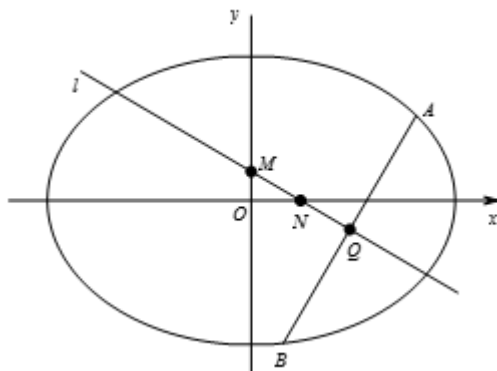


直线与椭圆的位置关系（三）

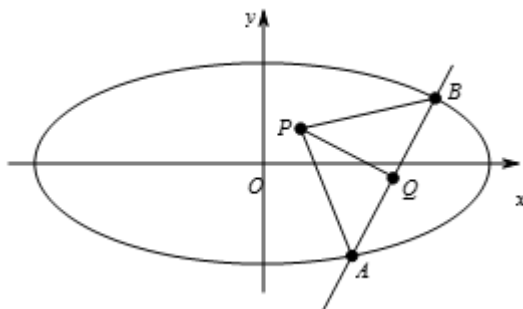
一、垂直平分问题

1. 垂直平分转化思路



中点 Q 的坐标为 (x_Q, y_Q) ，垂直平分线方程为 $y - y_Q = -\frac{1}{k}(x - x_Q)$ ，
令 $x = 0$ ，得到 M 点坐标，令 $y = 0$ ，得到 N 点坐标。

2. 垂直平分问题推广



解决思路： $|PB| = |PA| \Leftrightarrow PQ \perp AB \Leftrightarrow k_{PQ} = -\frac{1}{k_{AB}}$ 。

🔗 常见题型总结

其实我们会发现垂直平分问题除了题干中直接给出的垂直平分这样的情况之外，还有一些问题我们可以往垂直平分上进行转化：

- 1、等腰三角形（题目给出在 $\triangle ABC$ 中 $AB = AC$ 或者 $\angle ABC = \angle ACB$ ）中底边的中线垂直平分底边；
- 2、菱形中对角线之间是互相垂直平分；
- 3、在 $\triangle ABC$ 中 $AB \geq AC$ 或者 $\angle ABC \leq \angle ACB$ ，说明 A 点在垂直 BC 垂直平分线的某一侧；

3. 典型例题

1. 已知椭圆 C 的一个顶点为 $A(0, -1)$, 焦点为 x 轴上, 若右焦点到直线 $x - y + 2\sqrt{2} = 0$ 的距离为3.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 设椭圆 C 与直线 $y = kx + m$ 相交于不同的两点 M, N , 线段 MN 的中点为 E .

① 当 $k > 0, m \neq 0$ 时, 射线 OE 交椭圆 C 于点 G (O 为坐标原点), 交直线 $x = -3$ 于点

$D(-3, n)$, 求 $k^2 + n^2$ 的最小值.

② 当 $k \neq 0$, 且 $|AM| = |AN|$ 时, 求 m 的取值范围.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.

(2) ① 2.

② $(\frac{1}{2}, 2)$.

【解析】 (1) 依题意可设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 0)$,

则右焦点 $F(\sqrt{a^2 - 1}, 0)$,

由题设 $\frac{|\sqrt{a^2 - 1} + 2\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = 3$,

解得 $a^2 = 3$,

故椭圆方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.

(2) ① 设 $E(x_E, y_E), M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

由 $\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \end{cases}$ 得 $(3k^2 + 1)x^2 + 6mkx + 3(m^2 - 1) = 0$,

则 $x_1 + x_2 = -\frac{6mk}{3k^2 + 1}, x_1x_2 = \frac{3(m^2 - 1)}{3k^2 + 1}$,

由于直线与椭圆有两个交点,

$\therefore \Delta > 0$, 即 $m^2 < 3k^2 + 1$, ①

$\therefore x_E = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{3mk}{3k^2 + 1}$,

从而 $y_E = kx_E + m = \frac{m}{3k^2 + 1}$,

直线 $l_{OE}: y = -\frac{1}{3k}x$, 当 $x = -3$ 时, $n = \frac{1}{k}$,

$\therefore k^2 + n^2 = k^2 + \frac{1}{k^2} \geq 2$,

$\therefore k^2 + n^2$ 的最小值为2.

② 由(1)可得:

$k_{AE} = \frac{y_E + 1}{x_E} = -\frac{m + 3k^2 + 1}{3mk}$,

又 $|AM| = |AN|$,

$$\text{则 } -\frac{m+3k^2+1}{3mk} = -\frac{1}{k}, \text{ 即 } 2m = 3k^2 + 1, \text{ ②}$$

把②代入①解得 $0 < m < 2$,

$$\text{由②得 } k^2 = \frac{2m-1}{3} > 0, \text{ 解得 } m > \frac{1}{2},$$

故所求 m 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系；椭圆的标准方程；弦长求解问题；最值问题

备注：2019-2020学年天津南开区高二上学期期末第20题16分

2. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{5}}{3}$, 过点 $P(0, 1)$ 作斜率为 k 的直线 l , 椭圆 E 与直线 l 交于不同的两点 A, B , 当直线 l 垂直于 y 轴时, $|AB| = 3\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 E 的标准方程.

(2) 设点 M 的坐标为 $\left(\frac{5}{12}, 0\right)$, 若 $\triangle AMB$ 是以 AB 为底边的等腰三角形, 求 k 的值.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) $-\frac{2}{3}$.

【解析】 (1) 由题可知 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, 点 $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ 在椭圆上,

$$\text{则 } \frac{\frac{27}{4}}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1, \text{ 且 } a^2 = b^2 + c^2,$$

$$\therefore a = 3, b = 2,$$

$$\therefore \text{椭圆 } E \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, AB 的中点 $C(x_0, y_0)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + 1 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}, \text{ 消去 } y \text{ 得:}$$

$$(4 + 9k^2)x^2 + 18kx - 27 = 0, \text{ 显然 } \Delta > 0,$$

$$\therefore x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-9k}{4 + 9k^2}, y_0 = kx_0 + 1 = \frac{4}{4 + 9k^2},$$

当 $k \neq 0$ 时, 设过点 C 且与 l 垂直的直线方程为

$$y = -\frac{1}{k} \left(x + \frac{9k}{4 + 9k^2} \right) + \frac{4}{4 + 9k^2},$$

$$\text{将 } \left(\frac{5}{12}, 0\right) \text{ 代入得 } 0 = -\frac{1}{k} \left(\frac{5}{12} + \frac{9k}{4 + 9k^2} \right) + \frac{4}{4 + 9k^2},$$

$$\text{化简得 } 9k^2 + 12k + 4 = 0, \text{ 解得 } k = -\frac{2}{3},$$

当 $k = 0$ 时, 与题意不符,

综上所述, 所求 k 的值为 $-\frac{2}{3}$.

【标注】【知识点】中点弦问题

3. 已知椭圆的中心在坐标原点 O ，焦点在 x 轴上，短轴长为2，且两个焦点和短轴的两个端点恰为一个正方形的顶点，过右焦点 F 与 x 轴不垂直的直线 l 交椭圆于 P, Q 两点.
- (1) 求椭圆的方程.
- (2) 当直线 l 的斜率为1时，求 $\triangle POQ$ 的面积.
- (3) 在线段 OF 上是否存在点 $M(m, 0)$ ，使得以 MP, MQ 为邻边的平行四边形是菱形？若存在，求出 m 的取值范围；若不存在，请说明理由.

【答案】(1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.
(2) $\frac{2}{3}$.
(3) $0 < m < \frac{1}{2}$.

【解析】(1) 由已知，椭圆方程可设为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$.

因为两个焦点和短轴的两个端点恰为正方形的顶点，且短轴长为2，

所以 $b = c = 1, a = \sqrt{2}$

所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) 因为直线 l 过椭圆右焦点 $F(1, 0)$ ，且斜率为1，所以直线 l 的方程为 $y = x - 1$.

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$

由 $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 2 \\ y = x - 1 \end{cases}$ ，得 $3y^2 + 2y - 1 = 0$ ，解得 $y_1 = -1, y_2 = \frac{1}{3}$.

所以 $S_{\triangle POQ} = \frac{1}{2} |OF| \cdot |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} |y_1 - y_2| = \frac{2}{3}$.

(3) 假设在线段 OF 上存在点 $M(m, 0) (0 < m < 1)$ ，使

得以 MP, MQ 为邻边的平行四边形是菱形. 因为直线 l 与 x 轴不垂直，

所以设直线 l 的方程为 $y = k(x - 1) (k \neq 0)$.

由 $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 2 \\ y = k(x - 1) \end{cases}$ ，得 $(1 + 2k^2)x^2 - 4k^2x + 2k^2 - 2 = 0$,

因为 $\Delta = 16k^4 - 4(1 + 2k^2)(2k^2 - 2) = 8(k^2 + 1) > 0$,

所以 $x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{1 + 2k^2}, x_1x_2 = \frac{2k^2 - 2}{1 + 2k^2}$

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ ， PQ 中点为 $N(x_0, y_0)$,

所以 $x_0 = \frac{2k^2}{1 + 2k^2}, y_0 = \frac{-k}{1 + 2k^2}$

因为以 MP, MQ 为邻边的平行四边形是菱形，

所以 $MN \perp PQ, k_{MN} \cdot k = -1$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } k_{MN} \cdot k &= \frac{\frac{-k}{1+2k^2}}{\frac{2k^2}{1+2k^2} - m} \cdot k = -1, \\ \text{整理得 } \frac{-k^2}{1+2k^2} &= -\frac{2k^2}{1+2k^2} + m, \\ m &= \frac{-k^2 + 2k^2}{1+2k^2} = \frac{k^2}{1+2k^2}. \\ \text{所以 } m &= \frac{k^2}{1+2k^2} (k \neq 0), \\ \text{所以 } 0 < m &< \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】面积问题；设点法；直线和椭圆的位置关系；椭圆的基本量求解

4. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1$ ($a > \sqrt{3}$) 的右焦点为 F ，右顶点为 A ，已知 $\frac{1}{|OF|} + \frac{1}{|OA|} = \frac{3e}{|FA|}$ ，其中 O 为原点， e 为椭圆的离心率。
- (1) 求椭圆的方程；
- (2) 设过点 A 的直线 l 与椭圆交于点 B (B 不在 x 轴上)，垂直于 l 的直线与 l 交于点 M ，与 y 轴交于点 H ，若 $BF \perp HF$ ，且 $\angle MOA \leq \angle MAO$ ，求直线 l 斜率的取值范围。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。

(2) $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{4}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{6}}{4}, +\infty\right)$ 。

【解析】 (1) 设 $F(c, 0)$ ，由 $\frac{1}{|OF|} + \frac{1}{|OA|} = \frac{3e}{|FA|}$ ，即 $\frac{1}{c} + \frac{1}{a} = \frac{3c}{a(a-c)}$ ，可得

$$a^2 - c^2 = 3c^2, \text{ 又 } a^2 - c^2 = b^2 = 3, \text{ 所以 } c^2 = 1, \text{ 因此 } a^2 = 4, \text{ 所以椭圆的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 设直线 l 的斜率为 k ($k \neq 0$)，则直线 l 的方程为 $y = k(x-2)$ 。设 $B(x_B, y_B)$ ，由方程组

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ y = k(x-2) \end{cases} \text{ 消去 } y, \text{ 整理得 } (4k^2 + 3)x^2 - 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0. \text{ 解}$$

$$\text{得 } x = 2, \text{ 或 } x = \frac{8k^2 - 6}{4k^2 + 3}, \text{ 由题意得 } x_B = \frac{8k^2 - 6}{4k^2 + 3}, \text{ 从而 } y_B = \frac{-12k}{4k^2 + 3}. \text{ 由}$$

$$(1) \text{ 知, } F(1, 0), \text{ 设 } H(0, y_H), \text{ 有 } \overrightarrow{FH} = (-1, y_H), \overrightarrow{BF} = \left(\frac{9-4k^2}{4k^2+3}, \frac{12k}{4k^2+3}\right)$$

$$\cdot \text{ 由 } BF \perp HF, \text{ 得 } \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{HF} = 0, \text{ 所以 } \frac{9-4k^2}{4k^2+3} + \frac{12ky_H}{4k^2+3} = 0, \text{ 解得}$$

$$y_H = \frac{9-4k^2}{12k}. \text{ 因此直线 } MH \text{ 的方程为 } y = -\frac{1}{k}x + \frac{9-4k^2}{12k}. \text{ 设 } M(x_M, y_M),$$

$$\text{由方程组 } \begin{cases} y = -\frac{1}{k}x + \frac{9-4k^2}{12k} \\ y = k(x-2) \end{cases} \text{ 消去 } y, \text{ 解得 } x_M = \frac{20k^2+9}{12(k^2+1)}. \text{ 在 } \triangle MAO \text{ 中,}$$

$$\angle MOA \leq \angle MAO \Leftrightarrow |MA| \leq |MO|, \text{ 即 } (x_M - 2)^2 + y_M^2 \leq x_M^2 + y_M^2, \text{ 化简得}$$

$$x_M \geq 1, \text{ 即 } \frac{20k^2 + 9}{12(k^2 + 1)} \geq 1, \text{ 解得 } k \leq -\frac{\sqrt{6}}{4} \text{ 或 } k \geq \frac{\sqrt{6}}{4}. \text{ 所以, 直线 } l \text{ 的斜率的取值范围为 } \left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{4}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{6}}{4}, +\infty\right).$$

【标注】【知识点】向量问题；直线和椭圆的位置关系；求椭圆的离心率；平面向量数量积运算（非坐标）

备注：2019-2020学年天津河西区天津市新华中学高二上学期期末（特长班）第17题

4. 巩固练习

5. 已知向量 $\vec{a} = (x, \sqrt{3}y)$, $\vec{b} = (1, 0)$, 且 $(\vec{a} + \sqrt{3}\vec{b}) \perp (\vec{a} - \sqrt{3}\vec{b})$.

(1) 求点 $Q(x, y)$ 的轨迹 C 的方程.

(2) 设曲线 C 与直线 $y = kx + m$ 相交于不同的两点 M, N , 又点 $A(0, -1)$, 当 $|AM| = |AN|$ 时, 求实数 m 的取值范围.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.

(2) 当 $k \neq 0$ 时, m 的取值范围 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$,

当 $k = 0$ 时, m 的取值范围为 $(-1, 1)$.

【解析】 (1) 由题意得,

$$\vec{a} + \sqrt{3}\vec{b} = (x + \sqrt{3}, \sqrt{3}y),$$

$$\vec{a} - \sqrt{3}\vec{b} = (x - \sqrt{3}, \sqrt{3}y),$$

$$\therefore (\vec{a} + \sqrt{3}\vec{b}) \perp (\vec{a} - \sqrt{3}\vec{b}),$$

$$\therefore (\vec{a} + \sqrt{3}\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \sqrt{3}\vec{b}) = 0,$$

$$\text{即 } (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) + \sqrt{3}y - \sqrt{3}y = 0,$$

$$\text{化简得: } \frac{x^2}{3} + y^2 = 1,$$

$$\therefore Q \text{ 点的轨迹 } C \text{ 方程为: } \frac{x^2}{3} + y^2 = 1.$$

$$(2) \text{ 由 } \begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \end{cases},$$

$$\text{得 } (3k^2 + 1)x^2 + 6mkx + 3(m^2 - 1) = 0,$$

由于直线与椭圆有两个不同的定点,

$$\therefore \Delta > 0,$$

$$\text{即 } m^2 < 3k^2 + 1 \text{ ①},$$

(i) 当 $k \neq 0$ 时,

设弦 MN 的中点 $P(x_P, y_P)$,

x_M, x_N 分别为点 M, N 的横坐标,

$$\text{即 } x_P = \frac{x_M + x_N}{2} = -\frac{3mk}{3k^2 + 1},$$

$$\therefore y_P = kx_P + m = \frac{m}{3k^2 + 1},$$

$$k_{AP} = \frac{y_P + 1}{x_P} = \frac{m + 3k^2 + 1}{-3mk},$$

$$\text{又 } |AM| = |AN|,$$

$$\therefore AP \perp MN,$$

$$\text{则 } -\frac{m + 3k^2 + 1}{3mk} = -\frac{1}{k},$$

$$\text{即 } 2m = 3k^2 + 1 \text{ ②},$$

$$\text{将 ② 代入 ① 得: } 2m > m^2,$$

$$\text{解得 } 0 < m < 2,$$

$$\text{由 ② 得 } k^2 = \frac{2m - 1}{3} > 0,$$

$$\text{解得: } m > \frac{1}{2},$$

$$\therefore m \text{ 的取值范围是 } \left(\frac{1}{2}, 2\right).$$

(ii) 当 $k = 0$ 时,

$$|AM| = |AN|,$$

$$\therefore AP \perp MN,$$

$$m^2 < 3k^2 + 1,$$

$$\text{解得 } -1 < m < 1,$$

综上所述: 当 $k \neq 0$ 时, m 的取值范围 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, 当 $k = 0$ 时, m 的取值范围为 $(-1, 1)$.

【标注】【知识点】椭圆的标准方程; 直线和椭圆的位置关系; 中点弦问题

二、 向量线性表示

题型总结

向量的线性表示问题的形式为 $\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$ (A 和 B 是直线和椭圆的交点), 通常 P 为圆锥曲线上一点, 解题思路是利用 P 的坐标满足圆锥曲线方程而建立等式来解决问题, 思路如下:

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 根据 $\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$ 可得 $P(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2)$

又因为 P 点在椭圆上, 则有 $\frac{(\lambda x_1 + \mu x_2)^2}{a^2} + \frac{(\lambda y_1 + \mu y_2)^2}{b^2} = 1$

即

$$\begin{aligned} \frac{(\lambda x_1 + \mu x_2)^2}{a^2} + \frac{(\lambda y_1 + \mu y_2)^2}{b^2} &= \lambda^2 \left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{a^2} \right) + \mu^2 \left(\frac{x_2^2 + y_2^2}{a^2} \right) + \frac{2\lambda\mu x_1 x_2}{a^2} + \frac{2\lambda\mu y_1 y_2}{b^2} \\ &= \lambda^2 + \mu^2 + \frac{2\lambda\mu x_1 x_2}{a^2} + \frac{2\lambda\mu y_1 y_2}{b^2} = 1 \end{aligned}$$

备注: 有些题目需要我们转化为向量线性表示的形式, 例如题目告诉我们四边形 $OAPB$ 为平行四边形, 其实可以直接转化为 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ 的形式。

1. 典型例题

6. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴为4, F_1 、 F_2 是椭圆的左右焦点, P 是椭圆 C 上的一点, $\triangle PF_1F_2$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$ 且取得最大值时 $\triangle PF_1F_2$ 是钝角三角形。

(1) 求椭圆的标准方程。

(2) 若直线 $y = -x + t$ 与椭圆交于 A 、 B 两点, 对于实数 m 和椭圆上的一点 R 满足

$$m\overrightarrow{OA} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OR}, \text{ 求实数 } m \text{ 的取值范围。}$$

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 。

$$(2) \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cup \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)。$$

【解析】 (1) 由题可知 $2a = 4$, 即 $a = 2$,

$$S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} \cdot |F_1F_2| \cdot |y_P| = \frac{1}{2} \cdot 2c \cdot |y_P|,$$

$\therefore$ 当 $|y_P|$ 最大时, $S_{\triangle PF_1F_2}$ 最大, 即 $|y_P|_{\max} = b$ 。

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot 2c \cdot b = \sqrt{3},$$

$$\therefore bc = \sqrt{3}。$$

又 $\therefore$ 此时 $\triangle PF_1F_2$ 是钝角三角形, 即 $\angle F_1PF_2$ 是钝角,

$$\therefore c > b,$$

$$\text{又} \therefore a^2 = b^2 + c^2 = 4,$$

$$\therefore b = 1, c = \sqrt{3}。$$

$$\therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1。$$

(2) 根据题意, 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = -x + t \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}, \text{ 则 } 5x^2 - 8tx + 4t^2 - 4 = 0,$$

$$\therefore \Delta = 64t^2 - 80t^2 + 80 = 80 - 16t^2 > 0 \text{ 即 } t^2 < 5。$$

$$\begin{aligned}
x_1x_2 &= \frac{4t^2-4}{5}, \quad x_1x_2 = \frac{8t}{5}. \\
\therefore m\vec{OA} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{OB} &= \vec{OR}, \\
\therefore (mx_1, my_1) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_2, \frac{\sqrt{3}}{2}y_2\right) &= (x_3, y_3), \\
\text{即} \begin{cases} x_3 = mx_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 \\ y_3 = my_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_2 \end{cases}, \\
\therefore R \text{ 在椭圆上}, \\
\therefore \left(mx_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right)^2 + 4\left(my_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_2\right)^2 &= 4, \\
\therefore m^2x_1^2 + 4m^2y_1^2 + \frac{3}{4}x_2^2 + 3y_2^2 + \sqrt{3}mx_1x_2 + 4\sqrt{3}my_1y_2 &= 4, \quad (*) \\
\text{又} \therefore y_1y_2 &= (-x_1+t)(-x_2+t) = x_1x_2 - t(x_1+x_2) + t^2 \\
&= \frac{4t^2-4-8t^2+5t^2}{5} = \frac{t^2-4}{5}. \\
\therefore (*) \text{ 式可得}, \quad 4m^2 + \frac{3}{4} \times 4 + \frac{4t^2-4+4t^2-16}{5} \cdot \sqrt{3}m &= 4. \\
\therefore 20m^2 + (8t^2-20) \cdot \sqrt{3}m &= 5, \text{ 在 } m \neq 0, \\
\therefore 8t^2 &= \frac{5-20m^2}{\sqrt{3}m} + 20 \in (0, 40), \\
\therefore -4\sqrt{3} &< \frac{1}{m} - 4m < 4\sqrt{3}, \text{ 即 } \left|\frac{1}{m} - 4m\right| < 4\sqrt{3}, \\
\therefore -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} &< m < -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 或 } 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} < m < 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}. \\
\text{即 } m &\in \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】设点法；椭圆的标准方程；直线和椭圆的位置关系

2. 巩固练习

7. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短轴长为 2，离心率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 设 A, B 是椭圆 C 上的两个点， O 是坐标原点，试问在椭圆 C 上是否存在点 P ，使四边形 $OAPB$ 为矩形？若存在，求出矩形 $OAPB$ 的面积；若不存在，说明理由。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 。

(2) 存在，面积为 $\sqrt{3}$ 。

【解析】 (1) 设焦距为 $2c$ ，由已知 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $2b = 2$ ，

$$\therefore b = 1.$$

$$\text{又 } a^2 = 1 + c^2, \text{ 解得 } a = 2.$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

(2) 存在四边形 $OAPB$ 为矩形,

① AB 斜率不存在时, 显然对角线不等, 故不符合题意.

② AB 斜率存在时, 假设存在四边形 $OAPB$ 为矩形,

设直线 AB 的方程是 $y = kx + m$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \text{消去 } y \text{ 得 } (1 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0.$$

$$\Delta = 16(4k^2 - m^2 + 1) > 0 \Rightarrow 4k^2 + 1 > m^2 \quad ①$$

$$\text{由韦达定理 } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{8km}{1 + 4k^2} \\ x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 4}{1 + 4k^2} \end{cases},$$

若四边形 $OAPB$ 是矩形, 则 $OA \perp OB \Rightarrow \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$

$$\Rightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0.$$

$$\text{即 } x_1 x_2 + (kx_1 + m)(kx_2 + m) = 0$$

$$\Rightarrow (1 + k^2)x_1 x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2 = 0$$

$$\Rightarrow (1 + k^2) \cdot \frac{4m^2 - 4}{1 + 4k^2} + km \cdot \frac{-8km}{1 + 4k^2} + m^2 = 0.$$

$$\text{整理得: } \Rightarrow 5m^2 - 4k^2 - 4 = 0 \quad ②,$$

$$\text{由 } ①② \text{ 得: } m^2 > \frac{3}{4} \quad ③,$$

又因为四边形 $OAPB$ 是矩形,

$$\text{故 } \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OP},$$

$$\text{设 } P(x_0, y_0), \text{ 则 } \begin{cases} x_0 = x_1 + x_2 \\ y_0 = y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2m \end{cases},$$

$$\text{故 } P\left(-\frac{8km}{1 + 4k^2}, \frac{2m}{1 + 4k^2}\right),$$

因点 P 在椭圆上,

$$\text{所以 } \frac{16k^2 m^2}{(1 + 4k^2)^2} + \frac{4m^2}{(1 + 4k^2)^2} = 1 \Rightarrow \frac{4m^2}{1 + 4k^2} = 1$$

$$\Rightarrow 4m^2 = 1 + 4k^2 \quad ④$$

$$\text{由 } ②④ \begin{cases} 5m^2 - 4k^2 - 4 = 0 \\ 4m^2 = 1 + 4k^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 = 3 \\ k^2 = \frac{11}{4} \end{cases} \text{ 符合题意.}$$

$$|AB| = \sqrt{1 + k^2} \cdot \frac{4\sqrt{4k^2 + 1 - m^2}}{1 + 4k^2}$$

$$\text{而 } O \text{ 到 } AB \text{ 的距离 } d = \frac{|m|}{\sqrt{1 + 4k^2}},$$

$$\text{所以 } S_{\text{矩形 } OAPB} = d \cdot |AB| = \frac{4|m|\sqrt{4k^2 + 1 - m^2}}{1 + 4k^2} = \frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{9}}{12} = \sqrt{3}.$$

三、定点问题

1. 题型总结

🔔 直线过定点

(1) 若直线 AB 过的这个点是未知的, 我们知道 $y = kx + 2k = k(x + 2)$, 因此直线过定点 $(-2, 0)$, 所以要证明直线 $y = kx + m$ 过定点, 只需要找到 k 与 m 之间的关系即可.

(2) 若直线 AB 过的这个点 $P(m, n)$ 是已知或可求的, 那么要证明直线 AB 过的这个点 $P(m, n)$, 只需证明 AP, BP, AB 任意两个斜率相等即可.

🔔 探究类动点

探究 $\times \times \times$ 是否过定点(一般在 x 轴上)

解题思路: 设动点坐标为 $(m, 0)$, 然后结合条件, 将需要探究的 $\times \times \times$ 转化成与 $x_1 + x_2, x_1x_2$ 有关的关系式, 代入 $x_1 + x_2, x_1x_2$ 后, 会得到一个含有 m 的代数式, 然后求解即可.

2. 典型例题

8. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 四点 $P_1(1, 1), P_2(0, 1), P_3(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}), P_4(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 中恰有三点在椭圆 C 上.

(1) 求 C 的方程.

(2) 设直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A, B 两点. 若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1 , 证明: l 过定点.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 证明见解析.

【解析】(1) 根据椭圆的对称性, 由已知得,

$P_3(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}), P_4(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 必然在椭圆 C 上,

代入得 $\frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1$,

则剩余一点必然是 $P_2(0, 1)$, 代入得 $\frac{1}{b^2} = 1$,

$\therefore b = 1, a = 2$.

∴椭圆C的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) ①当直线l的斜率不存在时, 设 $l: x = m$, $A(m, y_A)$, $B(m, -y_A)$,

$$k_{P_2A} + k_{P_2B} = \frac{y_A - 1}{m} + \frac{-y_A - 1}{m} = \frac{-2}{m} = -1, \text{ 得 } m = 2,$$

此时l过椭圆右顶点, 直线l与椭圆不存在两个交点, 故不满足.

②当直线l的斜率存在时, 设 $l: y = kx + b (b \neq 1)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = kx + b \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases},$$

整理得 $(1 + 4k^2)x^2 + 8kbx + 4b^2 - 4 = 0$,

$$x_1 + x_2 = \frac{-8kb}{1 + 4k^2}, \quad x_1x_2 = \frac{4b^2 - 4}{1 + 4k^2},$$

$$\text{则 } k_{P_2A} + k_{P_2B} = \frac{y_1 - 1}{x_1} + \frac{y_2 - 1}{x_2} \\ = \frac{x_2(kx_1 + b) - x_2 + x_1(kx_2 + b) - x_1}{x_1x_2}$$

$$= \frac{8kb^2 - 8k - 8kb^2 + 8kb}{1 + 4k^2}$$

$$= \frac{4b^2 - 4}{1 + 4k^2}$$

$$= \frac{8k(b - 1)}{4(b + 1)(b - 1)}$$

$$= -1,$$

$$\text{又 } b \neq 1 \Rightarrow b = -2k - 1,$$

此时 $\Delta = -64k$, 存在k使得 $\Delta > 0$ 成立.

∴直线l的方程为 $y = kx - 2k - 1$,

当 $x = 2$ 时, $y = -1$,

所以l过定点 $(2, -1)$.

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系；定点问题

备注：2019-2020学年天津河西区天津市新华中学高二上学期期中（特长班）第17题15分

9. 已知椭圆C的中心在原点, 离心率等于 $\frac{1}{2}$, 椭圆C与椭圆 $E: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ 有相同的焦点.

(1) 求椭圆C的方程.

(2) 直线l与椭圆C交于不同的两点M、N (M、N与椭圆C的长轴端点不重合), 且以MN为直径的圆经过椭圆的左顶点A.

① 求证: 直线l过定点, 并求出定点P的坐标.

② 平面上是否存在一点Q, 使得当直线l绕点P运动时, 始终满足 $\angle MQP = \angle NQP$? 若存在求出点Q坐标; 若不存在, 说明理由.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) ① 证明见解析, $\left(-\frac{2}{7}, 0\right)$.

② 在 x 轴存在点 $Q(-14, 0)$, 使得 $\angle MQP = \angle NQP$. 证明见解析.

【解析】(1) $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$,

故 $a : b : c = 2 : \sqrt{3} : 1$,

又 $c = 1$,

故 $a = 2, b = \sqrt{3}$,

$\therefore \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) ① 设直线 l 为 $y = kx + m$, 当 k 不存在时, 设直线为 $x = x_0$,

与 x 轴交点为 $E(x_0, 0)$,

则 $|EA| = |EM|$,

即 $t_0 + 2 = \sqrt{3\left(1 - \frac{x_0^2}{4}\right)}$,

故 $x_0 = -\frac{2}{7}$,

由对称性知定点为 $\left(-\frac{2}{7}, 0\right)$,

当 k 存在时, $\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$,

$(4k^2 + 3)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0$,

$M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), A(-2, 0)$,

则 $x_1 + x_2 = -\frac{8km}{4k^2 + 3}, x_1x_2 = \frac{4m^2 - 12}{4k^2 + 3}$,

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{NA} = (x_1 + 2)(x_2 + 2) + y_1y_2$

$= (k^2 + 1)x_1x_2 + (km + 2)(x_1 + x_2) + m^2 + 4 = 0$,

代入得 $7m^2 - 16km + 4k^2 = 0$

$(7m - 2k)(m - 2k) = 0$,

$\therefore m = \frac{2k}{7}$ 或 $m = 2k$ (舍),

故 $y = kx + \frac{2k}{7} = k\left(x + \frac{2}{7}\right)$,

即直线 l 恒过 $\left(-\frac{2}{7}, 0\right)$.

② 假设存在 Q , 使当直线 l 绕点 P 运动时 $\angle MQP = \angle NQP$,

由对称性知 Q 点必在 x 轴上, $Q(x_0, 0)$,

当 $MN \perp x$ 时, $\angle MQP = \angle NQP$, 即 $x_0 \in \mathbf{R}$,

当 MN 与 x 轴不垂直时, 设直线方程为 $y = k\left(x + \frac{2}{7}\right)$,

$$\begin{aligned}
& \text{代入 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\
& \text{得: } (4k^2 + 3)x^2 + \frac{16}{7}k^2x + \frac{16k^2}{49} - 12 = 0, \\
& \text{则 } k_{MQ} + k_{NQ} = 0, \text{ 即 } \frac{y_1}{x_1 - x_0} + \frac{y_2}{x_2 - x_0} = 0, \\
& \text{即 } k\left(x_1 + \frac{2}{7}\right)(x_2 - x_0) + k\left(x_2 + \frac{2}{7}\right)(x_1 - x_0) = 0, \\
& \text{代入 } x_1x_2 = \frac{1}{4k^2 + 3} \cdot \left(\frac{16k^2}{49} - 12\right), \\
& x_1 + x_2 = \frac{1}{4k^2 + 3} \cdot \left(-\frac{16}{7}k^2\right), \\
& \text{得 } k(3x_0 + 42) = 0, \\
& \text{即 } x_0 = -14, \\
& \text{即 } Q \text{ 坐标 } (-14, 0), \\
& \text{综上所述, 在 } x \text{ 轴存在点 } Q(-14, 0), \\
& \text{使得 } \angle MQP = \angle NQP.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系；对称问题；定点问题

备注：2018-2019学年天津河西区天津市实验中学高二上学期中第20题12分

3. 巩固练习

10. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上顶点为 A ，右顶点为 B ，已知 $\sqrt{2}|OA| = |OB|$ (O 为原点)。
- (1) 求椭圆的离心率。
- (2) 设点 $B(\sqrt{2}, 0)$ ，直线 $l: y = kx + m (m \neq \pm 1)$ 与椭圆交于两个不同点 M, N ，直线 AM 与 x 轴交于点 E ，直线 AN 与 x 轴交于点 F ，若 $\vec{OE} \cdot \vec{OF} = -6$ ，求证：直线 l 经过定点。

【答案】 (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

(2) 证明见解析。

【解析】 (1) 设椭圆的半焦距为 c ，由已知有 $a = \sqrt{2}b$ ，

$$\text{又由 } a^2 = b^2 + c^2,$$

$$\text{消去 } b \text{ 得 } a^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + c^2,$$

$$\text{解得 } \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{所以, 椭圆的离心率为 } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$(2) \text{ 由点 } B(\sqrt{2}, 0) \text{ 知 } a = \sqrt{2}, \text{ 又 } \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $c = b = 1$,

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$,

设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

则直线 AM 的方程为 $y = \frac{y_1 - 1}{x_1}x + 1$,

令 $y = 0$, 得点 E 的横坐标 $x_E = -\frac{x_1}{y_1 - 1}$,

所以点 $E\left(-\frac{x_1}{y_1 - 1}, 0\right)$,

同理 , 点 $F\left(-\frac{x_2}{y_2 - 1}, 0\right)$,

由 $\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}$ 得 $(1 + 2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 2 = 0$,

则 $x_1 + x_2 = -\frac{4km}{1 + 2k^2}$, $x_1x_2 = \frac{2m^2 - 2}{1 + 2k^2}$,

所以 $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OF} = \left(-\frac{x_1}{y_1 - 1}\right) \cdot \left(-\frac{x_2}{y_2 - 1}\right)$

$= \frac{x_1}{kx_1 + m - 1} \cdot \frac{x_2}{kx_2 + m - 1}$

$= \frac{x_1x_2}{k^2x_1x_2 + k(m - 1)(x_1 + x_2) + (m - 1)^2}$

$= \frac{\frac{2m^2 - 2}{1 + 2k^2}}{k^2 \cdot \frac{2m^2 - 2}{1 + 2k^2} + k(m - 1) \cdot \left(-\frac{4km}{1 + 2k^2}\right) + (m - 1)^2}$

$= 2 \frac{1 + m}{m - 1}$,

所以 $2 \frac{1 + m}{m - 1} = -6$,

解得 $m = \frac{1}{2}$, 此时 $\Delta = 2k^2 - m^2 + 1 = 2k^2 + \frac{3}{4} > 0$,

所以直线 l 经过定点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系；求椭圆的离心率；定点问题

备注：2019-2020学年天津静海区高二上学期期中第20题13分

四、定值问题

1. 题型总结

 求证类定值

求证 $\times \times \times$ 为定值

解题思路：将需要求证的 $\times \times \times$ 转化成与 $x_1 + x_2, x_1x_2$ 有关的关系式，代入 $x_1 + x_2, x_1x_2$ 后，得到的就是我们需要证明的定值。

探究类定值

探究 $\times \times \times$ 是否为定值？

解题思路：将需要探究的 $\times \times \times$ 转化成与 $x_1 + x_2, x_1x_2$ 有关的关系式，代入 $x_1 + x_2, x_1x_2$ 后，一般情况下会得到一个含有参数 k 的整式或者分式。若含有参数 k 的代数式为整式，则令 k 的每一项系数都等于0；若含有参数 k 的代数式为分式，则令含有 k 的分子分母对应的系数之比相等。

2. 典型例题

11. 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} (a > b > 0)$ 经过点 $A(0, -1)$ ，且 A 到右焦点 F 的距离与 A 到直线 $x = 2$ 的距离之比为离心率。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 经过点 $(1, 1)$ ，且斜率为 k 的直线与椭圆 C 交于不同的两点 P, Q （均异于点 A ），设直线 AP 与 AQ 的斜率分别为 k_1, k_2 ，证明： $k_1 + k_2 = a^2$ 。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 。

(2) 证明见解析。

【解析】 (1) 由题知 $\frac{2c}{a} = a, b = 1$ ，又 $a^2 = b^2 + c^2$ ，
解得 $a^2 = 2$ ，所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 。

(2) 由题知，直线 PQ 的方程为 $y = kx + 1 - k$ ，

代入 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ，得： $(1 + 2k^2)x^2 - 4k(k - 1)x + 2k(k - 2) = 0$ ，

由已知 $\Delta > 0$ ，

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), x_1x_2 \neq 0$ ，

则 $x_1 + x_2 = \frac{4k(k - 1)}{1 + 2k^2}, x_1x_2 = \frac{2k(k - 2)}{1 + 2k^2}$ ，

从而 $k_1 + k_2 = \frac{y_1 + 1}{x_1} + \frac{y_2 + 1}{x_2} = \frac{kx_1 + 2 - k}{x_1} + \frac{kx_2 + 2 - k}{x_2}$
 $= 2k - (k - 2)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = 2k - (k - 2)\frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}$
 $= 2k - (k - 2)\frac{4k(k - 1)}{2k(k - 2)} = 2k - 2(k - 1) = 2 = a^2$ 。

【标注】【知识点】定值问题（证明、探究）；直线和椭圆的位置关系

备注：2018-2019学年天津南开区高二上学期期末第20题16分

12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(0, \sqrt{2})$ 且满足 $a + b = 3\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 若斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线与椭圆 C 交于两个不同的点 A, B , 点 M 坐标为 $(2, 1)$, 设直线 MA 与 MB 的斜率分别为 k_1, k_2 , 试问 $k_1 + k_2$ 是否为定值? 并说明理由.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) $k_1 + k_2$ 为定值0, 证明见解析.

【解析】 (1) 由题意可得 $b = \sqrt{2}$,

又 $a + b = 3\sqrt{2}$, 解得 $a = 2\sqrt{2}$,

则椭圆的方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 设直线在 y 轴上的截距为 m ,

$\therefore$ 直线的方程为 $y = \frac{1}{2}x + m$,

$$\text{由} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + m \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases},$$

得 $x^2 + 2mx + 2m^2 - 4 = 0$,

当 $\Delta = 4m^2 - 8m^2 + 16 > 0$,

即 $-2 < m < 2$ 时, 直线与椭圆交于两点,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

则 $x_1 + x_2 = -2m, x_1 \cdot x_2 = 2m^2 - 4$,

又 $k_1 = \frac{y_1 - 1}{x_1 - 2}, k_2 = \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2}$,

$$\begin{aligned} \text{故 } k_1 + k_2 &= \frac{y_1 - 1}{x_1 - 2} + \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2} \\ &= \frac{(y_1 - 1)(x_2 - 2) + (y_2 - 1)(x_1 - 2)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}, \end{aligned}$$

又 $y_1 = \frac{1}{2}x_1 + m, y_2 = \frac{1}{2}x_2 + m$,

$\therefore (y_1 - 1)(x_2 - 2) + (y_2 - 1)(x_1 - 2)$

$$= \left(\frac{1}{2}x_1 + m - 1\right)(x_2 - 2) + \left(\frac{1}{2}x_2 + m - 1\right)(x_1 - 2)$$

$$= x_1 \cdot x_2 + (m - 2)(x_1 + x_2) - 4(m - 1)$$

$$= 2m^2 - 4 + (m - 2)(-2m) - 4(m - 1) = 0.$$

故 $k_1 + k_2 = 0$.

【标注】【知识点】定值问题(证明、探究); 直线和椭圆的位置关系

备注: 2020年天津滨海新区大港第一中学高三下学期高考模拟(3月)第19题

3. 巩固练习

13. 已知椭圆 C 经过 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 与 $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{30}}{4}\right)$ 两点.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 过原点且斜率为 $k(k \neq 0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 椭圆 C 上一点 M 满足

$$|MA| = |MB|, \text{ 求证: } \frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2} + \frac{2}{|OM|^2} \text{ 为定值.}$$

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) 将 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 与 $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{30}}{4}\right)$ 两点代入椭圆 C 的方程,

$$\begin{aligned} &\text{得} \begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{\frac{9}{4}}{b^2} = 1 \\ \frac{3}{2a^2} + \frac{30}{16b^2} = 1 \end{cases}, \\ &\text{解得} \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 3 \end{cases}, \end{aligned}$$

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 由 $|MA| = |MB|$, 知 M 在线段 AB 的垂直平分线上, 由椭圆的对称性知,

A, B 关于原点对称,

①若点 A, B 是椭圆的短轴顶点,

则点 M 是椭圆的一个长轴顶点,

$$\begin{aligned} &\text{此时} \frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2} + \frac{2}{|OM|^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{a^2} \\ &= 2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = \frac{7}{6}, \end{aligned}$$

同理若点 AB 是椭圆的长轴顶点, 则点 M 是椭圆的一个短轴顶点,

$$\begin{aligned} &\text{此时} \frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2} + \frac{2}{|OM|^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{b^2} \\ &= 2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = \frac{7}{6}, \end{aligned}$$

②设点 A, B, M 不是椭圆的顶点,

设直线 l 的方程为 $y = kx (k \neq 0)$,

则直线 OM 的方程为 $y = -\frac{1}{k}x$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{由} \begin{cases} y = kx \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases},$$

$$\begin{aligned}
&\text{解得 } x_1^2 = \frac{12}{3+4k^2}, y_1^2 = \frac{12k^2}{3+4k^2}, \\
&\therefore |OA|^2 = |OB|^2 = x_1^2 + y_1^2 = \frac{12(1+k^2)}{3+4k^2}, \\
&\text{同理: } |OM|^2 = \frac{12(1+k^2)}{4+3k^2}, \\
&\therefore \frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OM|^2} + \frac{1}{|OB|^2} \\
&= 2 \times \frac{3+4k^2}{12(1+k^2)} + \frac{2(4+3k^2)}{12(1+k^2)} \\
&= \frac{7}{6}, \\
&\text{综上所述, } \frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2} + \frac{1}{|OM|^2} = \frac{7}{6} \text{ 为定值.}
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系；定值问题（证明、探究）