

02空间向量在立体几何中的应用

1. 线线角

空间中两条直线所成角的向量公式

设直线 l_1 和 l_2 的方向向量分别为 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$ ，则有：

$$(1) l_1 // l_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 // \vec{v}_2 ;$$

$$(2) l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 ;$$

$$(3) \cos \theta = \left| \cos \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle \right| = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| |\vec{v}_2|}$$

1. 2018~2019学年天津和平区天津市耀华中学高二上学期期末第9题4分 ★★

直线 $2x - 3y + 1 = 0$ 的一个方向向量是 () .

A. $(2, -3)$

B. $(2, 3)$

C. $(-3, 2)$

D. $(3, 2)$

【答案】 D

【解析】 直线的斜率为 $k = \frac{2}{3}$,

$\therefore$ 直线 $2x - 3y + 1 = 0$ 的一个方向向量 ,

$$\vec{d} = \left(1, \frac{2}{3}\right) \text{ 或 } (3, 2) .$$

故选 D .

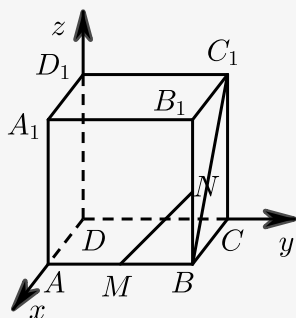
【标注】 【知识点】 直线的方向向量与平面的法向量

2. 2018~2019学年天津河西区天津市第四十二中学高一下学期期中第10题 ★★

在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中 , M 、 N 分别是 AB 、 BB_1 的中点 , 则异面直线 MN 与 BC_1 所成角的大小是 _____ .

【答案】 60°

【解析】 以 D 为原点 , DA 为 x 轴 , DC 为 y 轴 , DD_1 为 z 轴 , 建立空间直角坐标系 ,



设正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2 ,

则 $M(2, 1, 0)$, $N(2, 2, 1)$, $B(2, 2, 0)$, $C_1(0, 2, 2)$,

$$\overrightarrow{MN} = (0, 1, 1) , \overrightarrow{BC_1} = (-2, 0, 2) ,$$

设异面直线 MN 与 BC_1 所成角为 θ ,

$$\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC_1}|}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{BC_1}|} = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}} = \frac{1}{2} ,$$

$$\therefore \theta = 60^\circ ,$$

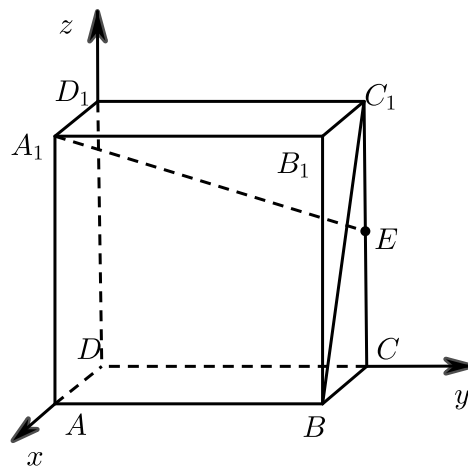
$\therefore$ 异面直线 MN 与 BC_1 所成角的大小是 60° .

故答案为 : 60° .

【标注】【知识点】向量法解决异面直线所成角问题

3. 2019~2020学年天津河北区高二上学期期末第16题8分 ★★

如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, 中, $AB = AA_1 = 2$, $AD = 1$, E 是 CC_1 的中点. 取如图所示的空间直角坐标系.



(1) 写出 A_1 , B , C_1 , E 的坐标.

(2) 求异面直线 A_1E 与 BC_1 所成角的余弦值.

【答案】 (1) $A_1(1, 0, 2)$, $B(1, 2, 0)$, $C_1(0, 2, 2)$, $E(0, 2, 1)$.

$$(2) \frac{\sqrt{30}}{30} .$$

【解析】 (1) $A_1(1, 0, 2)$, $B(1, 2, 0)$, $C_1(0, 2, 2)$, $E(0, 2, 1)$.

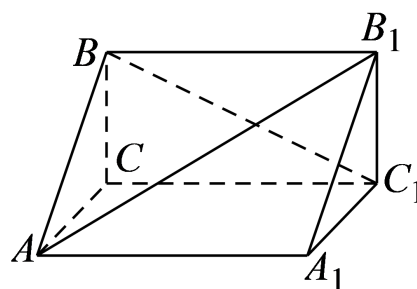
$$\begin{aligned}
 (2) \because \overrightarrow{A_1E} &= (-1, 2, -1), \overrightarrow{BC_1} = (-1, 0, 2), \\
 \therefore \cos \langle \overrightarrow{A_1E}, \overrightarrow{BC_1} \rangle &= \frac{\overrightarrow{A_1E} \cdot \overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{A_1E}| |\overrightarrow{BC_1}|} = \frac{1-2}{\sqrt{1+4+1}\sqrt{1+4}} = \frac{-\sqrt{30}}{30}, \\
 \therefore \text{异面直线 } A_1E \text{ 与 } BC_1 \text{ 所成角的余弦值为 } &\frac{\sqrt{30}}{30}.
 \end{aligned}$$

【标注】【素养】直观想象

【知识点】建立空间直角坐标系

4. 2017~2018学年天津河西区天津市新华中学高一下学期期中第9题5分 ★★★

如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ ， $AC \perp BC$ ，且 $CA = CC_1 = 2CB$ ，则直线 BC_1 与直线 AB_1 所成角的余弦值为（ ）.



A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

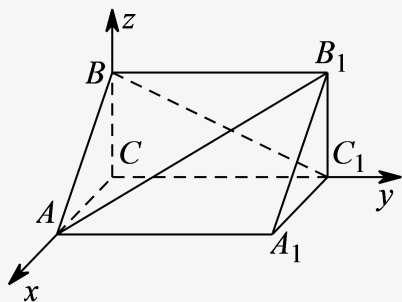
B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{3}{5}$

【答案】A

【解析】如图所示，建立空间直角坐标系.



不妨取 $CB = 1$ ，则 $CA = CC_1 = 2CB = 2$.

$$\therefore A(2, 0, 0), B(0, 0, 1), C_1(0, 2, 0), B_1(0, 2, 1),$$

$$\therefore \overrightarrow{AB_1} = (-2, 2, 1), \overrightarrow{BC_1} = (0, 2, -1).$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{BC_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{AB_1}| |\overrightarrow{BC_1}|} = \frac{3}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

故选 A.

【标注】【知识点】向量法解决异面直线所成角问题

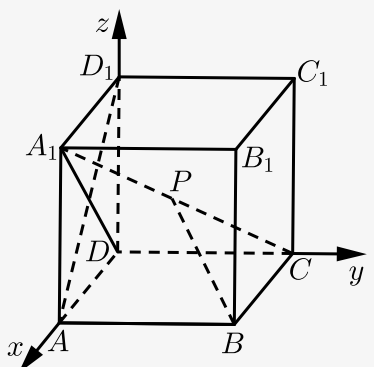
5. 2018~2019学年天津和平区天津市耀华中学高一下学期期末第12题4分 ★★★

在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 在 A_1C 上运动 (包括端点), 则 BP 与 AD_1 所成角的取值范围是 ().

- A. $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ B. $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ C. $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ D. $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$

【答案】 C

【解析】 以 D 为原点, 分别以 DA, DC, DD_1 所在直线为 x 轴, y 轴建立如图所示的空间直角坐标系.



设正方体棱长为 1,

经计算可设点 P 坐标为 $(x, 1-x, x)$,

又 $B(1, 1, 0), C(0, 1, 1)$,

所以 $\overrightarrow{BP} = (x-1, -x, x)$,

$\overrightarrow{BC_1} = (-1, 0, 1)$,

设 $\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BC_1}$ 的夹角为 α ,

$$\begin{aligned} \text{则 } \cos \alpha &= \frac{\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{BP}| |\overrightarrow{BC_1}|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + 2x^2} \times \sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{2}{3}}}, \end{aligned}$$

所以当 $x = \frac{1}{3}$ 时,

$\cos \alpha$ 取最大值 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

此时 $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

因为 $BC_1 // AD_1$,

所以 $\alpha \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$.

【标注】 【知识点】 向量法解决异面直线所成角问题

2. 线面角

1. 法向量

(1) 定义：已知平面 α ，如果向量 $\vec{n}$ 的基线与平面 α 垂直，则向量 $\vec{n}$ 叫做平面 α 的**法向量**。

(2) 性质：

①由平面法向量的定义可知，平面 α 的一个**法向量垂直于与平面 α 共面的所有向量**。

②由于同时垂直于同一平面的两条直线平行，可以推知，**一个平面的所有法向量互相平行**。

(3) 计算步骤：

【例题】已知点 $A(1, 2, 2)$ ， $B(2, 5, 4)$ ， $C(0, 1, 3)$ ，求平面 ABC 的法向量。

【备注】【解析】由已知得：

$$\overrightarrow{AB} = (1, 3, 2), \quad \overrightarrow{BC} = (-2, -4, -1),$$

设平面 ABC 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，则有：

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ -2x - 4y - z = 0 \end{cases}$$

解上述方程组得： $x : y : z = 5 : -3 : 2$ 。

为了获取一个准确且能为计算带来方便的法向量，不妨令 $x = 5$ ，则带入得 $y = -3$ ， $z = 2$

故平面 ABC 的一个法向量为 $\vec{n} = (5, -3, 2)$ 。

2. 直线与平面所成角的向量公式及计算步骤

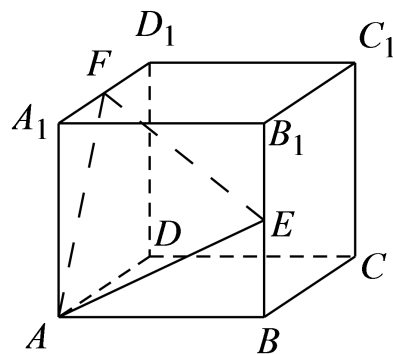
①建立空间直角坐标系；

②求出直线的方向向量 $\overrightarrow{AB}$ 和平面 α 的法向量 $\vec{n}$ ；

②设直线与平面 α 的夹角为 θ ($\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$)，则 θ 由**正弦**表达式 $\sin \theta = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\vec{n}|}$ 唯一确定。

6. 2017~2018学年12月天津和平区天津市第二十中学高二上学期月考理科第6题4分 ★

如图所示，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，以 D 为原点建立空间直角坐标系， E 为 BB_1 的中点， F 为 A_1D_1 的中点，则下列向量能作为平面 AEF 的一个法向量的是 ()。



- A. $(1, -2, 4)$ B. $(-4, -1, -2)$ C. $(2, -2, 1)$ D. $(1, 2, -2)$

【答案】 B

【解析】 由图易得：

$$\text{设 } A(1, 0, 0), E\left(1, 1, \frac{1}{2}\right), F\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right), \overrightarrow{AE} = \left(0, 1, \frac{1}{2}\right), \overrightarrow{AF} = \left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right),$$

设面 AEF 的一个法向量为 $\vec{n}(x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{AE} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{AF} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + \frac{z}{2} = 0 \\ -\frac{1}{2}x + z = 0 \end{cases},$$

$$\text{设 } x = 2 \text{ 得 } \vec{n} = \left(2, -\frac{1}{2}, 1\right),$$

$$\text{而 } -2\vec{n} = (-4, 1, -2),$$

故选 B.

【标注】【知识点】直线的方向向量与平面的法向量

7. 2017~2018学年天津河东区天津市第五十四中学高二上学期期末理科第5题4分 ★★

已知空间四个点 $A(1, 1, 1)$, $B(-4, 0, 2)$, $C(-3, -1, 0)$, $D(-1, 0, 4)$, 则直线 AD 与平面 ABC 的夹角为 ().

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

【答案】 A

【解析】 由题意，得

$$\overrightarrow{AD} = (-2, -1, 3), \overrightarrow{AB} = (-5, -1, 1), \overrightarrow{AC} = (-4, -2, -1),$$

设平面 ABC 法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -5x + y + z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -4x - 2y - z = 0 \end{cases},$$

$$\text{取 } x = 1, \text{ 得 } \vec{n} = (1, -3, 2),$$

设直线 AD 与平面 ABC 所成角为 θ .

$$\text{则 } \sin \theta = \frac{|\vec{AD} \cdot \vec{n}|}{|\vec{AD}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|-2+3+6|}{\sqrt{4+1+9} \cdot \sqrt{1+9+4}} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \theta = 30^\circ.$$

故选 A.

【标注】【知识点】向量法解决线面角问题；向量法解决空间中的平行问题

8. 2018~2019学年天津和平区天津市耀华中学高一下学期期中第7题5分 ★★

在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = BC = 2$, $AA_1 = 1$, 则 AB_1 与平面 ABC_1D_1 所成角的正弦值为 ().

A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

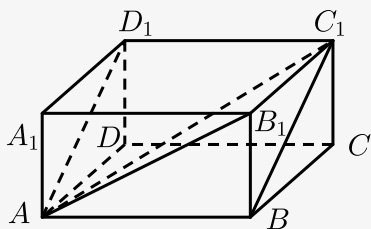
B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

D. $\frac{1}{2}$

【答案】 B

【解析】 方法一：连接 AC_1 , 此题用等体积法处理,



四面体 ABB_1C_1 以 A 为顶点,

$$\text{则 } V = \frac{1}{3} AB \cdot \frac{BB_1 \cdot B_1C_1}{2} = \frac{2}{3},$$

$$\text{而 } S_{\triangle ABC_1} = \frac{1}{2} AB \cdot BC_1 = \sqrt{5},$$

设 B_1 到面 ABC_1D_1 距离为 h ,

$$\text{有 } V = \frac{1}{3} h \cdot S_{\triangle ABC_1},$$

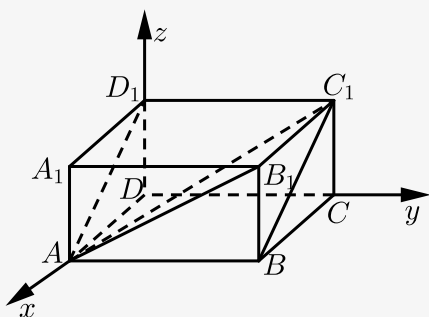
$$\text{解得 } h = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{而 } AB_1 = \sqrt{5}.$$

$$\text{由线面角定义, } AB_1 \text{ 与面 } ABC_1D_1 \text{ 成角的正弦为 } \frac{h}{AB_1} = \frac{2}{5}.$$

故选 B.

方法二：以 D 为原点建立空间直角坐标系 $D - xyz$,



则 $A(2, 0, 0)$, $B(2, 2, 1)$, $D(0, 0, 1)$, $B(2, 2, 0)$,
 $\overrightarrow{AB_1} = (0, 2, 1)$, $\overrightarrow{AB} = (0, 2, 0)$, $\overrightarrow{AD_1} = (-2, 0, 1)$,

设平面 ABC_1D_1 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 2y = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD_1} = -2x + z = 0 \end{cases}, \text{ 取 } x = 1, \text{ 则 } \vec{n} = (1, 0, 2),$$

设 AB_1 与平面 ABC_1D_1 所成角为 θ ,

则 AB_1 与平面 ABC_1D_1 所成角的正弦值为:

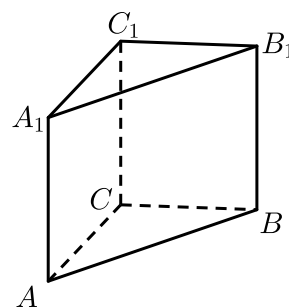
$$\sin \theta = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AB_1}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{5}.$$

故选 B.

【标注】【知识点】几何法求空间角；向量法解决空间中的平行问题

9. 2018~2019 学年天津红桥区天津市第三中学高一下学期期中第18题3分 ★★

如图，正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中（侧棱垂直于底面且底面为正三角形的三棱柱）， $AB = AA_1$ ，
 则 AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成角的正切值为（ ）.



A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

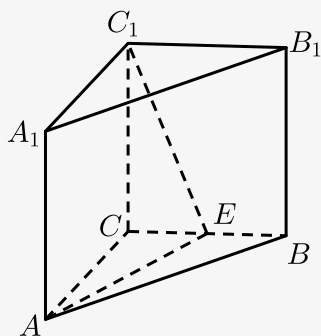
B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$

C. $\frac{\sqrt{10}}{4}$

D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

【答案】 B

【解析】 取 BC 的中点 E ，连接 C_1E ， AE ，



则 $AE \perp BC$ ，正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，

$\therefore$ 面 $ABC \perp$ 面 BB_1C_1C ，

面 $ABC \cap$ 面 $BB_1C_1C = BC$ ，

$\therefore AE \perp \text{面 } BB_1C_1C,$

$\therefore \angle AC_1E$ 就是 AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成的角,

在 $\text{Rt}\triangle AC_1E$ 中, $\because AB = AA_1,$

$$\text{则 } \tan \angle AC_1E = \frac{AE}{C_1E} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{15}}{5},$$

故选 B.

【标注】【知识点】几何法求空间角；向量法解决空间中的平行问题

10. 2020~2021学年天津南开区南开大学附属中学高二上学期期中第4题5分 ★★

在空间四边形 $ABCD$ 中, 向量 $\overrightarrow{AB} = (0, 2, -1), \overrightarrow{AC} = (-1, 2, 0), \overrightarrow{AD} = (0, -2, 0)$, 则直线 AD 与平面 ABC 所成角的正弦值为 ().

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【答案】 A

【解析】 设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 是平面 ABC 的一个法向量 $\vec{n}$, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$,

$$\text{即 } \begin{cases} 2y - z = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}, \text{ 令 } y = 1 \text{ 得 } \vec{n} = (2, 1, 2),$$

$$\therefore \left| \cos \langle \overrightarrow{AD}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{3},$$

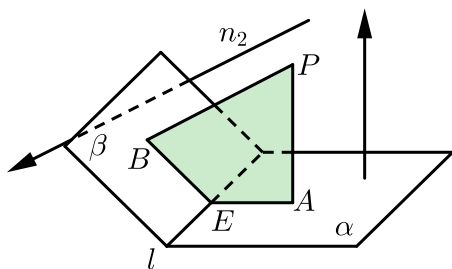
故直线 AD 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$.

故选 A.

【标注】【知识点】向量法解决线面角问题；直线的方向向量与平面的法向量；向量法解决空间中的平行问题

3. 二面角

二面角的向量表示



$$\cos \theta = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|} \text{ 或 } \cos \theta = -\frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|}.$$

i. 当法向量 n_1 与 n_2 的方向 **分别指向** 二面角的内侧与外侧时, 二面角 θ 的大小等于 **法向量 n_1, n_2 的夹角** $< n_1, n_2 >$ 的大小.

ii. 当法向量 n_1, n_2 的方向同时指向二面角的内侧或外侧时，二面角 θ 的大小等于法向量 n_1, n_2 的夹角的补角 $\pi - \langle n_1, n_2 \rangle$ 的大小。

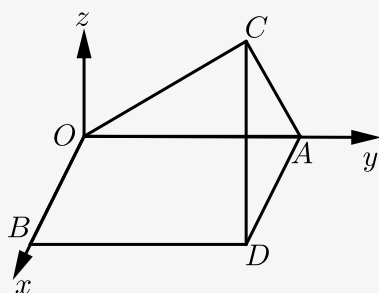
11. ★★

在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，若 $O(0,0,0)$ ， $A(0,2,0)$ ， $B(2,0,0)$ ， $C(2,2,2\sqrt{3})$ ，则二面角 $C-OA-B$ 的大小为 ()。

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

【答案】C

【解析】设 C 在平面 xoy 上的射影为 $D(2,2,0)$ ，连接 AD ， CD ， BD ，



则 $CD = 2\sqrt{3}$ ， $AD = OA = 2$ ，四边形 $OBDA$ 是正方形，

$\therefore OA \perp$ 平面 ACD ，

$\therefore \angle CAD$ 为二面角 $C-OA-B$ 的平面角，

$$\therefore \tan \angle CAD = \frac{CD}{AD} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

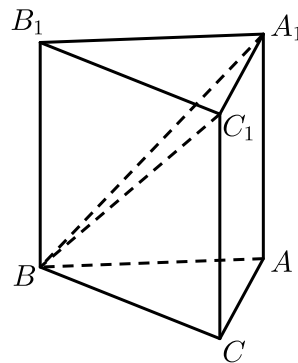
$\therefore \angle CAD = 60^\circ$ 。

故选 C。

【标注】【知识点】向量法解决二面角问题

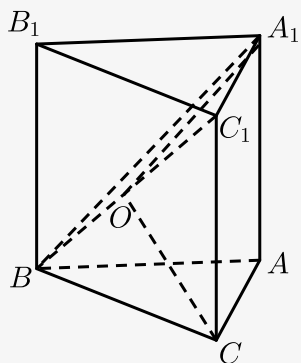
12. 2018~2019 学年天津和平区天津市第一中学高一下学期期中第13题 ★★★

如图，在直棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AB \perp AC$ ， $AB = AC = AA_1 = 2$ ，则二面角 A_1-BC_1-C 的平面角的正弦值为 _____。



【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】 $A_1B = 2\sqrt{2} = BC$, $A_1C_1 = CC_1 = 2$, $BC_1 = \sqrt{BC^2 + CC_1^2} = 2\sqrt{3}$,
所以 $\triangle A_1BC_1$ 与 $\triangle CBC_1$ 是两个全等的直角三角形 ,
由 A_1 向 BC_1 作垂线 , 垂足为 O , 则 $CO \perp BC_1$,

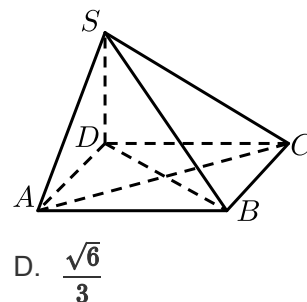


$$\begin{aligned} A_1O &= CO = \frac{2\sqrt{2} \cdot 2}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{6} \\ \cos \angle A_1OC &= \frac{A_1O^2 + CO^2 - A_1C^2}{2A_1O \cdot CO} \\ &= \frac{\left(\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)^2 - (2\sqrt{2})^2}{2 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{6} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{6}} \\ &= -\frac{1}{2} , \\ \sin \angle A_1OC &= \frac{\sqrt{3}}{2} . \end{aligned}$$

【标注】【知识点】几何法求空间角；向量法解决二面角问题

13. 2018~2019学年广东深圳高二上学期期末理科第8题5分 ★★

已知四棱锥 $S-ABCD$ 中 , 底 $ABCD$ 是正方形 , 且 $SD = AD$, $SD \perp$ 面 $ABCD$, 侧面 SAD 和面 SBC 所成的锐角二面角的余弦值为 () .



A. $\frac{1}{3}$

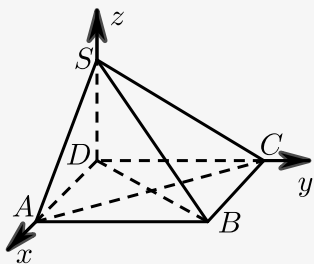
B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

【答案】 C

【解析】 $\because$ 四棱锥 $S-ABCD$ 中 , 底 $ABCD$ 是正方形 , 且 $SD = AD$, $SD \perp$ 面 $ABCD$,
 $\therefore$ 以 D 为原点 , DA 为 x 轴 , DC 为 y 轴 , DS 为 z 轴 , 建立空间坐标系 ,



设 $SD = AD = 1$,

则 $S(0, 0, 1)$, $B(1, 1, 0)$, $C(0, 1, 0)$,

$\vec{SB} = (1, 1, -1)$, $\vec{SC} = (0, 1, -1)$,

设平面 SBC 的法向量 $\vec{n}(x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{SC} = y - z = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{SB} = x + y - z = 0 \end{cases} ,$$

取 $y = 1$, 得 $\vec{n} = (0, 1, 1)$,

面 SAD 法向量 $\vec{m} = (0, 1, 0)$,

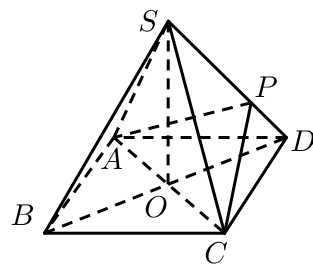
设面 SAD 和面 SBC 所成锐角二面角平面角为 θ ,

$$\cos \theta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

【标注】【知识点】向量法解决二面角问题

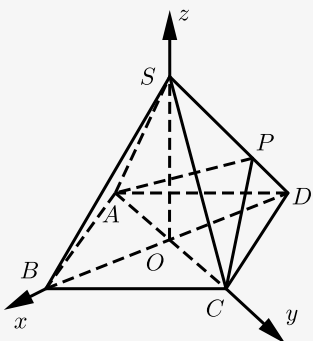
14. 2018~2019学年北京东城区北京市广渠门中学高二上学期期中理科第17题3分 ★★

如右图, 在正四棱锥 $S-ABCD$ 中, 底边 $AB = 2$, 侧棱 $SA = 3$, P 为侧棱 SD 上一点, 若 $SD \perp$ 平面 PAC , 则二面角 $P-AC-D$ 的余弦值是 _____ .



【答案】 $\frac{\sqrt{7}}{3}$

【解析】 连接 BD 交 AC 于 O , 由题意知 $SO \perp$ 平面 $ABCD$, 以 O 为坐标原点, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, $\vec{OS}$ 分别为 x 轴, y 轴, z 轴正方向, 建立空间直角坐标系 $O-xyz$ 如图所示,

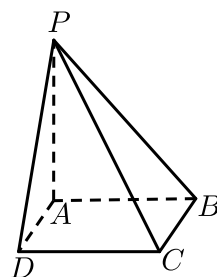


底边 $AB = 2$ ，侧棱 $SA = 3$ ，则高 $SO = \sqrt{7}$ ，
 $\therefore S(0, 0, \sqrt{7})$ ， $D(-\sqrt{2}, 0, 0)$ ， $C(0, \sqrt{2}, 0)$ ， $\overrightarrow{OC} = (0, \sqrt{2}, 0)$ ， $\overrightarrow{DS} = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{7})$ ，
 $\because SD \perp \text{平面 } PAC$ ， $\therefore$ 平面 PAC 的一个法向量为 $\overrightarrow{DS} = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{7})$ ，
 平面 DAC 的一个法向量 $\overrightarrow{OS} = (0, 0, \sqrt{7})$ ，设所求二面角为 θ ，
 则 $\cos \theta = \frac{\overrightarrow{DS} \cdot \overrightarrow{OS}}{|\overrightarrow{DS}| \cdot |\overrightarrow{OS}|} = \frac{7}{\sqrt{9} \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$ ，
 故所求二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{3}$ 。

【标注】【知识点】向量法解决二面角问题

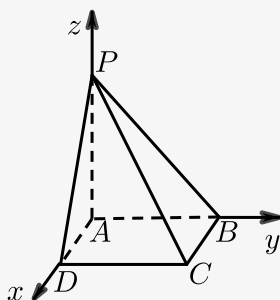
15. 2019~2020学年4月天津南开区天津市崇化中学高一下学期月考第13题4分 ★★

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $ABCD$ 是正方形， $PA = PB$ ， $PA \perp \text{平面 } ABCD$ ，则二面角 $P-BC-A$ 的大小为 _____。



【答案】 45°

【解析】 以 A 为原点， AD 方向为 x 轴正方向， AB 方向为 y 轴正方向， AP 方向为 z 轴正方向，



$\because PA = AB$, 设 $AB = a$,
 $\therefore A(0, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$, $C(a, a, 0)$, $P(0, 0, a)$, $\overrightarrow{BC} = (a, 0, 0)$, $\overrightarrow{PB} = (0, a, -a)$,
 设 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$, $\vec{n}_1$ 为平面 PBC 的一个法向量,

$$\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} ax = 0 \\ ay - az = 0 \end{cases},$$
 $\therefore \vec{n}_1 = (0, 1, 1)$,
 平面 ABC 的一个法向量 $\vec{n} = (0, 0, 1)$,
 $|\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n} \rangle| = \left| \frac{1}{\sqrt{2} \times 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$,
 $\therefore$ 二面角 $P-BC-A$ 为 45° .

【标注】【知识点】向量法解决二面角问题

4. 向量证明空间中的平行垂直关系

1. 平行关系的证明

- (1) 证明**线线平行**: 证明直线的方向向量平行
- (2) 证明**线面平行**: 证明直线的方向向量与平面的法向量垂直
- (3) 证明**面面平行**: 证明平面的法向量相互平行

2. 垂直关系的证明

- (1) 证明**线线垂直**: 证明直线的方向向量垂直
- (2) 证明**线面垂直**: 证明直线的方向向量与平面法向量平行
- (3) 证明**面面垂直**: 证明平面的法向量相互垂直

【备注】【教师备注】由于直线的方向向量与平面的法向量都不是唯一的, 所以运用时应以运算简便为标准进行选择.

根据平行垂直关系求未知量

16. 2019~2020学年天津河东区高二上学期期末第7题4分 ★

设平面 α 的法向量为 $(1, 2, -2)$, 平面 β 的法向量为 $(-2, -4, k)$, 若 $\alpha // \beta$, 则 k 等于 ().

- A. -4 B. -2 C. 2 D. 4

【答案】 D

【解析】 平面 α 的法向量为 $(1, 2, -2)$, 平面 β 的法向量为 $(-2, -4, k)$,
 当 $\alpha // \beta$ 时, $\lambda(1, 2, -2) = (-2, -4, k)$, 且 $\lambda \in \mathbf{R}$,

解得 $\lambda = -2$, $k = 4$.

故选 D .

【标注】【知识点】向量法解决二面角问题；向量法解决空间中的平行问题

17. 2019~2020学年天津南开区天津市南开中学高二上学期期末第8题4分 ★

已知直线 l 与平面 α 垂直，直线 l 的一个方向向量为 $\vec{u} = (1, -3, z)$ ，向量 $\vec{v} = (3, -2, 1)$ 与平面 α 平行，则 z 等于 () .

A. 3

B. 6

C. -9

D. 9

【答案】 C

【解析】 由题意可得 $\vec{u} \perp \vec{v}$,

$$\therefore \vec{u} \cdot \vec{v} = 3 + 6 + z = 0 ,$$

$$\therefore z = -9 .$$

故选 C .

【标注】【知识点】空间向量的数量积及其坐标表示

18. 2019~2020学年天津滨海新区高二上学期期末第14题5分 ★★

已知直线 l 与平面 α 垂直，直线 l 的一个方向向量为 $\vec{u} = (1, -3, z)$ ，向量 $\vec{v} = (3, -2, 1)$ 与平面 α 平行，则 z 等于 _____ .

【答案】 -9

【解析】 $\because$ 直线 l 与平面 α 垂直，

向量 $\vec{u} = (3, -2, 1)$ 与平面 α 平行，

直线 l 方向向量为 $\vec{u} = (1, -3, z)$ ，

$\therefore$ 向量 $\vec{u} \perp \vec{v}$ ，

$$\text{则 } (3, -2, 1) \cdot (1, -3, z) = 3 + 6 + z$$

$$= 9 + z$$

$$= 0 ,$$

所以 $z = -9$.

【标注】【知识点】利用数量积解决向量垂直问题（非坐标运算）；坐标表示平面向量的垂直

19. 2016~2017学年北京丰台区北京市第十二中学高二上学期期中理科第11题5分 ★★★

已知 $\overrightarrow{AB} = (1, 5, -2)$, $\overrightarrow{BC} = (3, 1, x)$, 若 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BP} = (y-1, z, -3)$ 且 $\overrightarrow{BP} \perp$ 平面 ABC , 则 $\overrightarrow{BP} = ()$.

A. $\left(\frac{33}{7}, -\frac{15}{7}, -3\right)$ B. $\left(\frac{40}{7}, -\frac{15}{7}, -3\right)$ C. $\left(4, \frac{40}{7}, -\frac{15}{7}\right)$ D. $\left(4, \frac{40}{7}, -3\right)$

【答案】 A

【解析】 $\because \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$,

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0,$$

$$\text{即 } 1 \times 3 + 5 \times 1 + (-2)x = 0,$$

$$\therefore x = 4.$$

$\because \overrightarrow{BP} \perp$ 平面 ABC ,

$\therefore \overrightarrow{BP} \perp \overrightarrow{AB}$, 且 $\overrightarrow{BP} \perp \overrightarrow{BC}$,

$$\text{即 } 1 \times (y-1) + 5z + (-2) \times (-3) = 0, \text{ 且 } 3(y-1) + 1 \times z + (-3) \times 4 = 0.$$

$$\text{解得 } y = \frac{40}{7}, z = -\frac{15}{7},$$

$$\text{于是 } \overrightarrow{BP} = \left(\frac{33}{7}, -\frac{15}{7}, -3\right).$$

故选 A.

【标注】【知识点】向量法解决空间中的平行问题；向量法解决空间中的垂直问题

利用向量证明平行垂直关系

20. 2018~2019学年12月天津河东区天津市第五十四中学高二上学期月考第17题4分 ★★

若直线 l 的方向向量与 β 的法向量分别是 $\vec{a} = (1, 0, -2)$, $\vec{b} = (-1, 0, 2)$, 则直线 l 与 β 的位置关系是 _____.

【答案】 $l \perp \beta$

【解析】 $\because \vec{a} = (1, 0, -2)$, $\vec{b} = (-1, 0, 2)$,

$$\therefore \vec{a} = -\vec{b}, \therefore \vec{a} \parallel \vec{b},$$

$$\because \vec{b} \text{ 是平面 } \beta \text{ 的法向量}, \therefore \vec{b} \perp \beta. \therefore l \perp \beta.$$

故答案为: $l \perp \beta$.

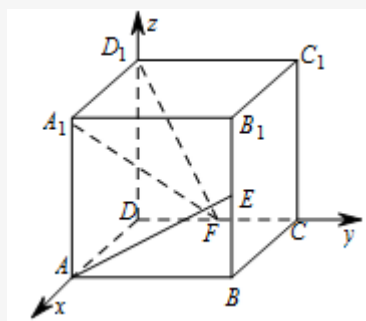
【标注】【知识点】向量法解决异面直线所成角问题；向量法解决空间中的平行问题

21. ★★

在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别是 BB_1, DC 的中点, 则 AE 与平面 A_1D_1F 的关系为 _____.

【答案】 $AE \perp$ 平面 A_1D_1F

【解析】 设正方体的棱长为 1，建立如图所示的空间直角坐标系，



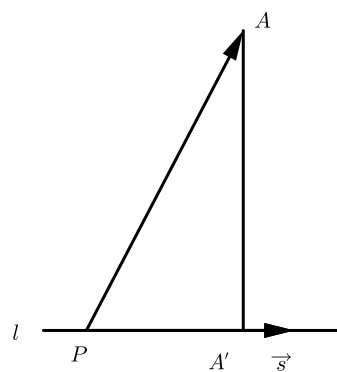
则 $A(1,0,0)$ ， $E(1,1,\frac{1}{2})$ ， $D_1(0,0,1)$ ， $F(0,\frac{1}{2},0)$ ， $A_1(1,0,1)$ ， $\overrightarrow{AE} = (0,1,\frac{1}{2})$ ，
 $\overrightarrow{D_1F} = (0,\frac{1}{2},-1)$ ， $\overrightarrow{A_1D_1} = (-1,0,0)$ 。
 $\therefore \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{D_1F} = 0$ ， $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{A_1D_1} = 0$ ，
 $\therefore \overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{D_1F}$ ， $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{A_1D_1}$ ，又 $A_1D_1 \cap D_1F = D_1$ ，
 $\therefore AE \perp$ 平面 A_1D_1F 。

【标注】 【知识点】 向量法解决空间中的垂直问题；向量法解决空间中的平行问题

5. 距离公式

1. 点到直线的距离的向量公式

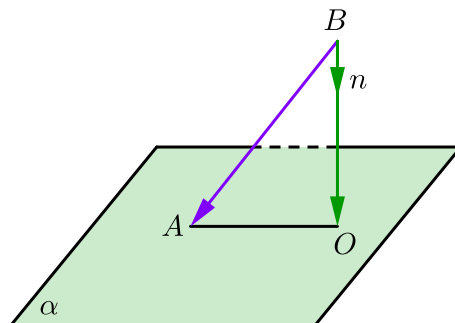
向量 $\overrightarrow{PA}$ 在 s 上的投影的大小 $|\overrightarrow{PA} \cdot \vec{s}_0|$ 等于线段 PA' 的长度，所以根据勾股定理有点 A 到直线 l 的距离 $d = \sqrt{|\overrightarrow{PA}|^2 - |\overrightarrow{PA} \cdot \vec{s}_0|^2}$ 。



2. 点面距离的向量公式

若 AB 是平面 α 的任一条斜线段 (A 在 α 内)， B 点到平面 α 的距离

$$\text{离为 } |BO| = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$



22. 2020~2021学年10月天津河西区天津市新华中学高二上学期月考第9题4分 ★★

已知空间中三点 $A(1,0,0)$ ， $B(2,1,-1)$ ， $C(0,-1,2)$ ，则点 C 到直线 AB 的距离为 ()。

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】 A

【解析】 $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, -1, 2)$,

$$\cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-4}{\sqrt{3} \times \sqrt{6}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{所以 } \sin \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \frac{1}{3},$$

$$\text{所以点 } C \text{ 到直线 } AB \text{ 的距离 } d = |\overrightarrow{AC}| \cdot \sin \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

故选 A.

【标注】 【知识点】 向量法求空间距离

23. 2020~2021学年10月天津河东区天津市第一零二中学高二上学期月考第5题4分 ★★

已知直线 l 的方向向量为 $\vec{a} = (-1, 0, 1)$, 点 $A(1, 2, -1)$ 在 l 上, 则点 $P(2, -1, 2)$ 到 l 的距离为()

A. $\sqrt{15}$

B. 4

C. $\sqrt{17}$

D. $3\sqrt{2}$

【答案】 C

【解析】 根据题意, 得: $\overrightarrow{PA} = (-1, 3, -3)$, $\vec{a} = (-1, 0, 1)$,

$$\therefore \cos \langle \vec{a}, \overrightarrow{PA} \rangle = \frac{1+0-3}{\sqrt{2} \times \sqrt{19}} = -\sqrt{\frac{2}{19}}, \therefore \sin \langle \vec{a}, \overrightarrow{PA} \rangle = \sqrt{\frac{17}{19}}; \text{又} \because |\overrightarrow{PA}| = \sqrt{19}, \therefore$$

$$\text{点 } P(2, -1, 2) \text{ 到直线 } l \text{ 的距离为 } |\overrightarrow{PA}| \sin \langle \vec{a}, \overrightarrow{PA} \rangle = \sqrt{17},$$

故选: C.

【标注】 【知识点】 向量法求空间距离

24. 2018~2019学年广东珠海高二上学期期末理科第7题5分 ★★

空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, 有四个点, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$, $D(3, 4, 5)$, 则 D 到平面 ABC 的距离为().

A. $3\sqrt{3}$

B. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{11\sqrt{3}}{3}$

D. $4\sqrt{3}$

【答案】 C

【解析】 $\because$ 空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, 有四个点,

$$A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1), D(3, 4, 5),$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = (2, 4, 5), \overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1),$$

设平面 ABC 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -x + y = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -x + z = 0 \end{cases}, \text{取 } \vec{n} = (1, 1, 1)$$

∴ D 到平面 ABC 的距离为：

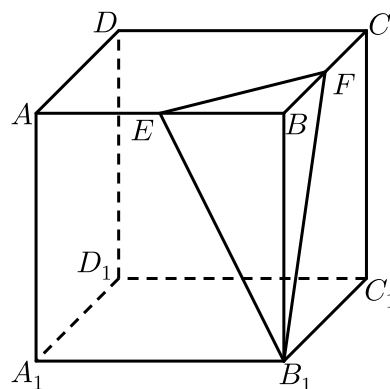
$$d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AD}|}{|\vec{n}|} = \frac{11}{\sqrt{3}} = \frac{11\sqrt{3}}{3},$$

故选：C.

【标注】【知识点】向量法求空间距离

25. 2020~2021学年北京东城区北京市第二十二中学高二上学期期中第8题4分 ★★

如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 、 F 分别是棱 AB 、 BC 的中点，则点 C_1 到平面 B_1EF 的距离等于 () .



A. $\frac{2}{3}$

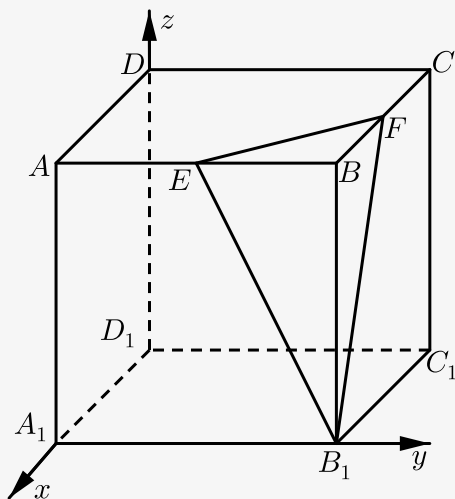
B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{4}{3}$

【答案】D

【解析】方法一：如图所示建立空间直角坐标系，



则 $B_1(2, 2, 0)$ ， $A(2, 0, 2)$ ， $C(0, 2, 2)$ ， $B(2, 2, 2)$ ，

∴ $E(2, 1, 2)$ ， $F(1, 2, 2)$ ， $C_1(0, 2, 0)$ ，

∴ $\overrightarrow{EF} = (-1, 1, 0)$ ， $\overrightarrow{B_1E} = (0, -1, 2)$ ， $\overrightarrow{C_1E} = (2, -1, 2)$ ，

设平面 B_1EF 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，

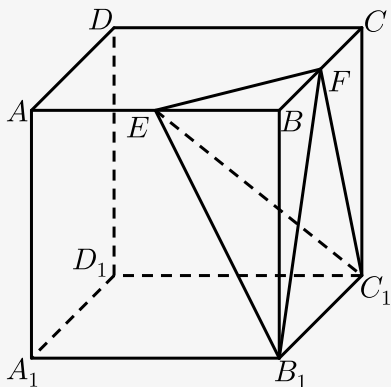
$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{EF} = -x + y = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{B_1E} = -y + 2z = 0 \end{cases},$$

令 $z = 1$, 则 $\vec{n} = (2, 2, 1)$,

$$\therefore \text{点 } C_1 \text{ 到平面 } B_1EF \text{ 的距离 } d = \frac{|\vec{C_1E} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|4 - 2 + 2|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{4}{3}.$$

故选 D.

方法二：(等体积法)：



$$\therefore S_{\triangle B_1C_1F} = \frac{1}{2} BC_1 \cdot BB_1 = 2,$$

$$\therefore V_{E-B_1C_1F} = \frac{1}{3} BE \cdot S_{\triangle B_1C_1F} = \frac{2}{3},$$

设点 C_1 到平面 B_1EF 的距离为 d ,

$$\text{则 } V_{C_1-B_1EF} = \frac{1}{3} S_{\triangle B_1EF} \cdot d = \frac{2}{3},$$

$$\therefore B_1E = B_1F = \sqrt{5}, EF = \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{由余弦定理知 } \cos \angle EB_1F = \frac{B_1E^2 + B_1F^2 - EF^2}{2B_1E \cdot B_1F} = \frac{5 + 5 - 2}{2 \times 5} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \cos^2 \angle EB_1F + \sin^2 \angle EB_1F = 1 \text{ 且 } \sin \angle EB_1F > 0,$$

$$\therefore \sin \angle EB_1F = \frac{3}{5},$$

$$\therefore S_{\triangle B_1EF} = \frac{1}{2} B_1E \cdot B_1F \cdot \sin \angle EB_1F = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} d = \frac{2}{3},$$

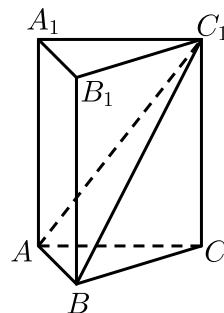
$$\therefore d = \frac{4}{3}.$$

故选 D.

【标注】【知识点】向量法求空间距离；等体积法

26. 2019~2020学年北京西城区北京师范大学附属中学高二上学期期中第9题4分 ★★

如图，在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AB = 2$ ， $CC_1 = 3$ ，则点 C 到平面 C_1AB 的距离为 () .



A. 2

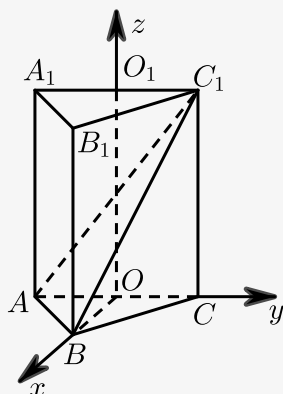
B. 1

C. $\frac{3}{2}$

D. $\sqrt{3}$

【答案】 C

【解析】 如图，



取 AC 中点 O ， A_1C_1 中点 O_1 ，连接 OO_1 和 OB ，

$\therefore \triangle ABC$ 为正三角形，

$\therefore OB \perp AC$ ，

$\therefore$ 平面 $ABC \perp$ 平面 A_1ACC_1 且平面 $ABC \cap$ 平面 $A_1ACC_1 = AC$ ，

$\therefore OB \perp$ 平面 A_1ACC_1 ，

$\therefore OB \perp OO_1$ ，

$\therefore OO_1 \perp AC$ ，

$\therefore$ 如图建立空间直角坐标系，

则 $C(0, 1, 0)$ ， $C_1(0, 1, 3)$ ， $A(0, -1, 0)$ ， $B(\sqrt{3}, 0, 0)$ ，

$\therefore \overrightarrow{AB} = (\sqrt{3}, 1, 0)$ ， $\overrightarrow{AC_1} = (0, 2, 3)$ ， $\overrightarrow{AC} = (0, 2, 0)$ ，

设平面 C_1AB 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，

$$\therefore \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}x + y = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC_1} = 2y + 3z = 0 \end{cases},$$

令 $x = 1$ ，则 $\vec{n} = \left(1, -\sqrt{3}, \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$ ，

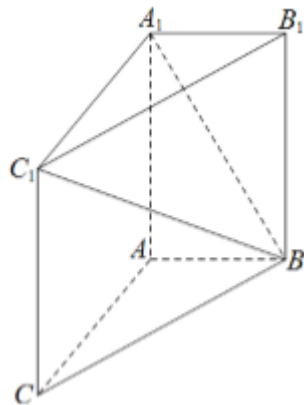
$$\therefore \text{点 } C \text{ 到平面 } C_1AB \text{ 的距离 } d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\vec{n}|} = \frac{|-2\sqrt{3}|}{\sqrt{1+3+\frac{4}{3}}} = \frac{3}{2}.$$

故选 C.

6. 在解答题中的综合应用

27. 2018~2019学年重庆渝北区重庆两江学校高二下学期期中理科第19题12分 ★★★

如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， AA_1C_1C 是边长为 4 的正方形，平面 $ABC \perp$ 平面 AA_1C_1C ， $AB = 3$ ， $BC = 5$ 。



- (1) 求证： $AA_1 \perp$ 平面 ABC 。
- (2) 求二面角 $A_1 - BC_1 - B_1$ 的余弦值。
- (3) 证明：在线段 BC_1 存在点 D ，使得 $AD \perp A_1B$ ，并求 $\frac{BD}{BC_1}$ 的值。

【答案】(1) 证明见解析。

- (2) $\frac{16}{25}$ 。
- (3) $\frac{9}{25}$ 。

【解析】(1) 证明： $\because AB^2 + AC^2 = 25 = BC^2$ 。

$\therefore AB \perp AC$ ，而面 $ABC \perp$ 面 AA_1C_1C ，面 $ABC \cap$ 面 $AA_1C_1C = AC$ ， $AB \subset$ 面 ABC 。

。

$\therefore AB \perp$ 面 AA_1C_1C ，而 $AA_1 \subset$ 面 AA_1C_1C 。

$\therefore AB \perp AA_1$ ，而 $AA_1 \perp AC$ ， $AA_1 \cap AB = A$ ， AA_1 、 $AB \subset$ 面 ABC 。

$\therefore AA_1 \perp$ 面 ABC 。

- (2) 由(1)可知 AB 、 AC 、 AA_1 两两垂直，故建立空间直角坐标系 $A - xyz$ 如下图所示。

$\therefore B(0, 3, 0)$ ， $C_1(4, 0, 4)$ ， $B_1(0, 3, 4)$ 。

$\therefore BC_1 = (4, -3, 4)$ ， $BA_1 = (0, -3, 4)$ ， $BB_1 = (0, 0, 4)$ 。

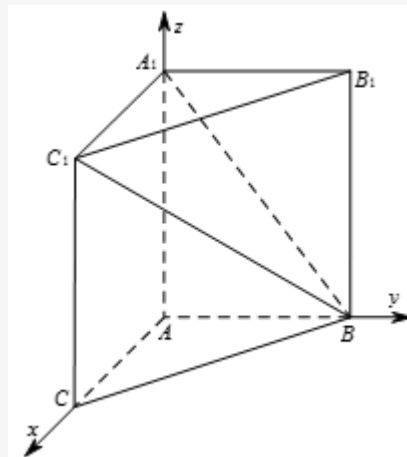
设平面 A_1BC_1 和平面 BB_1C_1 的法向量分别为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ 、 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ 。

$$\therefore \text{有} \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{BA_1} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{BC_1} = 0 \end{cases}, \begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{BC_1} = 0 \end{cases}.$$

故取 $\vec{n}_1 = (0, 4, 3)$, $\vec{n}_2 = (3, 4, 0)$.

$$\therefore \left| \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle \right| = \left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right| = \frac{4 \cdot 4}{5 \cdot 5} = \frac{16}{25}.$$

由图可知, 二面角 $A_1 - BC_1 - B_1$ 为锐角, 故二面角 $A_1 - BC_1 - B_1$ 的余弦值为 $\frac{16}{25}$.



(3) 由于点 D 在线段 BC_1 上, 故设 $\vec{BD} = \lambda \vec{BC_1} = (4\lambda, -3\lambda, 4\lambda)$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

$\therefore D$ 点坐标为 $(4\lambda, 3-3\lambda, 4\lambda)$, $\vec{AD} = (4\lambda, 3-3\lambda, 4\lambda)$.

而 $\vec{A_1B} = (0, 3, -4)$, $AD \perp A_1B$

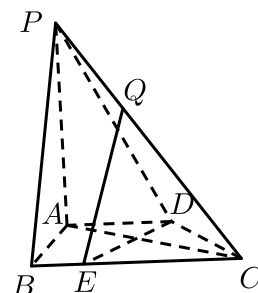
$\therefore \vec{AD} \cdot \vec{A_1B} = 9 - 9\lambda - 16\lambda = 0$, 解得: $\lambda = \frac{9}{25}$.

故 BC_1 上存在点 D 使 $AD \perp A_1B$, 此时, $\frac{BD}{BC_1} = \frac{9}{25}$.

【标注】【知识点】向量法解决二面角问题

28. 2020~2021学年天津武清区武清区杨村第一中学高三上学期期中(八校联考)第18题15分 ★★★

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是直角梯形, 其中 $AD \parallel BC$, $AB \perp AD$, $AB = AD = \frac{1}{2}BC = 2$, $PA = 4$, E 为棱 BC 上的点, 且 $BE = \frac{1}{4}BC$.



(1) 求证: $DE \perp$ 平面 PAC .

(2) 求二面角 $A-PC-D$ 的余弦值.

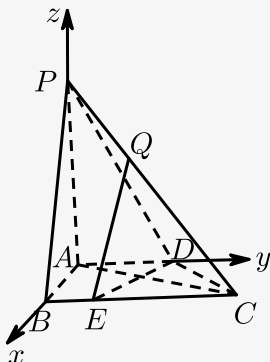
(3) 设 Q 为棱 CP 上的点(不与 C, P 重合), 且直线 QE 与平面 PAC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$, 求 $\frac{CQ}{CP}$ 的值.

【答案】 (1) 证明见解析.

$$(2) \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$(3) \frac{CQ}{CP} = \frac{2}{3}.$$

【解析】(1) 1 以 A 为坐标原点, 分别以 AB , AD , AP 所在直线为 x 轴, y 轴, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,



由已知可得, $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(2,4,0)$, $D(0,2,0)$, $P(0,0,4)$, $E(2,1,0)$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = (2, -1, 0), \overrightarrow{AC} = (2, 4, 0),$$

$$\overrightarrow{AP} = (0, 0, 4),$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AP} = 0,$$

$$\therefore DE \perp AC, DE \perp AP,$$

又 $\because AP \cap AC = A$, $AP \subset \text{平面 } PAC$, $AC \subset \text{平面 } PAC$,

$$\therefore DE \perp \text{平面 } PAC.$$

(2) 由(1)知平面 PAC 的法向量 $\vec{m} = (2, -1, 0)$,

设平面 PCD 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\therefore \overrightarrow{PD} = (0, 2, -4), \overrightarrow{PC} = (2, 4, -4),$$

$$\therefore \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PD} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 2y - 4z = 0 \\ 2x + 4y - 4z = 0 \end{cases},$$

不妨设 $z = 1$, 得 $\vec{n} = (-2, 2, 1)$,

$$\therefore |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$\therefore$ 二面角 $A-PC-D$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(3) 设 $\frac{CQ}{CP} = \lambda (0 < \lambda < 1)$, 即 $\overrightarrow{CQ} = \lambda \overrightarrow{CP} = (-2\lambda, -4\lambda, 4\lambda)$,

$$\therefore \overrightarrow{Q} = (2 - 2\lambda, 4 - 4\lambda, 4\lambda),$$

$$\therefore \overrightarrow{QE} = (2\lambda, 4\lambda - 3, -4\lambda),$$

$\therefore$ 直线 QE 与平面 PAC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$,

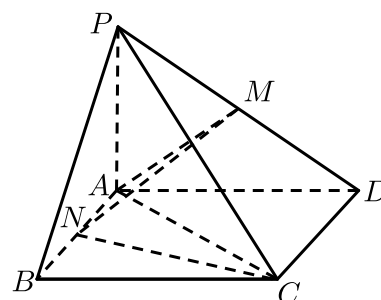
$$\therefore |\cos \langle \overrightarrow{QE}, \vec{m} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{QE} \cdot \vec{m}|}{|\overrightarrow{QE}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{解得 } \lambda = \frac{2}{3}, \text{ 即 } \frac{CQ}{CP} = \frac{2}{3}.$$

【标注】【知识点】向量法解决空间中的平行问题；向量法解决二面角问题；向量法解决空间中的垂直问题

29. 2018~2019学年天津河西区高二上学期期末第18题 ★★★

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ， M 是棱 PD 的中点，且 $PA = AB = AC = 2$ ， $BC = 2\sqrt{2}$ 。



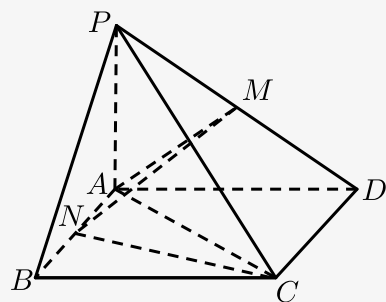
- (1) 求证： $CD \perp$ 平面 PAC 。
- (2) 求二面角 $M-AB-C$ 的大小。
- (3) 如果 N 是棱 AB 的中点，求直线 CN 与平面 MAB 所成角的正弦值。

【答案】 (1) 证明见解析。

(2) $\frac{\pi}{4}$ 。

(3) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ 。

【解析】 (1) 连接 AC ，



$$\because \text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } AB = AC = 2, BC = 2\sqrt{2},$$

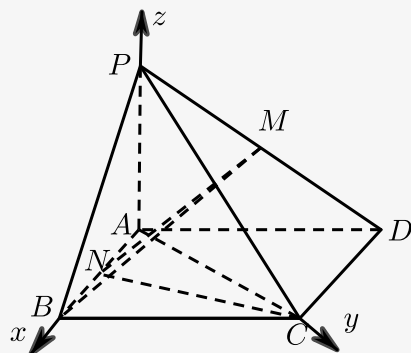
$$\therefore BC^2 = AB^2 + AC^2, \therefore AB \perp AC,$$

$$\because AB \parallel CD, \therefore AC \perp CD,$$

$$\text{又} \because PA \perp \text{底面 } ABCD, \therefore PA \perp CD,$$

$$\because AC \cap PA = A, \therefore CD \perp \text{平面 } PAC.$$

- (2) 建立如图所示空间直角坐标系，



$A(0,0,0)$, $P(0,0,2)$, $B(2,0,0)$, $C(0,2,0)$, $D(-2,2,0)$, $M(-1,1,1)$,

$$\therefore \overrightarrow{AM} = (-1, 1, 1), \overrightarrow{AB} = (2, 0, 0),$$

设面 MAB 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\therefore \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 2x = 0 \end{cases},$$

则其中一个法向量为 $\vec{n} = (0, 1, -1)$,

$\because PA \perp \text{面 } ABCD$,

$\therefore \overrightarrow{AP} = (0, 0, 2)$ 是面 ABC 的一个法向量,

$$\therefore \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{AP} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{AP}|} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

结合图象可得, 二面角为锐角, 则大小为 $\frac{\pi}{4}$.

(3) $N(1, 0, 0)$, $\overrightarrow{CN} = (1, -2, 0)$,

由(2)得面 MAB 的其中一个法向量为 $\vec{n} = (0, 1, -1)$,

$$\sin \theta = |\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{CN} \rangle| = \left| \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{CN}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{CN}|} \right| = \left| \frac{-2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} \right| = \frac{\sqrt{10}}{5},$$

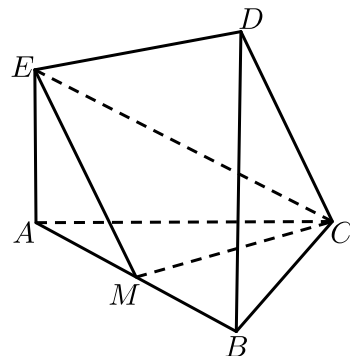
故直线 CN 与平面 MAB 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

【标注】【知识点】线面垂直的证明问题；向量法解决线面角问题；向量法解决二面角问题；向量法解决空间中的平行问题

30. 2019~2020学年12月天津武清区武清区杨村第三中学高二上学期月考第19题13分 ★★★

在如图所示的多面体中, $EA \perp \text{平面 } ABC$, $DB \perp \text{平面 } ABC$, $AC \perp BC$, 且

$AC = BC = BD = 2AE = 2$, M 是 AB 的中点.



- (1) 求证: $CM \perp EM$.
- (2) 求平面 EMC 与平面 BCD 所成的二面角的正弦值.
- (3) 在棱 DC 上是否存在一点 N , 使得直线 MN 与平面 EMC 所成的角是 60° , 若存在, 指出点 N 的位置; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) $\frac{\sqrt{30}}{6}$.

(3) 存在点 N 符合条件, 且 N 是棱 DC 的中点.

【解析】 (1) $\because AC = BC$, M 是 AB 的中点,

$$\therefore CM \perp AB,$$

$$\text{又} \because EA \perp \text{平面 } ABC, CM \perp EA,$$

$$\because EA \cap AB = A \text{ 点},$$

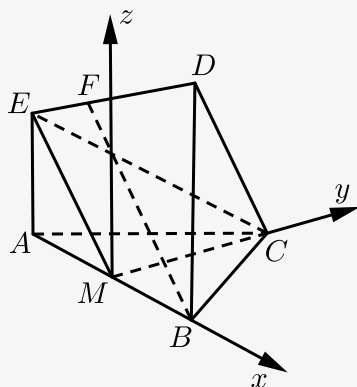
$$\therefore CM \perp \text{平面 } AEM,$$

$$\because EM \subset \text{平面 } AEM,$$

$$\therefore CM \perp EM.$$

(2) 如图, 以 M 为原点, MB , MC 为 x , y 轴,

建立如图所示的坐标系 $M-xyz$,



$$\therefore M(0,0,0), C(0,\sqrt{2},0), E(-\sqrt{2},0,1), B(\sqrt{2},0,0), D(\sqrt{2},0,2),$$

$$\overrightarrow{ME} = (-\sqrt{2}, 0, 1), \overrightarrow{MC} = (0, \sqrt{2}, 0), \overrightarrow{BC} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), \overrightarrow{BD} = (0, 0, 2),$$

设平面 EMC 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{ME} = -\sqrt{2}x + z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{MC} = \sqrt{2}y = 0 \end{cases}, \text{取 } x = 1, \text{ 得 } \vec{n} = (1, 0, \sqrt{2}),$$

设平面 BCD 的法向量 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{BC} = -\sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{BD} = 2z = 0 \end{cases}, \text{取 } x = 1, \text{ 得 } \vec{m} = (1, 1, 0),$$

设平面 EMC 与平面 BCD 所成的二面角的平面角为 θ ,

$$\text{则 } |\cos \theta| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6},$$

$\therefore$ 平面 EMC 与平面 BCD 所成的二面角的正弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{6}$.

(3) 在棱 DC 上存在一点 N , 设 $N(x, y, z)$, 且 $\overrightarrow{DN} = \lambda \overrightarrow{DC} (0 \leq \lambda \leq 1)$,

$$\therefore (x - \sqrt{2}, y, z - 2) = \lambda (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -2), \text{ 解得: } x = \sqrt{2} - \sqrt{2}\lambda,$$

$$\therefore \overrightarrow{MN} = (\sqrt{2} - \sqrt{2}\lambda, \sqrt{2}\lambda, 2 - 2\lambda), \quad y = \sqrt{2}\lambda, \quad z = 2 - 2\lambda,$$

$\therefore$ 直线 MN 与平面 EMC 所成角为 60° ,

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{MN}, \vec{m} \rangle = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}\lambda + \sqrt{2}(2 - 2\lambda)}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2(1 - \lambda)^2 + 2\lambda^2 + 4(1 - \lambda)^2}}$$

$$= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{解得: } \lambda = \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 存在点 N 符合条件, 且 N 是棱 DC 的中点.

【标注】【知识点】 向量法解决空间中的平行问题; 向量法解决二面角问题; 向量法解决线面角问

题