

02空间向量在立体几何中的应用练习题

线线角

1. 2019~2020学年天津河西区天津市第四十二中学高一下学期期末第6题3分 ★★

在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为棱 CC_1 的中点, 则异面直线 AE 与 CD 所成角的正切值为 () .

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

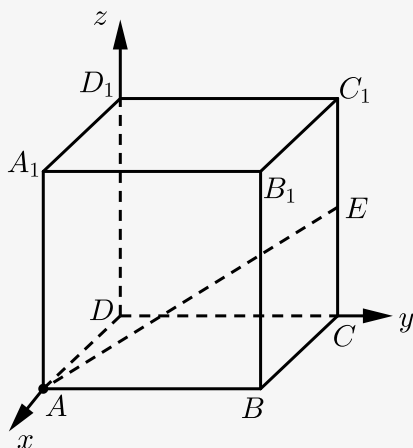
D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

【答案】 C

【解析】 方法一: 以 D 为原点, DA 为 x 轴, DC 为 y 轴,

DD_1 为 z 轴,

建立空间直角坐标系,



设正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2 ,

则 $A(2, 0, 0)$, $E(0, 2, 1)$, $D(0, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$,

$$\overrightarrow{AE} = (-2, 2, 1) , \quad \overrightarrow{CD} = (0, -2, 0) ,$$

设异面直线 AE 与 CD 所成角为 θ ,

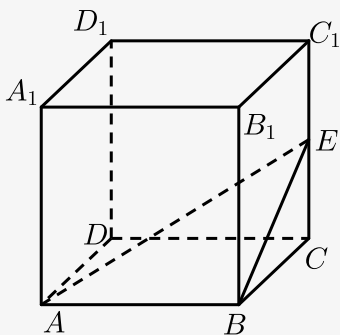
$$\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AE}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = \frac{4}{\sqrt{9} \cdot 2} = \frac{2}{3} ,$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3} ,$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sqrt{5}}{2} ,$$

$\therefore$ 异面直线 AE 与 CD 所成角的正切值为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$,

方法二: 如图, 图 $AB \parallel CD$,



所以 AE 与 CD 所成角为 $\angle EAB$.

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, 设 $AB = 2$,

则 $BE = \sqrt{5}$,

则 $\tan \angle EAB = \frac{BE}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{2}$,

所以异面直线 AE 与 CD 所成角的正切值为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

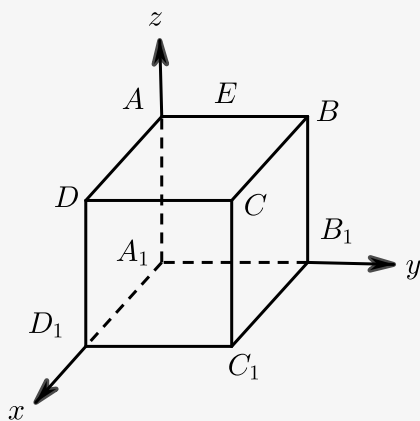
【标注】【知识点】向量法解决异面直线所成角问题

2. 2019~2020学年天津滨海新区高二上学期期末第17题5分 ★★

正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E 是 AB 的中点, 求 DB_1 与 CE 所成角的余弦值为 _____ .

【答案】 $\frac{\sqrt{10}}{10}$

【解析】 如图建立直角坐标系,



设边长为 1 ,

$A(0,0,1)$, $B(0,1,1)$, $E\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$, $D(1,0,1)$, $C(1,1,1)$,

$\overrightarrow{CB_1} = (-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{CE} = \left(-1, -\frac{1}{2}, 0\right)$,

$\therefore \cos(\overrightarrow{DB_1}, \overrightarrow{CE}) = \frac{\overrightarrow{DB_1} \cdot \overrightarrow{CE}}{|\overrightarrow{DB_1}| \cdot |\overrightarrow{CE}|} = \frac{(1 - \frac{1}{2})}{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

【标注】【知识点】向量法解决异面直线所成角问题

3. 2019~2020学年天津河西区高二上学期期末第7题4分 ★

若两个向量 $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 3)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 2, 1)$, 则平面 ABC 的一个法向量为 () .

- A. $(-1, 2, -1)$ B. $(1, 2, 1)$ C. $(1, 2, -1)$ D. $(-1, 2, 1)$

【答案】 A

【解析】 $\because$ 两个向量 $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 3)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 2, 1)$,

$\therefore$ 平面 ABC 的法向量应与 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$ 均垂直 ,

选项 A , 若法向量为 $\vec{n} = (-1, 2, -1)$,

则 $\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}$, $\overrightarrow{AC} \perp \vec{n}$,

$$(1, 2, 3) \cdot (-1, 2, -1) = -1 + 4 - 3 = 0 ,$$

$$(3, 2, 1) \cdot (-1, 2, -1) = -3 + 4 - 1 = 0 ,$$

故 A 正确 ;

选项 B , 若法向量为 $\vec{n} = (1, 2, 1)$,

则 $\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}$, $\overrightarrow{AC} \perp \vec{n}$, 即 $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$, $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0$,

$$(1, 2, 3) \cdot (1, 2, 1) = 1 + 4 + 3 \neq 0 ,$$

$$(3, 2, 1) \cdot (1, 2, 1) = 3 + 4 + 1 \neq 0 ,$$

故 B 错误 ;

选项 C , 若法向量为 $\vec{n} = (1, 2, -1)$,

则 $\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}$, $\overrightarrow{AC} \perp \vec{n}$, 即 $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$, $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0$,

$$(1, 2, 3) \cdot (1, 2, -1) = 1 + 4 - 3 \neq 0 ,$$

$$(3, 2, 1) \cdot (1, 2, -1) = 3 + 4 - 1 \neq 0 ,$$

故 C 错误 ;

选项 D , 若法向量为 $\vec{n} = (-1, 2, 1)$,

则 $\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}$, $\overrightarrow{AC} \perp \vec{n}$, 即 $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$, $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0$,

$$(1, 2, 3) \cdot (-1, 2, 1) = -1 + 4 + 3 \neq 0 ,$$

$$(3, 2, 1) \cdot (-1, 2, 1) = -3 + 4 + 1 \neq 0 ,$$

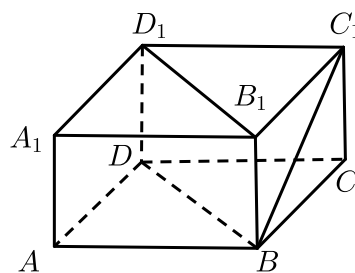
故 D 错误 .

综上所述 , 故选 A .

【标注】 【知识点】 直线的方向向量与平面的法向量 ; 向量法解决空间中的垂直问题

4. 2019~2020学年4月天津南开区天津市崇化中学高一下学期月考第7题4分 ★★

如图 , 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中 , $AB = BC = 2$, $AA_1 = 1$, 则 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成角的正弦值为 () .



A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

B. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

C. $\frac{\sqrt{15}}{5}$

D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

【答案】D

【解析】以D点为坐标原点，以DA、DC、DD₁所在的直线为x轴、y轴、z轴，

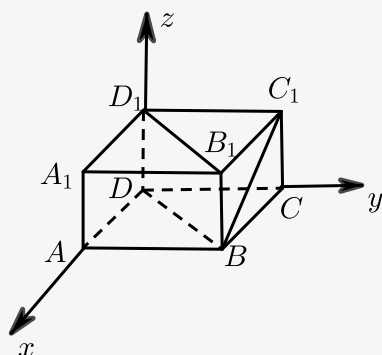
建立空间直角坐标系则A(2,0,0)，B(2,2,0)，C(0,2,0)，C₁(0,2,1)，

$$\therefore \overrightarrow{BC_1} = (-2, 0, 1), \overrightarrow{AC} = (-2, 2, 0),$$

$\overrightarrow{AC}$ 且为平面BB₁D₁D的一个法向量.

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{BC_1}, \overrightarrow{AC} \rangle = \frac{4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{8}} = \frac{\sqrt{10}}{5},$$

$\therefore BC_1$ 与平面BB₁D₁D所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.



故选D.

【标注】【知识点】向量法解决空间中的平行问题；向量法解决线面角问题

二面角

5. 2019~2020学年3月四川成都武侯区成都七中林荫校区高二下学期周测D卷理科第9题5分 ★★

向量 $\vec{a} = (0, -1, 3)$ ， $\vec{b} = (2, 2, 4)$ 分别在二面角的两个半平面内，且都与二面角的棱垂直，则这个二面角的余弦值为 _____.

【答案】 $\pm \frac{\sqrt{15}}{6}$

【解析】依题意知，设这个二面角为 θ ， θ 为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 所成的角或其补角.

$$\text{又} \because \vec{a} \cdot \vec{b} = (0, -1, 3) \cdot (2, 2, 4) = 0 - 2 + 12 = 10,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{10}, |\vec{b}| = 2\sqrt{6},$$

$$\therefore \cos\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{10}{\sqrt{10} \times 2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{15}}{6},$$

故所求二面角的余弦值为 $\pm \frac{\sqrt{15}}{6}$.

【标注】【知识点】向量法解决异面直线所成角问题；向量法解决二面角问题

6. 2016~2017学年10月北京丰台区北京丰台实验学校高二上学期月考第15题4分 ★★

若两个平面 α , β 的法向量分别是 $\vec{n} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (-1, 1, 0)$, 则这两个平面所成的锐二面角的度数是 _____ .

【答案】 60°

【解析】 $\because \vec{n} = (1, 0, 1), \vec{v} = (-1, 1, 0),$

$$\therefore \cos\langle \vec{n}, \vec{v} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|},$$

$$= \frac{-1 + 0 + 0}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2}},$$

$$= -\frac{1}{2},$$
 $\because \vec{n} \text{ 与 } \vec{v} \text{ 夹角范围为 } [0, 180^\circ],$
 $\therefore \vec{n} \text{ 与 } \vec{v} \text{ 夹角为 } 120^\circ,$
 $\because \vec{n} \text{ 是 } \alpha \text{ 法向量, } \vec{v} \text{ 是 } \beta \text{ 法向量,}$
 $\therefore \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 的锐二面角为 } 60^\circ .$

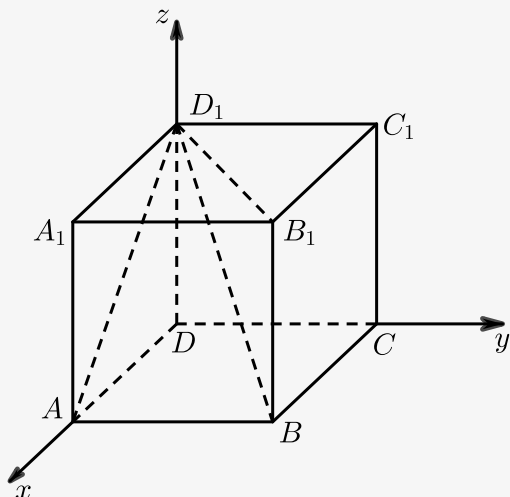
【标注】【知识点】向量法解决二面角问题

7. 2018~2019学年北京海淀区北京一零一中学高二上学期期末第14题5分 ★★

正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 二面角 $A - BD_1 - B_1$ 的大小是 _____ .

【答案】 120°

【解析】 如图,



以 D 为原点, DA , DC , DD_1 分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系,
 设正方体的边长为 1, 则 $D(0,0,0)$, $A_1(1,0,1)$, $C_1(0,1,1)$,

$\therefore A_1D \perp$ 平面 ABD_1 ,

$\therefore$ 平面 ABD_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{A_1D} = (-1, 0, -1)$,

$\therefore A_1C_1 \perp$ 平面 BD_1B_1 ,

$\therefore$ 平面 BD_1B_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{A_1C_1} = (-1, 1, 0)$,

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{A_1D}, \overrightarrow{A_1C_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{A_1D} \cdot \overrightarrow{A_1C_1}}{|\overrightarrow{A_1D}| \cdot |\overrightarrow{A_1C_1}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

由图知, 二面角 $A - BD_1 - B_1$ 的平面角为钝角,

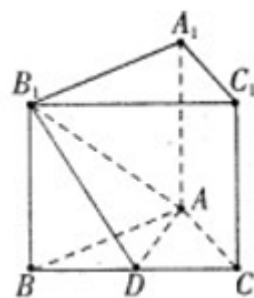
故二面角 $A - BD_1 - B_1$ 的大小是 120° .

故答案为: 120° .

【标注】【知识点】向量法解决二面角问题

8. 2012~2013 学年北京朝阳区高二上学期期末理科第 6 题 4 分 ★★

如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $A_1A \perp$ 平面 ABC , $AB \perp AC$, 且
 $AB = AC = AA_1 = 1$, D 为线段 BC 中点. 则二面角 $D - AB_1 - B$ 的余弦
 值是 ().



A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

【答案】 C

【解析】 以 A 为原点, AB , AC , AA_1 分别为 x , y , z 轴建立空间直角坐标系,

易知平面 ABB_1 的法向量 $\vec{m} = (0, 1, 0)$, 平面 ADB_1 的法向量为 $\vec{n} = (1, -1, -1)$,

所以二面角 $D - AB_1 - B$ 的余弦值为 $\frac{|1 \times (-1)|}{1 \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故选 C

【标注】 【知识点】 向量法解决二面角问题

向量证明空间中的平行垂直关系

9. 2018~2019学年陕西西安雁塔区西安电子科技大学附属中学高二上学期期末理科第4题4分 ★★

若平面 α, β 的法向量分别为 $\vec{n}_1 = (1, 2, -2), \vec{n}_2 = (-3, -6, 6)$, 则 ().

- A. $\alpha // \beta$ B. $\alpha \perp \beta$
C. α, β 相交但不垂直 D. 以上均错

【答案】 D

【解析】 若 $\vec{n}_1 = (1, 2, -2)$, $\vec{n}_2 = (-3, -6, 6)$,

则 $\vec{n}_2 = -3\vec{n}_1$, $\therefore \vec{n}_1 // \vec{n}_2$,

$\therefore \alpha // \beta$ 或重合.

故选 D.

【标注】【知识点】空间向量线性运算的坐标表示；向量法解决空间中的平行问题；向量法解决二面角问题；直线的方向向量与平面的法向量

10. ★

若直线 l 的方向向量为 $\vec{a} = (-1, 0, -2)$, 平面 α 的法向量为 $\vec{u} = (4, 0, 8)$, 则 ().

- A. $l // \alpha$ B. $l \perp \alpha$ C. $l \subset \alpha$ D. l 与 α 斜交

【答案】 B

【解析】由题意得 $\vec{u} = -4\vec{a}$, 所以 $\vec{u} // \vec{a}$, 所以 $l \perp \alpha$.

故选 B.

【标注】【知识点】向量法解决空间中的垂直问题；向量法解决空间中的平行问题；直线的方向向量与平面的法向量

11. ★

若两个不同平面 α , β 的法向量分别为 $\vec{u} = (1, 2, -1)$, $\vec{v} = (-3, -6, 3)$, 则 ().

- A. $\alpha // \beta$ B. $\alpha \perp \beta$
C. α, β 相交但不垂直 D. 以上均不正确

【答案】 A

【标注】【知识点】 向量法解决空间中的平行问题；向量法解决二面角问题

12. ★★★

已知直线 l 的一个方向向量 $\mathbf{a} = (-2, 3, 1)$ ，平面 α 的一个法向量 $\vec{n} = (4, 0, 8)$ ，则直线 l 与平面 α 的位置关系是()

A. $l \parallel$ 平面 α B. $l \parallel$ 平面 α 或 $l \subset$ 平面 α C. $l \perp$ 平面 α D. $l \subset$ 平面 α

【答案】B

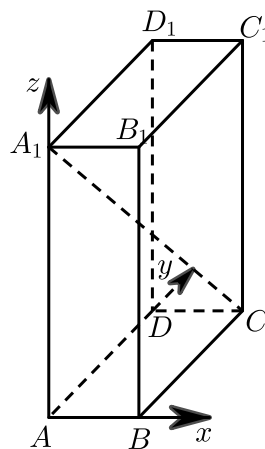
【解析】因为 $\mathbf{a} \cdot \vec{n} = -2 \times 4 + 3 \times 0 + 1 \times 8 = 0$ ，所以 $\mathbf{a} \cdot \vec{n} = 0$ ，即 $\mathbf{a} \perp \vec{n}$ 。所以 $\mathbf{a} \parallel \alpha$ ，所以直线 $l \parallel$ 平面 α 或 $l \subset$ 平面 α 。故选B。

【标注】【知识点】向量法解决空间中的平行问题；直线的方向向量与平面的法向量

 距离公式

13. 2020~2021学年10月天津和平区天津市双菱中学高二上学期末第10题4分 ★★★

如图所示，在空间直角坐标系中有长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ ， $AB = 1$ ， $BC = 2$ ， $AA_1 = 3$ ，则点 B 到直线 A_1C 的距离为()。

A. $\frac{2}{7}$ B. $\frac{2\sqrt{35}}{7}$ C. $\frac{\sqrt{35}}{7}$

D. 1

【答案】B

【解析】过点 B 作 $BE \perp A_1C$ ，垂足为 E ，设点 E 的坐标为 (x, y, z) ，

由题意知 $A(0, 0, 3)$ ， $B(1, 0, 0)$ ， $C(1, 2, 0)$ ，

故 $\overrightarrow{A_1C} = (1, 2, -3)$ ， $\overrightarrow{A_1E} = (x, y, z - 3)$ ，

$\overrightarrow{BE} = (x - 1, y, z)$ ，易知 $\begin{cases} \overrightarrow{A_1E} \parallel \overrightarrow{A_1C} \\ \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{A_1C} = 0 \end{cases}$ ，

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-3} \\ x-1+2y-3z=0 \end{cases}, \text{解得 } \begin{cases} x = \frac{5}{7} \\ y = \frac{10}{7} \\ z = \frac{6}{7} \end{cases},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{BE} = \left(-\frac{2}{7}, \frac{10}{7}, \frac{6}{7}\right),$$

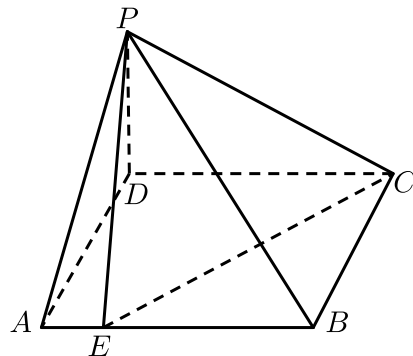
$$\text{所以点 } B \text{ 到直线 } A_1C \text{ 的距离为 } |\overrightarrow{BE}| = \frac{2\sqrt{35}}{7}.$$

故选 B.

【标注】【知识点】向量法求空间距离；空间向量线性运算的坐标表示

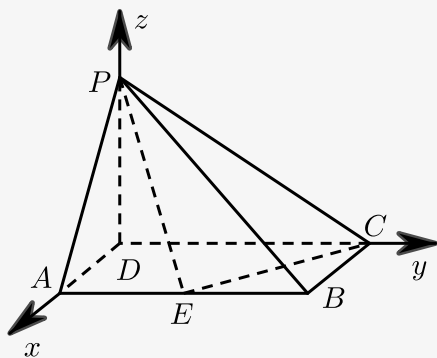
14. 2020~2021学年10月山东青岛即墨市即墨市第二中学高二上学期月考第16题5分 ★★

四棱锥 $PABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形， $PD \perp$ 平面 $ABCD$ 且 $PD = AD = 1$ ， $AB = 2$ ，点 E 是线段 AB 上一点，当面 PEC 与面 $ABCD$ 的夹角为 45° 时， $AE =$ _____，这时点 P 到直线 CE 的距离是 _____.



【答案】 $2 - \sqrt{3}$ ； $\sqrt{2}$

【解析】 如图，以 D 为原点，射线 DA 、 DC 、 DP 为 x 、 y 、 z 轴的正方向建立空间直角坐标系，



则 $P(0, 0, 1)$ ， $C(0, 2, 0)$ ，

设 $E(1, y_0, 0)$ ，则 $\overrightarrow{EC} = (-1, 2 - y_0, 0)$ ，

设平面 PEC 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$ ，

$$\therefore \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{EC} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{PC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y(2 - y_0) = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases},$$

解之得 $x:y:z = (2-y_0):1:2$,

记 $\vec{n}_1 = (2-y_0, 1, 2)$, 而平面 ECD 的法向量 $\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$,

二面角 $P-EC-D$ 的平面角 $\theta = \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\pi}{4}$,

$$\therefore \cos \theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{2}{\sqrt{(2-y_0)^2 + 1 + 4} \cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore y_0 = AE = 2 - \sqrt{3}.$$

$\therefore$ 当 $AE = 2 - \sqrt{3}$ 时, 二面角 $P-EC-D$ 的平面角为 $\frac{\pi}{4}$.

此时 E 点坐标为 $(1, 2 - \sqrt{3}, 0)$,

$$\therefore \vec{PE} = (1, 2 - \sqrt{3}, -1), \quad \vec{CE} = (1, -\sqrt{3}, 0),$$

$$\therefore d = \sqrt{|\vec{PE}|^2 - \left(\frac{\vec{PE} \cdot \vec{CE}}{|\vec{CE}|} \right)^2} = \sqrt{9 - 4\sqrt{3} - (7 - 4\sqrt{3})} = \sqrt{2},$$

$\therefore$ 点 P 到直线 CE 的距离为 $\sqrt{2}$.

【标注】【知识点】向量法求空间距离

15. ★★

已知直线 m 过点 $O(0, 0, 0)$, 其方向向量是 $\vec{a} = (1, 1, 1)$, 则点 $Q(3, 4, 5)$ 到直线 m 的距离是 ().

A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$

D. 2

【答案】 B

【解析】 由题意, $\vec{OQ} = (3, 4, 5)$, $|\vec{OQ}| = 5\sqrt{2}$,

$$\therefore \cos \langle \vec{a}, \vec{OQ} \rangle = \frac{3+4+5}{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{5},$$

$$\therefore \sin \langle \vec{a}, \vec{OQ} \rangle = \frac{1}{5},$$

$$\therefore \text{点 } Q(3, 4, 5) \text{ 到直线 } m \text{ 的距离是 } |\vec{OQ}| \sin \langle \vec{a}, \vec{OQ} \rangle = \sqrt{2}.$$

故选 B.

【标注】【知识点】向量法求空间距离

16. ★★

已知向量 $\vec{n} = (2, 0, 1)$ 为平面 α 的法向量, 点 $A(-1, 2, 1)$ 在 α 内, 则 $P(1, 2, -2)$ 到 α 的距离为 ().

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

B. $\sqrt{5}$

C. $2\sqrt{5}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{10}$

【答案】 A

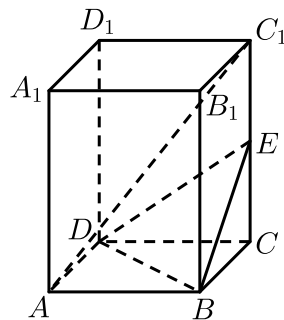
【解析】 $\therefore \vec{PA} = (-2, 0, 3)$, $\therefore$ 点 P 到平面 α 的距离为 $d = \frac{|\vec{PA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|-4+3|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

故选 A.

【标注】【知识点】向量法求空间距离

17. ★★

已知正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 2$, $CC_1 = 2\sqrt{2}$, E 为 CC_1 的中点. 则点 A 到平面 DBE 的距离为 _____.



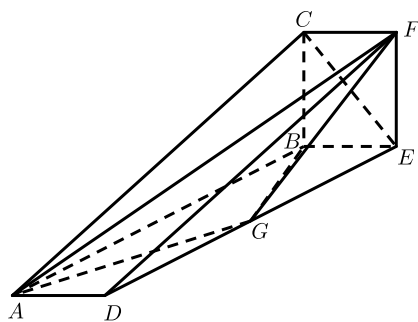
【答案】 1

【标注】【知识点】向量法求空间距离；棱柱、棱锥、棱台的结构特征；空间几何体的体积；等体积法

在解答题中的综合应用

18. 2018~2019学年12月天津静海区静海区第一中学高二上学期月考第18题15分 ★★

如图, 三棱柱 $ABC - DEF$ 的侧面 $BEFC$ 是边长为 1 的正方形, 侧面 $BEFC \perp$ 侧面 $ADEB$, $AB = 4$, $\angle DEB = 60^\circ$, G 是 DE 的中点.



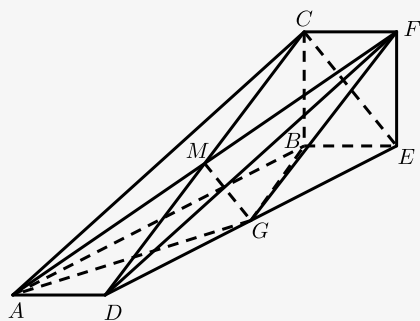
- (1) 求证: $CE \parallel$ 平面 AGF ;
- (2) 求证: $GB \perp$ 平面 $BEFC$;
- (3) 在线段 BC 上是否存在一点 P , 使二面角 $P - GE - B$ 为 45° , 若存在, 求 BP 的长, 若不存在, 说明理由.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

(3) 答案见解析.

【解析】(1) 连接 CD 交 AF 于点 M , 连接 GM ,



$\because$ 在三棱柱 $ABC-DEF$ 中, 四边形 $ADFC$ 为平行四边形, $\therefore M$ 为 CD 中点, 由已知 G 为 DE 中点, $\therefore GM \parallel CE$, $GM = \frac{1}{2}CE$, 又 $GM \subset$ 平面 AGF , $\therefore CE \parallel$ 平面 AGF ;

(2) $\because G$ 为 DE 中点, $DE = 4$, $BE = 1$, $\therefore GE = 2$, 则 $\angle GBE = 90^\circ$, 即 $GB \perp BE$, 又 $\because$ 平面 $BEFC \perp$ 平面 $ADEB$, $BC \subset$ 平面 $BEFC$, $\therefore BC \perp$ 平面 $ADEB$, $\because GB \subset$ 平面 $ADEB$, 则 $BC \perp GB$, 即 $\begin{cases} GB \perp BE \\ GB \perp BC \end{cases}$, 且 $BE \subset$ 平面 $BEFC$, $BC \subset$ 平面 $BEFC$, $\therefore GB \perp$ 平面 $BEFC$.

(3) 解法一: 过 B 作 $BN \perp DE$ 交 DE 于 N ,

由 (II) 得 $EN = \frac{1}{2}$, $GN = \frac{3}{2}$,

设 BC 上存在一点 P 使得 $PN \perp DE$,

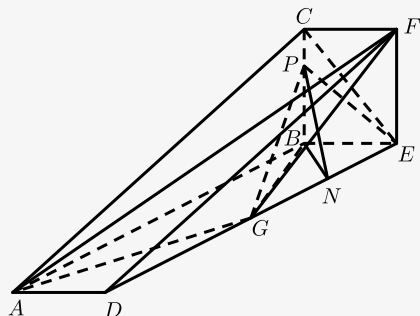
则 $\angle BNP$ 即为二面角 $P-GE-B$ 的平面角.

$\because EN = \frac{1}{2}$, $GN = \frac{3}{2}$,

$\therefore BN = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\because \angle BNP = 45^\circ$,

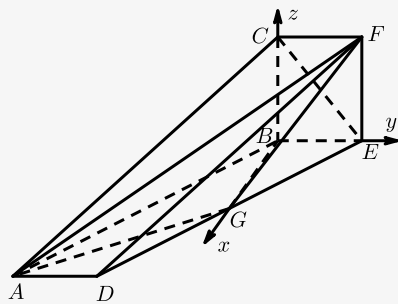
$\therefore BP = BN = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



解法二: 由 (II) 得 $GB \perp$ 平面 $BEFC$,

故以 B 为原点, 以 BE 为 y 轴正方向, 以 BG 为 x 轴正向,

以 BC 为 z 轴正方向建立空间直角坐标系.



则 $B(0, 0, 0)$, $E(0, 1, 0)$, $G(\sqrt{3}, 0, 0)$,

设 $BP = a$, 则 $P(0, 0, a)$.

因此 $\overrightarrow{PG} = (\sqrt{3}, 0, -a)$, $\overrightarrow{PE} = (0, 1, -a)$,

设 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$ 为平面 GEP 的一个法向量,

故 $\begin{cases} \sqrt{3}x - az = 0 \\ y - az = 0 \end{cases}$, $\therefore \vec{n}_1 = (a, \sqrt{3}a, \sqrt{3})$,

设 $\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$ 为平面 BEG 的一个法向量,

则 $\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{3}}{1 \cdot \sqrt{4a^2 + 3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

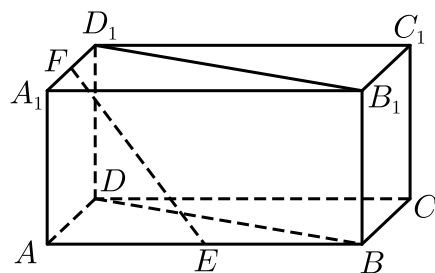
解得 $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

即 $BP = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

【标注】【知识点】向量法解决二面角问题；直线和平面平行的判定；线面平行的证明问题；几何法求空间角；直线和平面垂直的判定；线面垂直的证明问题

19. 2019~2020学年天津河东区高二上学期期末第18题8分 ★★★★★

已知长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AD = 2$, $AB = 4$, $AA_1 = 3$, E , F 分别是棱 AB , A_1D_1 的中点.



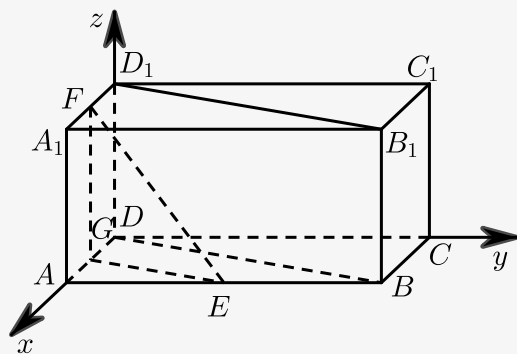
(1) 求证: 直线 $EF \parallel$ 平面 BB_1D_1D .

(2) 求直线 EF 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) $\frac{\sqrt{14}}{7}$.

【解析】 (1) 取 AD 中点 G , 连结 EG , FG ,



$\because E, F$ 分别是 AB, A_1D_1 的中点,

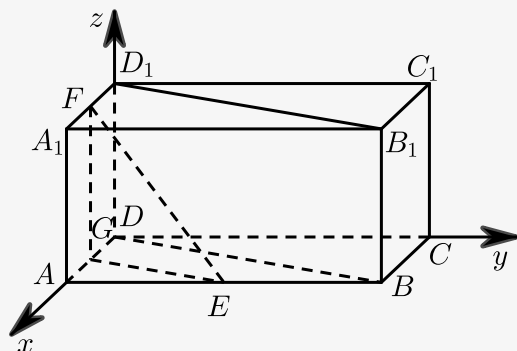
$\therefore FG \parallel DD_1, EG \parallel BD,$

$\because EG \cap FG = G, DD_1 \cap DB = D,$

$\therefore$ 平面 $EFG \parallel$ 平面 $BB_1D_1D,$

$\therefore$ 直线 $EF \parallel$ 平面 $BB_1D_1D.$

(2) 以 D 为原点, DA 为 x 轴, DC 为 y 轴, DD_1 为 z 轴, 建立空间直角坐标系,



则 $E(2, 2, 0), F(1, 0, 3), B(2, 4, 0), C(0, 4, 0), EF = (-1, -2, 3),$

平面 BCC_1B_1 的法向量 $\vec{n} = (0, 1, 0),$

设直线 EF 与平面 BCC_1B_1 所成角为 $\theta,$

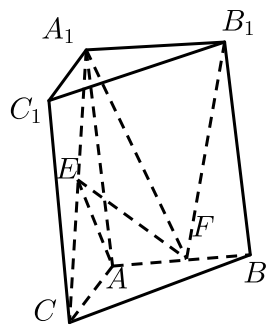
$$\text{则 } \sin \theta = \frac{|\vec{EF} \cdot \vec{n}|}{|\vec{EF}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7}.$$

$\therefore$ 直线 EF 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{14}}{7}.$

【标注】【知识点】 向量法解决线面角问题；向量法解决空间中的平行问题；平面和平面平行的性质；线面平行的证明问题

20. 2019~2020学年天津河北区高二上学期期末第19题12分 ★★★★★

如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp$ 底面 $ABC, AC \perp AB, AC = AB = 4, AA_1 = 6,$ 点 E, F 分别为 CA_1, AB 的中点.



- (1) 求证： $EF \parallel$ 平面 BCC_1B_1 .
 (2) 求直线 B_1F 与平面 AEF 所成角的正弦值 .
 (3) 求二面角 $E-AF-A_1$ 的余弦值 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

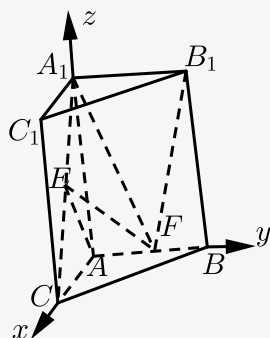
(2) $\frac{3\sqrt{130}}{65}$.

(3) $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

【解析】 (1) $\because AC \perp AB$, $AA_1 \perp$ 底面 ABC , $AC, AB \subset$ 平面 ABC ,

$$\therefore AA_1 \perp AB \perp AC ,$$

以 A 为原点 , AC 为 x 轴 , AB 为 y 轴 , AA_1 为 z 轴建立空间直角坐标系 ,



$$E(2, 0, 3) , F(0, 2, 0) , C(4, 0, 0) , B(0, 4, 0) , C_1(4, 0, 6) , \overrightarrow{CC_1} = (0, 0, 6) ,$$

$$\overrightarrow{CB} = (-4, 4, 0) ,$$

设平面 BCC_1B_1 法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\therefore \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{CC_1} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ 6z = 0 \end{cases} ,$$

$$\therefore \vec{m} = (1, 1, 0) , \overrightarrow{EF} = (-2, 2, -3) ,$$

$$\text{又} \because \overrightarrow{EF} \cdot \vec{m} = 0 ,$$

$$\therefore EF \perp \vec{m} ,$$

而 $EF \not\subset$ 平面 BCC_1B_1 ,

$\therefore EF \parallel$ 平面 BCC_1B_1 .

(2) 由 (1) 知 $B_1(0, 4, 6)$, $F(0, 2, 0)$, $E(2, 0, 3)$, $A(0, 0, 0)$, $\overrightarrow{AE} = (2, 0, 3)$,

$$\overrightarrow{AF} = (0, 2, 0) , \overrightarrow{B_1F} = (0, -2, -6) ,$$

设平面 AEF 法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AE} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AF} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \vec{n} = (-3, 0, 2),$$

$$\cos \langle \vec{BF}, \vec{n} \rangle = \frac{-12}{2\sqrt{10} \times \sqrt{13}} = -\frac{6\sqrt{130}}{130} = -\frac{3\sqrt{130}}{65},$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{3\sqrt{130}}{65}.$$

(3) 又 $\because \vec{CA} \perp$ 平面 A_1AF ,

$\therefore$ 平面 A_1AF 的一个法向量为 $\vec{p} = (1, 0, 0)$,

$$\cos \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle = \frac{-3}{\sqrt{13}} = -\frac{3\sqrt{13}}{13},$$

又 $\because$ 二面角为锐角,

$$\therefore \text{余弦值为 } \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

【标注】【知识点】直线的方向向量与平面的法向量

【素养】直观想象