 $2\sqrt{2}$ 【分析】将两圆方程作差可得出相交弦所在直线的方程, 求出圆 $x^2 + y^2 - 4 = 0$ 的圆心到相交弦所在直线的

距离, 利用勾股定理可求得相交弦长. 【详解】将圆 $x^2 + y^2 - 4 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 12 = 0$ 的方程作差可得

$x - y + 2 = 0$, 所以, 两圆相交弦所在直线的方程为 $x - y + 2 = 0$,

圆 $x^2 + y^2 - 4 = 0$ 的圆心为原点 O , 半径为 $r = 2$, 原点 O 到直线 $x - y + 2 = 0$ 的距离为 $d = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$,

所以, 两圆的公共弦长为 $2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{2}$. 故答案为: $2\sqrt{2}$.

73. (2023 春 天津和平 高三天津一中校考阶段练习) 已知直线 $l: x - y + 5 = 0$ 与圆 $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ 交于 A ,

B 两点, 若 M 是圆上的一动点, 则 $\triangle MAB$ 面积的最大值是_____. 【答案】 $2\sqrt{2} + 3$ 【分析】求出圆 C 圆心到弦 AB 的长度 d , 求出弦 AB 的长度, M 到弦 AB 的最大距离为 $d + r$ (r 为圆 C 半径), 根据

三角形面积公式即可求出答案.

【详解】 $C: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$, 则圆 C 的圆心为 $C(1, 2)$, 半径为 $r = 3$,

圆心 C 到直线 l (弦 AB) 的距离为 $d = \frac{|1 - 2 + 5|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, 则 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{9 - 8} = 2$,

则 M 到弦 AB 的距离的最大值为 $d + r = 2\sqrt{2} + 3$, 则 $\triangle MAB$ 面积的最大值是 $\frac{1}{2} \cdot |AB| \times (2\sqrt{2} + 3) = 2\sqrt{2} + 3$.

74. (2023 天津河西 天津市新华中学校考模拟预测) 与圆 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 外切且与直线 $x + \sqrt{3}y = 0$ 相切于点

$M(3, -\sqrt{3})$ 的圆的方程为_____. 【答案】 $(x - 4)^2 + y^2 = 4$ 或 $x^2 + (y + 4\sqrt{3})^2 = 36$

【分析】设所求圆的方程为 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ($r > 0$), 再根据两圆外切以及直线与圆相切列方程, 解方程, 进而

得解. 【详解】将圆 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 化为标准式为 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, 即圆心为 $(1, 0)$, 半径为 1 .

设所求圆的方程为 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ($r > 0$). 则由题意知 $\sqrt{(a - 1)^2 + b^2} = r + 1$, ① $\frac{|a + \sqrt{3}b|}{2} = r$, ②

$\frac{b + \sqrt{3}}{a - 3} = \sqrt{3}$, ③ 由①②③得 $a = 4$, $b = 0$, $r = 2$ 或 $a = 0$, $b = -4\sqrt{3}$, $r = 6$,

即所求圆的方程为 $(x-4)^2 + y^2 = 4$ 或 $x^2 + (y+4\sqrt{3})^2 = 36$.

【点睛】本题考查了圆的一般方程和标准方程，考查了两圆的位置关系，考查了直线与圆的位置关系；当两圆外切时，圆心距等于两个圆的半径之和，当圆与直线相切时，圆心到直线的距离等于这个圆的半径，且圆心和切点连线与切线垂直.

75. (2023 春 天津南开 高三南开中学校考阶段练习) 若 $P(2,1)$ 是圆 $(x-1)^2 + y^2 = 25$ 的弦 AB 的中点，则直线 AB 的方程为_____. 【答案】 $x + y - 3 = 0$

【分析】根据条件可知 $CP \perp AB$ ，利用两直线的位置关系求直线方程. 【详解】设圆的圆心 $C(1,0)$ ， $k_{CP} = \frac{1-0}{2-1} = 1$ ，由条件可知 $CP \perp AB$ ，则 AB 的斜率为 -1 ，所以直线 AB 的方程为 $y-1 = -(x-2)$ ，即 $x + y - 3 = 0$.

76. (2023 天津 统考二模) 已知实数 x, y 满足 $4x^2 + 4xy + 7y^2 = 3$ ，则 $x^2 + y^2$ 的最小值为_____. 【答案】 $\frac{3}{8}$

【分析】由已知可得出 $4xy \leq 4x^2 + y^2$ ，再结合基本不等式可求得 $x^2 + y^2$ 的最小值.

【详解】因为 $4x^2 + y^2 - 4xy = (2x - y)^2 \geq 0$ ，即 $4xy \leq 4x^2 + y^2$ ，

所以， $3 = 4x^2 + 7y^2 + 4xy \leq 4x^2 + 7y^2 + 4x^2 + y^2 = 8(x^2 + y^2)$ ，所以， $x^2 + y^2 \geq \frac{3}{8}$ ，当且仅当 $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{30}}{20} \\ y = \frac{\sqrt{30}}{10} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{30}}{20} \\ y = -\frac{\sqrt{30}}{10} \end{cases}$ 时，

等号成立，故 $x^2 + y^2$ 的最小值为 $\frac{3}{8}$. 故答案为: $\frac{3}{8}$.

77. (2023 天津红桥 统考二模) 已知 $x, y \in \mathbb{R}^+$ ， $4x + 5y = 1$ ，则 $\frac{1}{x+3y} + \frac{1}{3x+2y}$ 的最小值_____. 【答案】 4

【分析】将 $\frac{1}{x+3y} + \frac{1}{3x+2y} = \left(\frac{1}{x+3y} + \frac{1}{3x+2y} \right)(x+3y+3x+2y)$ 展开，利用基本不等式即可求解.

【详解】 $\frac{1}{x+3y} + \frac{1}{3x+2y} = \left(\frac{1}{x+3y} + \frac{1}{3x+2y} \right)(x+3y+3x+2y)$

$= 2 + \frac{3x+2y}{x+3y} + \frac{x+3y}{3x+2y} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{3x+2y}{x+3y} \cdot \frac{x+3y}{3x+2y}} = 4$ ，当且仅当 $\begin{cases} \frac{3x+2y}{x+3y} = \frac{x+3y}{3x+2y} \\ 4x+5y=1 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x = \frac{1}{14} \\ y = \frac{1}{7} \end{cases}$ 时， $\frac{1}{x+3y} + \frac{1}{3x+2y}$ 的最小

值为 4，故答案为: 4

78. (2023 天津 校联考二模) 若 $a > b > 1$ ，且 $4\log_a b + 3\log_b a = 8$ ，则 $a + \frac{4}{b^2-1}$ 的最小值为_____. 【答案】 5

【分析】根据对数的换底公式得到 $4\log_a b + 3\frac{1}{\log_a b} = 8$ ，解得 $\log_a b = \frac{1}{2}$ ，即 $a^{\frac{1}{2}} = b$ ，然后代入 $a + \frac{4}{b^2-1}$ 中，利用基本不等式求最小值即可.

【详解】因为 $4\log_a b + 3\log_b a = 8$ ，所以 $4\log_a b + 3\frac{1}{\log_a b} = 8$ ，解得 $\log_a b = \frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$ ，

因为 $a > b > 1$ ，所以 $0 < \log_a b < 1$ ，则 $\log_a b = \frac{1}{2}$ ，即 $a^{\frac{1}{2}} = b$ ，

因为 $a > 1$ ，所以 $a - 1 > 0$ ， $a + \frac{4}{b^2 - 1} = a + \frac{4}{a - 1} = a - 1 + \frac{4}{a - 1} + 1 \geq 2\sqrt{4} + 1 = 5$ ，

当且仅当 $a - 1 = \frac{4}{a - 1}$ ，即 $a = 3$ 时，等号成立.故答案为：5.

79. (2023 天津和平 统考二模) 设 $x, y \in \mathbf{R}$ ， $a > 1$ ， $b > 1$ ，若 $a^x = b^y = 3$ ， $3a + b = 18$ ，则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最大值为_____。【答案】3

【分析】由已知可解得 $x = \log_a 3$ ， $y = \log_b 3$.根据换底公式可得 $\frac{1}{x} = \log_3 a$ ， $\frac{1}{y} = \log_3 b$.根据基本不等式得出 $ab \leq 27$ ，然后根据对数运算性质即可得出答案.

【详解】因为 $a^x = b^y = 3$ ，所以 $x = \log_a 3$ ， $y = \log_b 3$ 。

又 $\log_a 3 \cdot \log_3 a = \frac{\lg 3}{\lg a} \cdot \frac{\lg a}{\lg 3} = 1$ ， $\log_b 3 \cdot \log_3 b = \frac{\lg 3}{\lg b} \cdot \frac{\lg b}{\lg 3} = 1$ ，所以 $\frac{1}{x} = \log_3 a$ ， $\frac{1}{y} = \log_3 b$ 。

因为 $a > 1$ ， $b > 1$ ，根据基本不等式有 $3ab \leq \left(\frac{3a + b}{2}\right)^2 = 81$ ，当且仅当 $3a = b$ ，即 $a = 3$ ， $b = 9$ 时等号成立，

所以 $ab \leq 27$.则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \log_3 a + \log_3 b = \log_3 ab \leq \log_3 27 = 3$ ，所以 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最大值为3.故答案为：3。

80. (2023 天津河西 统考二模) 已知 $x > 0$ ， $y > 0$ ， $x + 2y + 2xy = 8$ ，则 $x + 2y$ 的最小值为_____。【答案】4

【分析】首先分析题目由已知 $x > 0$ ， $y > 0$ ， $x + 2y + 2xy = 8$ ，求 $x + 2y$ 的最小值，猜想到基本不等式的用法，利用 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 代入已知条件，转化为解不等式求最值。

【详解】 $\because 2xy = x \cdot (2y) \leq \left(\frac{x + 2y}{2}\right)^2$ ， $\therefore 8 = x + 2y + 2xy \leq x + 2y + \left(\frac{x + 2y}{2}\right)^2$ ，

即 $(x + 2y)^2 + 4(x + 2y) - 32 \geq 0$. $\because x > 0$ ， $y > 0$ ， $\therefore x + 2y \geq 4$ ，当且仅当 $x = 2$ ， $y = 1$ 时取等号，即 $x + 2y$ 的最小值是 4.

81. (2023 天津和平 耀华中学校考一模) 已知 $1 < a < 4$ ，则 $\frac{a}{4 - a} + \frac{1}{a - 1}$ 的最小值是_____。【答案】2

【分析】变形条件等式得 $\frac{a}{4 - a} + \frac{1}{a - 1} = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{4 - a} + \frac{1}{a - 1} \right) (4 - a + a - 1) - 1$ ，然后展开，利用基本不等式求最小值。

【详解】 $\because 1 < a < 4$ ，

$\therefore 4 - a > 0$ ， $a - 1 > 0$ ， $\therefore \frac{a}{4 - a} + \frac{1}{a - 1} = \frac{4}{4 - a} + \frac{1}{a - 1} - 1 = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{4 - a} + \frac{1}{a - 1} \right) (4 - a + a - 1) - 1$

$= \frac{1}{3} \left(5 + \frac{4(a - 1)}{4 - a} + \frac{4 - a}{a - 1} \right) - 1 \geq \frac{1}{3} \left(5 + 2\sqrt{\frac{4(a - 1)}{4 - a} \cdot \frac{4 - a}{a - 1}} \right) - 1 = 2$ ，当且仅当 $\frac{4(a - 1)}{4 - a} = \frac{4 - a}{a - 1}$ ，即 $a = 2$ 时等号成立，

$\therefore \frac{a}{4 - a} + \frac{1}{a - 1}$ 的最小值是2.故答案为：2。

82. (2023 天津河西 天津市新华中学校考模拟预测) 已知 x, y 都为正实数，则 $\frac{4(xy + 1)}{x} + \frac{x^2}{y}$ 的最小值为_____。【答案】8

【分析】化简 $\frac{4(xy + 1)}{x} + \frac{x^2}{y} = 4y + \frac{4}{x} + \frac{x^2}{y}$ ，由基本不等式得 $4y + \frac{x^2}{y} \geq 2\sqrt{4x^2} = 4x$ ，再代入原式得

$4y + \frac{4}{x} + \frac{x^2}{y} \geq 4x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{16} = 8$ ，判断相等条件后即可得最小值。

【详解】 $\frac{4(xy+1)}{x} + \frac{x^2}{y} = 4y + \frac{4}{x} + \frac{x^2}{y}$ ，因为 x, y 都为正实数， $4y + \frac{x^2}{y} \geq 2\sqrt{4x^2} = 4x$ ，当且仅当 $4y^2 = x^2$ ，即 $2y = x$ 时等号成立，所以 $4y + \frac{4}{x} + \frac{x^2}{y} \geq 4x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{16} = 8$ ，当且仅当 $4x = \frac{4}{x}$ ，即 $x = 1$ 时等号成立，综上所述，当 $x = 1, y = \frac{1}{2}$ 时， $\frac{4(xy+1)}{x} + \frac{x^2}{y}$ 取最小值为8.故答案为：8

83. (2023 天津南开 南开中学校考模拟预测) 已知正数 x, y 满足 $\frac{8}{3x^2 + 2xy} + \frac{3}{xy + 2y^2} = 1$ ，则 xy 的最小值是_____.

【答案】 $\frac{5}{2}$

【分析】根据题意，将等式 $\frac{8}{3x^2 + 2xy} + \frac{3}{xy + 2y^2} = 1$ 化简变形，得到 xy 的表达式，根据表达式特征利用换元法构造函数，求导得出函数单调性即可得出最小值.

【详解】根据题意，由 $\frac{8}{3x^2 + 2xy} + \frac{3}{xy + 2y^2} = 1$ 可得 $\frac{8(xy + 2y^2) + 3(3x^2 + 2xy)}{(3x^2 + 2xy)(xy + 2y^2)} = 1$ ，

即 $16y^2 + 9x^2 + 14xy = 3x^3y + 8x^2y^2 + 4xy^3 = xy(4y^2 + 3x^2 + 8xy)$

所以 $\frac{16y^2 + 9x^2 + 14xy}{4y^2 + 3x^2 + 8xy} = xy = \frac{16\frac{y^2}{x^2} + 9 + 14\frac{y}{x}}{4\frac{y^2}{x^2} + 3 + 8\frac{y}{x}}$ ；又因为 x, y 均是正数，令 $\frac{y}{x} = t \in (0, +\infty)$ ，则 $xy = f(t) = \frac{16t^2 + 14t + 9}{4t^2 + 8t + 3}$

所以， $f(t) = \frac{16t^2 + 14t + 9}{4t^2 + 8t + 3} = 4 - \frac{18t + 3}{4t^2 + 8t + 3} = 4 - \frac{1}{\frac{4t^2 + 8t + 3}{18t + 3}}$ ，令 $g(t) = \frac{4t^2 + 8t + 3}{18t + 3}$ ，

则 $g(t) = \frac{2}{9}t + \frac{11}{27} + \frac{\frac{16}{9}}{18t + 3} = \frac{2}{9}\left(t + \frac{1}{6}\right) + \frac{\frac{16}{9}}{18t + 3} + \frac{10}{27} \geq 2\sqrt{\frac{2}{9}\left(t + \frac{1}{6}\right) \times \frac{\frac{16}{9}}{18t + 3}} + \frac{10}{27} = \frac{18}{27}$

当且仅当 $\frac{2}{9}\left(t + \frac{1}{6}\right) = \frac{\frac{16}{9}}{18t + 3}$ ，即 $t = \frac{1}{2}$ 时，等号成立；

所以 $f(t) = 4 - \frac{1}{\frac{4t^2 + 8t + 3}{18t + 3}} \geq 4 - \frac{1}{\frac{18}{27}} = \frac{45}{18} = \frac{5}{2}$

所以 $f(t)$ 的最小值为 $f(t)_{\min} = \frac{5}{2}$ ；

即当 $t = \frac{y}{x} = \frac{1}{2}, x = 2y = \sqrt{5}$ 时，即 $x = \sqrt{5}, y = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 时，等号成立.

故答案为： $\frac{5}{2}$

【点睛】关键点点睛：根据等式特征可知，利用基本不等式条件不明显，所以首先得出 xy 的表达式，根据

$\frac{16y^2 + 9x^2 + 14xy}{4y^2 + 3x^2 + 8xy} = xy$ 可利用齐次式特征构造函数，再进行化简凑成基本不等式求解即可.