

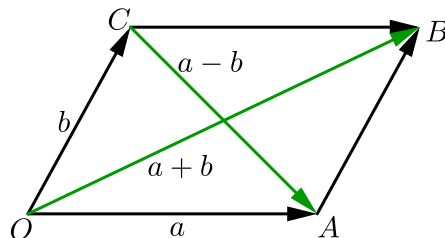
01空间向量的基本概念与运算

1. 空间向量的加减运算

1. 向量的加减运算法则

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{a} + \vec{b},$$

$$\vec{CA} = \vec{OA} - \vec{OC} = \vec{a} - \vec{b}.$$



2. 空间向量的数乘运算

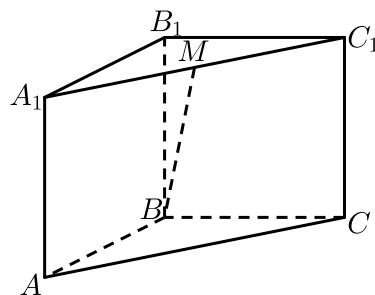
当 $\lambda > 0$ 时, $\lambda \vec{a}$ 与向量 $\vec{a}$ 方向相同;

当 $\lambda < 0$ 时, $\lambda \vec{a}$ 与向量 $\vec{a}$ 方向相反;

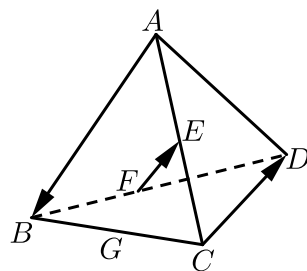
$\lambda \vec{a}$ 的长度是 $\vec{a}$ 的长度的 $|\lambda|$ 倍.

线性运算

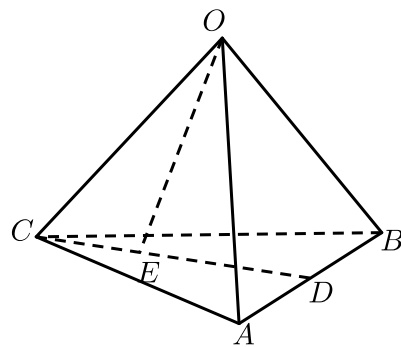
1. 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, M 为 A_1C_1 的中点, 若 $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AA_1} = \vec{c}$, $\vec{BC} = \vec{b}$, 则下列向量与 $\vec{BM}$ 相等的是 ().



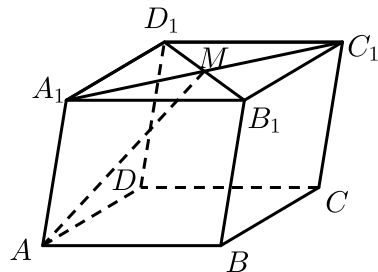
- A. $-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$
B. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$
C. $-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$
D. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$
2. 如图, 在空间四边形 $ABCD$ 中, $\vec{AB} = \vec{a} - 2\vec{c}$, $\vec{CD} = 5\vec{a} + 6\vec{b} - 8\vec{c}$, 棱 AC , BD , BC 的中点分别为 E , F , G , 若 $\vec{FE} = -3\vec{a} - 3\vec{b} + \lambda\vec{c}$, 则 $\lambda =$ ____ .



3. 如图, 在棱长均相等的四面体 $O-ABC$ 中, 点 D 为 AB 的中点, $CE = \frac{1}{2}ED$, 设 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, 则 $\overrightarrow{OE} = (\quad)$.



- A. $\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$
 B. $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$
 C. $\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$
 D. $\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$
4. 已知在空间四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$, 则 $\overrightarrow{CD} = (\quad)$.
 A. $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ B. $\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}$ C. $\vec{c} + \vec{a} - \vec{b}$ D. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
5. 如图, 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为 A_1C_1 与 B_1D_1 的交点, 若 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$, 则下列向量中与 $\overrightarrow{AM}$ 相等的向量是 $(\quad)$.



- A. $-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$
 B. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$
 C. $-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$
 D. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

2. 共线、共面向量

1. 共线向量定理

对空间任意两个向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$), $\vec{a} // \vec{b}$ 的充要条件是存在实数 λ , 使 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$.

2. 共面向量定理

如果两个向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 不共线, 那么向量 $\vec{p}$ 与向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 共面的充要条件是存在唯一的有序实数对 (x, y) , 使 $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$

3.共面向量定理的推论

推论1：如图，空间一点P位于平面MAB内的充要条件是存在有序实数对 (x, y) ，使 $\vec{MP} = x\vec{MA} + y\vec{MB}$ ，(*)

或对空间任一定点O，有 $\vec{OP} = \vec{OM} + x\vec{MA} + y\vec{MB}$.

在平面MAB内，点P对应的有序实数对 (x, y) 是唯一的；(*)式叫做平面MAB的向量表示式.

推论2：空间中的一点P与不共线的三点A, B, C共面的充要条件是存在唯一的有序实数组 $\{x, y, z\}$ ，使得 $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$ ，且 $x + y + z = 1$ (其中O为空间任一点).

4.共面向量定理的延伸

如果三个不共面的向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足等式 $k_1\vec{a} + k_2\vec{b} + k_3\vec{c} = \vec{0}$ ，那么 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

☉ 共线共面问题

6. 已知空间向量 $\vec{a}, \vec{b}$ ，且 $\vec{AB} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ， $\vec{BC} = -5\vec{a} + 6\vec{b}$ ， $\vec{CD} = 7\vec{a} - 2\vec{b}$ ，则一定共线的三点是() .

A. A, B, D

B. A, B, C

C. C, B, D

D. A, C, D

7. 已知A, B, C三点不共线，点O是平面ABC外一点，下列各条件中，能得到点M与A, B, C三点一定共面的是() .

A. $\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} + \frac{1}{2}\vec{OC}$

B. $\vec{OM} = \frac{1}{3}\vec{OA} - \frac{1}{3}\vec{OB} + \vec{OC}$

C. $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$

D. $\vec{OM} = 2\vec{OA} - \vec{OB} - \vec{OC}$

8. A, B, C不共线，对空间任意一点O，若 $\vec{OP} = \frac{3}{4}\vec{OA} + \frac{1}{8}\vec{OB} + \frac{1}{8}\vec{OC}$ ，则P, A, B, C四点() .

A. 不共面

B. 共面

C. 不一定共面

D. 无法判断是否共面

3. 空间向量的基本定理

1.空间向量基本定理

如果三个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 不共面，那么对空间任一向量 $\vec{p}$ ，存在一个唯一的有序实数组 x, y, z ，使 $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

其中 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 叫做空间的一个基底， $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 都叫做基向量.

2.空间向量基本定理的推论

设O, A, B, C是**不共面**的四点, 则对空间任一点P, 都存在**唯一**的有序实数组{x, y, z}, 使得 $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$.

基底 (线性运算)

9. 若 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 构成空间的一个基底, 则下列向量不共面的是 ().
- A. $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{c}$
- B. $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}, \vec{c}$
- C. $\vec{b} + \vec{c}, \vec{b}, \vec{b} - \vec{c}$
- D. $\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$
10. 设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是不共面的三个向量, 则下列选项中能构成空间基底的一组向量是 ().
- A. $2\vec{a}, \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}$
- B. $2\vec{b}, \vec{b} - \vec{a}, \vec{b} + 2\vec{a}$
- C. $\vec{a}, 2\vec{b}, \vec{b} - \vec{c}$
- D. $\vec{c}, \vec{a} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{c}$
11. 已知 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是不共面的三个向量, 则能构成一个基底的一组向量是 ().
- A. $2\vec{a}, \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}$
- B. $2\vec{b}, \vec{b} - \vec{a}, \vec{b} + 2\vec{a}$
- C. $\vec{a}, 2\vec{b}, \vec{b} - \vec{c}$
- D. $\vec{c}, \vec{a} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{c}$

4. 空间向量的数量积

1. 数量积定义

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

2. 数量积的性质

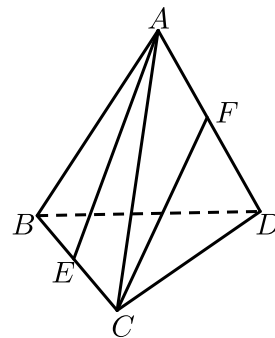
- ① $\vec{a} \bullet \vec{a} = |\vec{a}|^2$
- ② $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$ 的充要条件是 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ($\vec{a}, \vec{b}$ 为非零向量).
- ③ $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

3. 投影

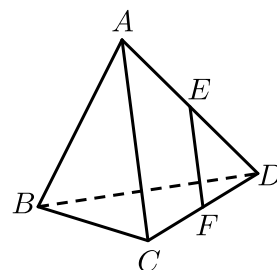
$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 的方向上的**投影**: $|\vec{a}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

数量积的计算

12. 如图, 在棱长为2的正四面体ABCD中, E, F分别是BC, AD的中点, 则 $\vec{AE} \cdot \vec{CF} = \underline{\hspace{2cm}}$.



13. 已知正四面体 $ABCD$ 的棱长为1, 点 E 、 F 分别是 AD 、 DC 中点, 则 $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AB} = (\quad)$.



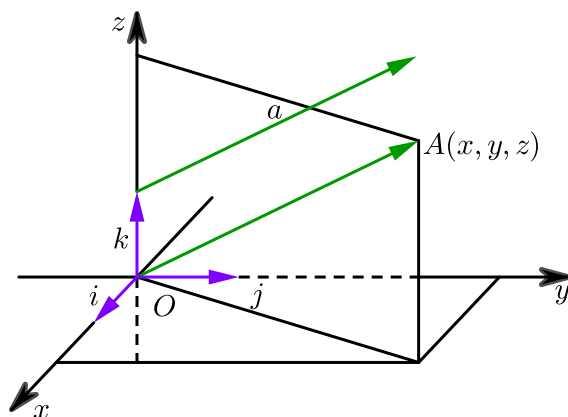
A. $\frac{1}{4}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

B. $-\frac{1}{4}$
D. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

5. 空间直角坐标系及坐标运算

1. 空间直角坐标系的建立

如图所示, 以点 O 为原点, 分别以 $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ 的方向为正方向建立 x 轴, y 轴, z 轴, 这时我们说建立了一个**空间直角坐标系 $O-xyz$** , 每两个坐标轴的平面分别称为 xOy 平面, yOz 平面, zOx 平面.



2. 空间向量的坐标

若 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$,

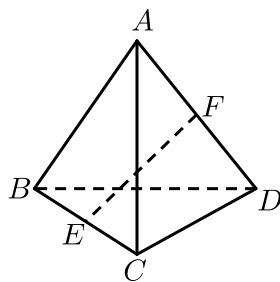
$$\text{则 } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

3. 空间向量的坐标运算

设 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 则容易得到:

$$(1) \vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3);$$

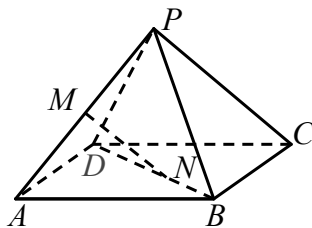
17. 空间四边形 $ABCD$ 中, 若向量 $\overrightarrow{AB} = (-3, 5, 2)$, $\overrightarrow{CD} = (-7, -1, -4)$, 点 E, F 分别为线段 BC, AD 的中点, 则 $\overrightarrow{EF}$ 的坐标为 () .



- A. $(2, 3, 3)$ B. $(-2, -3, -3)$
C. $(5, -2, 1)$ D. $(-5, 2, -1)$

数量积的坐标运算

18. 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, $\vec{a} = (x-2, 2y, -2)$, $\vec{b} = (3x, 2y, -3x)$, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$, 则 $m = x^2 + y^2 + 2x$ 的最小值是 _____, 最大值是 _____ .
19. 如图, 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA = AB$, 点 M 为 PA 的中点, $\overrightarrow{BD} = \lambda \overrightarrow{BN}$. 若 $MN \perp AD$, 则实数 $\lambda =$ _____ .



平行垂直关系

20. 若向量 $\vec{a} = (x, -1, 3)$, 向量 $\vec{b} = (2, y, 6)$, 则 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $x =$ _____, $y =$ _____ .
21. 已知向量 $\vec{a} = (2, 3, 5)$, $\vec{b} = (3, x, y)$ 分别是直线 l_1, l_2 的方向向量, 若 $l_1 \parallel l_2$, 则 () .
A. $x = \frac{9}{2}, y = 15$ B. $x = 3, y = \frac{15}{2}$
C. $x = 3, y = 15$ D. $x = \frac{9}{2}, y = \frac{15}{2}$
22. 已知向量 $\vec{a} = (0, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, 0, 2)$, 若向量 $k\vec{a} + \vec{b}$ 与向量 $\vec{a} - \vec{b}$ 互相垂直, 则 k 的值是 () .
A. $\frac{3}{2}$ B. 2 C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{7}{4}$
23. 已知向量 $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (-1, 0, 2)$, 且 $\vec{a} + k\vec{b}$ 与 $2\vec{a} - \vec{b}$ 互相垂直, 则 k 的值是 _____ .

模长的坐标运算

24. 若向量 $\overrightarrow{AB} = (2, -2, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (2, -1, 3)$, 则 $|\overrightarrow{BC}| =$ _____ .

25. 已知 $\vec{a} = (1, 2, \sqrt{3})$, $\vec{b} = (-1, \sqrt{3}, 0)$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}| =$ _____ .

26. 若 $\vec{a} = (2, -3, 5)$, $\vec{b} = (-3, 1, -4)$, 则 $|\vec{a} - 2\vec{b}| =$ _____ .

27. 已知 M 为 z 轴上一点, 且点 M 到点 $A(-1, 0, 1)$ 与点 $B(1, -3, 2)$ 的距离相等, 则点 M 的坐标为 () .

A. $(3, 0, 0)$

B. $(0, -2, 0)$

C. $(0, 0, 6)$

D. $(0, 0, -3)$

28. 已知 $\vec{a} = (2, 3, 1)$, $\vec{b} = (-4, 2, x)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $|\vec{b}| =$ _____ .

夹角的坐标运算

29. 已知 $A(2, -5, 1)$, $B(2, -2, 4)$, $C(1, -4, 1)$, 则向量 $\vec{AB}$ 与 $\vec{AC}$ 的夹角等于 _____ .

30. 已知空间向量 $\vec{a} = (1, 0, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, n)$, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$, 则向量 $\vec{a}$ 与 $\lambda\vec{b}$ ($\lambda \neq 0$) 的夹角为 () .

A. $\frac{\pi}{6}$
C. $\frac{\pi}{3}$

B. $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$
D. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$

31. 已知 $A(1, 0, 0)$, $B(0, -1, -1)$, $\vec{OA} + \lambda\vec{OB}$ 与 $\vec{OB}$ 的夹角为 120° , 则 λ 的值为 () .

A. $\pm \frac{\sqrt{6}}{6}$
C. $-\frac{\sqrt{6}}{6}$

B. $\frac{\sqrt{6}}{6}$
D. $\pm\sqrt{6}$

向量共面

32. 已知 $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (-1, 4, -2)$, $\vec{c} = (7, 5, \lambda)$, 若 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 三向量共面, 则实数 λ 等于 () .

A. $\frac{62}{7}$

B. $\frac{63}{7}$

C. $\frac{64}{7}$

D. $\frac{65}{7}$

33. 下列各组向量共面的是 () .

A. $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (1, 1, 0)$, $\vec{c} = (0, 1, 1)$

B. $\vec{a} = (1, 0, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, -1)$, $\vec{c} = (0, 0, 1)$

C. $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, -1, 0)$, $\vec{c} = (1, 0, 1)$

D. $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (1, 0, 1)$, $\vec{c} = (0, 1, 1)$