

## 02空间向量在立体几何中的应用

### 1. 线线角

#### 空间中两条直线所成角的向量公式

设直线  $l_1$  和  $l_2$  的方向向量分别为  $\vec{v}_1$  和  $\vec{v}_2$ ，则有：

$$(1) l_1 // l_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 // \vec{v}_2 ;$$

$$(2) l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 ;$$

$$(3) \cos \theta = \left| \cos \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle \right| = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| |\vec{v}_2|}$$

1. 直线  $2x - 3y + 1 = 0$  的一个方向向量是 ( ) .

A.  $(2, -3)$

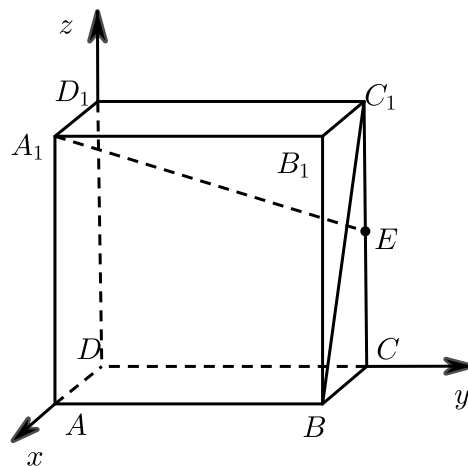
B.  $(2, 3)$

C.  $(-3, 2)$

D.  $(3, 2)$

2. 在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中， $M$ 、 $N$  分别是  $AB$ 、 $BB_1$  的中点，则异面直线  $MN$  与  $BC_1$  所成角的大小是 \_\_\_\_\_ .

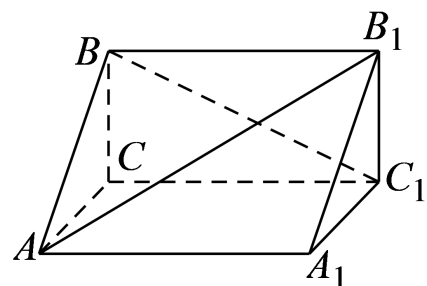
3. 如图，在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中， $AB = AA_1 = 2$ ， $AD = 1$ ， $E$  是  $CC_1$  的中点。取如图所示的空间直角坐标系。



(1) 写出  $A_1$ ， $B$ ， $C_1$ ， $E$  的坐标。

(2) 求异面直线  $A_1E$  与  $BC_1$  所成角的余弦值。

4. 如图，直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$ ， $AC \perp BC$ ，且  $CA = CC_1 = 2CB$ ，则直线  $BC_1$  与直线  $AB_1$  所成角的余弦值为 ( ) .



- A.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$       B.  $\frac{\sqrt{5}}{3}$       C.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$       D.  $\frac{3}{5}$

5. 在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 点  $P$  在  $A_1C$  上运动 (包括端点), 则  $BP$  与  $AD_1$  所成角的取值范围是 ( ) .

- A.  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$       B.  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$       C.  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$       D.  $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$

## 2. 线面角

### 1. 法向量

(1) 定义: 已知平面  $\alpha$ , 如果向量  $\vec{n}$  的基线与平面  $\alpha$  **垂直**, 则向量  $\vec{n}$  叫做平面  $\alpha$  的**法向量**.

(2) 性质:

① 由平面法向量的定义可知, 平面  $\alpha$  的一个**法向量垂直于与平面  $\alpha$  共面的所有向量**.

② 由于同时垂直于同一平面的两条直线平行, 可以推知, **一个平面的所有法向量互相平行**.

(3) 计算步骤:

【例题】已知点  $A(1, 2, 2)$ ,  $B(2, 5, 4)$ ,  $C(0, 1, 3)$ , 求平面  $ABC$  的法向量.

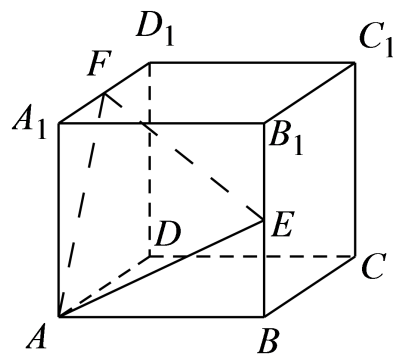
### 2. 直线与平面所成角的向量公式及计算步骤

① 建立空间直角坐标系;

② 求出直线的方向向量  $\vec{AB}$  和平面  $\alpha$  的法向量  $\vec{n}$ ;

② 设直线与平面  $\alpha$  的夹角为  $\theta$  ( $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ), 则  $\theta$  由**正弦**表达式  $\sin \theta = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{n}|}$  唯一确定.

6. 如图所示, 在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 以  $D$  为原点建立空间直角坐标系,  $E$  为  $BB_1$  的中点,  $F$  为  $A_1D_1$  的中点, 则下列向量能作为平面  $AEF$  的一个法向量的是 ( ) .



- A.  $(1, -2, 4)$       B.  $(-4, -1, -2)$       C.  $(2, -2, 1)$       D.  $(1, 2, -2)$

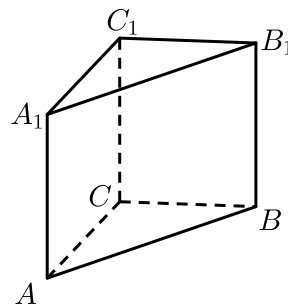
7. 已知空间四个点  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(-4, 0, 2)$ ,  $C(-3, -1, 0)$ ,  $D(-1, 0, 4)$ , 则直线  $AD$  与平面  $ABC$  的夹角为 ( ) .

- A.  $30^\circ$       B.  $45^\circ$       C.  $60^\circ$       D.  $90^\circ$

8. 在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB = BC = 2$ ,  $AA_1 = 1$ , 则  $AB_1$  与平面  $ABC_1D_1$  所成角的正弦值为 ( ) .

- A.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$       B.  $\frac{2}{5}$       C.  $\frac{\sqrt{10}}{5}$       D.  $\frac{1}{2}$

9. 如图, 正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中 (侧棱垂直于底面且底面为正三角形的三棱柱),  $AB = AA_1$ , 则  $AC_1$  与平面  $BB_1C_1C$  所成角的正切值为 ( ) .



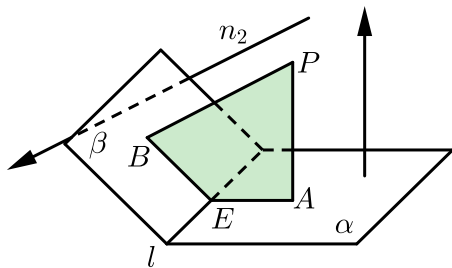
- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{15}}{5}$       C.  $\frac{\sqrt{10}}{4}$       D.  $\frac{\sqrt{6}}{4}$

10. 在空间四边形  $ABCD$  中, 向量  $\overrightarrow{AB} = (0, 2, -1)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (-1, 2, 0)$ ,  $\overrightarrow{AD} = (0, -2, 0)$ , 则直线  $AD$  与平面  $ABC$  所成角的正弦值为 ( ) .

- A.  $\frac{1}{3}$       B.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$       C.  $-\frac{1}{3}$       D.  $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

### 3. 二面角

#### 二面角的向量表示



$$\cos\theta = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|} \text{ 或 } \cos\theta = -\frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|}.$$

i. 当法向量  $n_1$  与  $n_2$  的方向 **分别指向** 二面角的内侧与外侧时，二面角  $\theta$  的大小等于 **法向量  $n_1, n_2$  的夹角**  $< n_1, n_2 >$  的大小.

ii. 当法向量  $n_1, n_2$  的方向 **同时指向** 二面角的内侧或外侧时，二面角  $\theta$  的大小等于 **法向量  $n_1, n_2$  的夹角的补角**  $\pi - < n_1, n_2 >$  的大小.

11. 在空间直角坐标系  $O-xyz$  中，若  $O(0,0,0)$ ， $A(0,2,0)$ ， $B(2,0,0)$ ， $C(2,2,2\sqrt{3})$ ，则二面角  $C-OA-B$  的大小为 ( ).

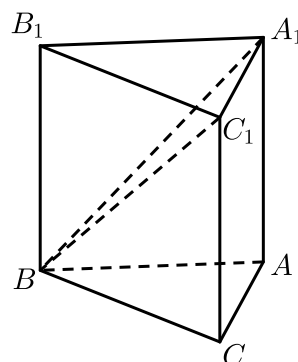
A.  $30^\circ$

B.  $45^\circ$

C.  $60^\circ$

D.  $90^\circ$

12. 如图，在直棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中， $AB \perp AC$ ， $AB = AC = AA_1 = 2$ ，则二面角  $A_1-BC_1-C$  的平面角的正弦值为 \_\_\_\_\_ .



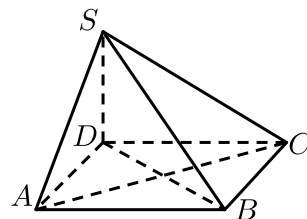
13. 已知四棱锥  $S-ABCD$  中，底  $ABCD$  是正方形，且  $SD = AD$ ， $SD \perp$  面  $ABCD$ ，侧面  $SAD$  和面  $SBC$  所成的锐角二面角的余弦值为 ( ).

A.  $\frac{1}{3}$

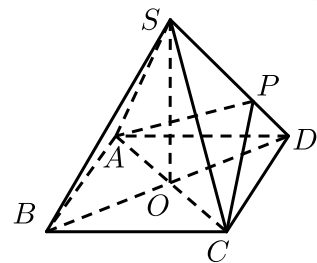
B.  $\frac{1}{2}$

C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

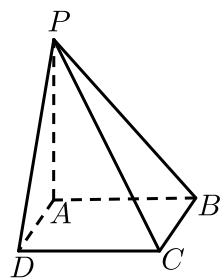
D.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$



14. 如右图，在正四棱锥  $S-ABCD$  中，底边  $AB = 2$ ，侧棱  $SA = 3$ ， $P$  为侧棱  $SD$  上一点，若  $SD \perp$  平面  $PAC$ ，则二面角  $P-AC-D$  的余弦值是 \_\_\_\_\_ .



15. 如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中， $ABCD$  是正方形， $PA = PB$ ， $PA \perp$  平面  $ABCD$ ，则二面角  $P-BC-A$  的大小为 \_\_\_\_\_ .



## 4. 向量证明空间中的平行垂直关系

### 1. 平行关系的证明

- (1) 证明**线线平行**：证明直线的方向向量平行
- (2) 证明**线面平行**：证明直线的方向向量与平面的法向量垂直
- (3) 证明**面面平行**：证明平面的法向量相互平行

### 2. 垂直关系的证明

- (1) 证明**线线垂直**：证明直线的方向向量垂直
- (2) 证明**线面垂直**：证明直线的方向向量与平面法向量平行
- (3) 证明**面面垂直**：证明平面的法向量相互垂直

### 根据平行垂直关系求未知量

16. 设平面  $\alpha$  的法向量为  $(1, 2, -2)$ ，平面  $\beta$  的法向量为  $(-2, -4, k)$ ，若  $\alpha // \beta$ ，则  $k$  等于 ( ) .
- A. -4                      B. -2                      C. 2                      D. 4
17. 已知直线  $l$  与平面  $\alpha$  垂直，直线  $l$  的一个方向向量为  $\vec{u} = (1, -3, z)$ ，向量  $\vec{v} = (3, -2, 1)$  与平面  $\alpha$  平行，则  $z$  等于 ( ) .
- A. 3                      B. 6                      C. -9                      D. 9
18. 已知直线  $l$  与平面  $\alpha$  垂直，直线  $l$  的一个方向向量为  $\vec{u} = (1, -3, z)$ ，向量  $\vec{v} = (3, -2, 1)$  与平面  $\alpha$  平行，则  $z$  等于 \_\_\_\_\_ .
- 19.

已知  $\overrightarrow{AB} = (1, 5, -2)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (3, 1, x)$ , 若  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{BP} = (y-1, z, -3)$  且  $\overrightarrow{BP} \perp$  平面  $ABC$ , 则  $\overrightarrow{BP} = ( )$ .

- A.  $\left(\frac{33}{7}, -\frac{15}{7}, -3\right)$     B.  $\left(\frac{40}{7}, -\frac{15}{7}, -3\right)$     C.  $\left(4, \frac{40}{7}, -\frac{15}{7}\right)$     D.  $\left(4, \frac{40}{7}, -3\right)$

### 利用向量证明平行垂直关系

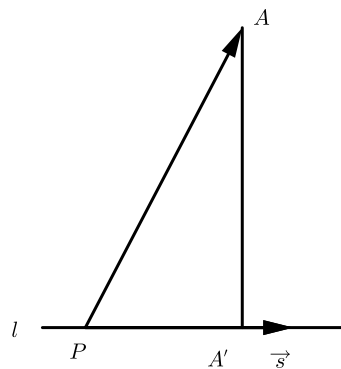
20. 若直线  $l$  的方向向量与  $\beta$  的法向量分别是  $\vec{a} = (1, 0, -2)$ ,  $\vec{b} = (-1, 0, 2)$ , 则直线  $l$  与  $\beta$  的位置关系是 \_\_\_\_\_.

21. 在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $E, F$  分别是  $BB_1, DC$  的中点, 则  $AE$  与平面  $A_1D_1F$  的关系为 \_\_\_\_\_.

## 5. 距离公式

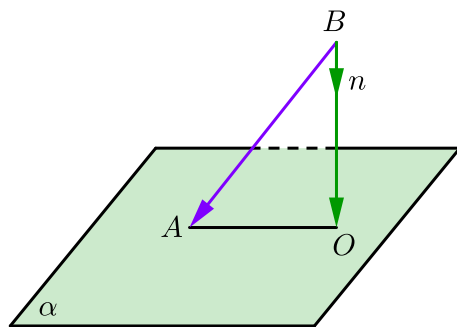
### 1. 点到直线的距离的向量公式

向量  $\overrightarrow{PA}$  在  $s$  上的投影的大小  $|\overrightarrow{PA} \cdot \vec{s}_0|$  等于线段  $PA'$  的长度, 所以根据勾股定理有点  $A$  到直线  $l$  的距离  $d = \sqrt{|\overrightarrow{PA}|^2 - |\overrightarrow{PA} \cdot \vec{s}_0|^2}$ .



### 2. 点面距离的向量公式

若  $AB$  是平面  $\alpha$  的任一条斜线段 ( $A$  在  $\alpha$  内),  $B$  点到平面  $\alpha$  的距离为  $|BO| = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$



22. 已知空间中三点  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(2, 1, -1)$ ,  $C(0, -1, 2)$ , 则点  $C$  到直线  $AB$  的距离为 ( ).

- A.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$     B.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$     C.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$     D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

23. 已知直线  $l$  的方向向量为  $\vec{a} = (-1, 0, 1)$ , 点  $A(1, 2, -1)$  在  $l$  上, 则点  $P(2, -1, 2)$  到  $l$  的距离为 ( ).

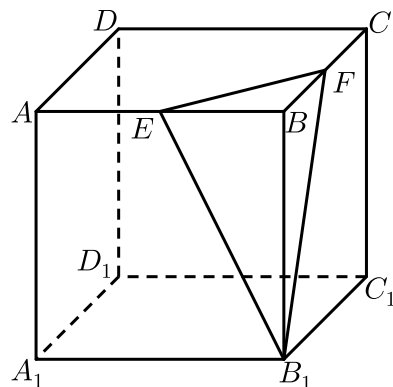
- A.  $\sqrt{15}$     B. 4    C.  $\sqrt{17}$     D.  $3\sqrt{2}$

24. 空间直角坐标系  $O - xyz$  中, 有四个点,  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $C(0, 0, 1)$ ,  $D(3, 4, 5)$ , 则  $D$  到平面  $ABC$  的距离为 ( ).

- A.  $3\sqrt{3}$     B.  $\frac{10\sqrt{3}}{3}$     C.  $\frac{11\sqrt{3}}{3}$     D.  $4\sqrt{3}$

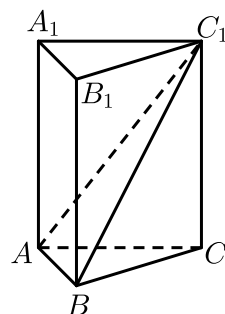
25.

如图，在棱长为 2 的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中，点  $E$ 、 $F$  分别是棱  $AB$ 、 $BC$  的中点，则点  $C_1$  到平面  $B_1EF$  的距离等于 ( ) .



- A.  $\frac{2}{3}$                       B.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$                       C.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$                       D.  $\frac{4}{3}$

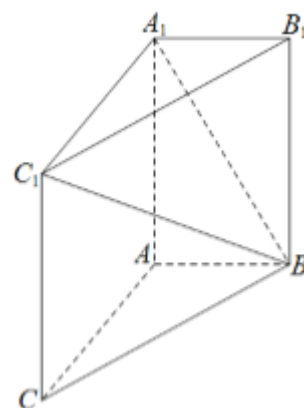
26. 如图，在正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中， $AB = 2$ ， $CC_1 = 3$ ，则点  $C$  到平面  $C_1AB$  的距离为 ( ) .



- A. 2                      B. 1                      C.  $\frac{3}{2}$                       D.  $\sqrt{3}$

## 6. 在解答题中的综合应用

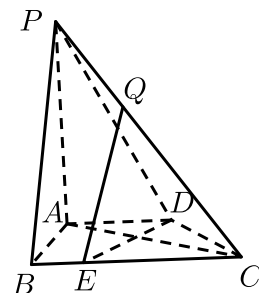
27. 如图，在三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中， $AA_1C_1C$  是边长为 4 的正方形，平面  $ABC \perp$  平面  $AA_1C_1C$ ， $AB = 3$ ， $BC = 5$  .



- ( 1 ) 求证： $AA_1 \perp$  平面  $ABC$  .  
 ( 2 ) 求二面角  $A_1 - BC_1 - B_1$  的余弦值 .  
 ( 3 ) 证明：在线段  $BC_1$  存在点  $D$ ，使得  $AD \perp A_1B$ ，并求  $\frac{BD}{BC_1}$  的值 .

28.

如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中， $PA \perp$  平面  $ABCD$ ，底面  $ABCD$  是直角梯形，其中  $AD \parallel BC$ ， $AB \perp AD$ ， $AB = AD = \frac{1}{2}BC = 2$ ， $PA = 4$ ， $E$  为棱  $BC$  上的点，且  $BE = \frac{1}{4}BC$ 。

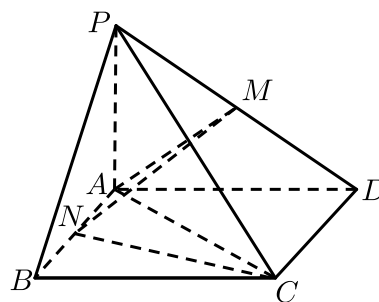


(1) 求证： $DE \perp$  平面  $PAC$ 。

(2) 求二面角  $A-PC-D$  的余弦值。

(3) 设  $Q$  为棱  $CP$  上的点（不与  $C$ ， $P$  重合），且直线  $QE$  与平面  $PAC$  所成角的正弦值为  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ，求  $\frac{CQ}{CP}$  的值。

29. 如图，四棱锥  $P-ABCD$  中，底面  $ABCD$  为平行四边形， $PA \perp$  底面  $ABCD$ ， $M$  是棱  $PD$  的中点，且  $PA = AB = AC = 2$ ， $BC = 2\sqrt{2}$ 。

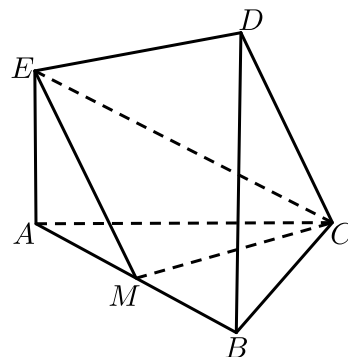


(1) 求证： $CD \perp$  平面  $PAC$ 。

(2) 求二面角  $M-AB-C$  的大小。

(3) 如果  $N$  是棱  $AB$  的中点，求直线  $CN$  与平面  $MAB$  所成角的正弦值。

30. 在如图所示的多面体中， $EA \perp$  平面  $ABC$ ， $DB \perp$  平面  $ABC$ ， $AC \perp BC$ ，且  $AC = BC = BD = 2AE = 2$ ， $M$  是  $AB$  的中点。



(1) 求证： $CM \perp EM$ 。

(2) 求平面  $EMC$  与平面  $BCD$  所成的二面角的正弦值。

(3) 在棱  $DC$  上是否存在一点  $N$ ，使得直线  $MN$  与平面  $EMC$  所成的角是  $60^\circ$ ，若存在，指出点  $N$  的位置；若不存在，请说明理由。

