

直线与椭圆的位置关系2

1. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 右焦点为 $F(1, 0)$.
- (1) 求椭圆 E 的方程.
- (2) 设点 O 为坐标原点, 过点 F 作直线 l 与椭圆 E 交于 M, N 两点, 若 $OM \perp ON$, 求直线 l 的方程.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) $x \pm \frac{\sqrt{2}}{2}y - 1 = 0$.

【解析】 (1) $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ c = 1 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$, 得 $a = \sqrt{2}, b = 1$,
 $\therefore$ 椭圆方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) 依题意, 直线 l 斜率不为 0, 设 l 方程为 $x = my + 1$,

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

联立: $\begin{cases} x = my + 1 \\ x^2 + 2y^2 - 2 = 0 \end{cases}$, 消 x : $(m^2 + 2)y^2 + 2my - 1 = 0$,

$\therefore$ 相交, $\therefore \Delta = 4m^2 + 4(m^2 + 2) > 0, m \in \mathbf{R}$,

$\begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{2m}{m^2+2} \\ y_1 \cdot y_2 = \frac{-1}{m^2+2} \end{cases}$,

$\therefore OM \perp ON$,

$\therefore \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = x_1x_2 + y_1y_2 = 0$,

$\therefore (my_1 + 1)(my_2 + 1) + y_1y_2 = 0$,

$(m^2 + 1)y_1y_2 + m(y_1 + y_2) + 1 = 0$,

$\therefore m^2 = \frac{1}{2}$, 直线 l 方程为 $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1$,

即 $x \pm \frac{\sqrt{2}}{2}y - 1 = 0$.

【标注】【知识点】向量问题; 直线和椭圆的位置关系

2. 证明在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 中, 若直线 l 与椭圆相交于 MN 两点, 点 $P(x_0, y_0)$ 是弦 MN 的中点, 弦 MN 所在的直线 l 的斜率为 k_{MN} , 则 $k_{MN} \cdot \frac{y_0}{x_0} = -\frac{b^2}{a^2}$.

【答案】 证明过程见解析

【解析】 设 M, N 两点的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,

$$\begin{aligned} \text{则有} \begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \dots\dots (1) \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \dots\dots (2) \end{cases} \\ (1) - (2), \text{得} \frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0. \\ \therefore \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1} = -\frac{b^2}{a^2}. \text{又} \because k_{MN} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{2y}{2x} = \frac{y}{x}. \\ \therefore k_{MN} \cdot \frac{y}{x} = -\frac{b^2}{a^2}. \\ \text{同理可证, 在椭圆} \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > b > 0) \text{中, 若直线} l \text{与椭圆相交于} M、N \text{两点, 点} \\ P(x_0, y_0) \text{是弦} MN \text{的中点, 弦} MN \text{所在的直线} l \text{的斜率为} k_{MN}, \text{则} k_{MN} \cdot \frac{y_0}{x_0} = -\frac{a^2}{b^2}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系；定值问题（证明、探究）

3. 在直角坐标平面内，已知点 $A(2, 0)$ ， $B(-2, 0)$ ， P 是平面内一动点，直线 PA ， PB 斜率之积为 $-\frac{3}{4}$

(1) 求动点 P 的轨迹 C 的方程；

(2) 过点 $(\frac{1}{2}, 0)$ 作直线 l 与轨迹 C 交于 E 、 F 两点，线段 EF 的中点为 M ，求直线 MA 的斜率 k 的取值范围。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (x \neq \pm 2)$.
 (2) $-\frac{1}{8} \leq k \leq \frac{1}{8}$.

【解析】 (1) 设 P 点的坐标为 (x, y) ，依题意，有 $\frac{y}{x-2} \cdot \frac{y}{x+2} = -\frac{3}{4} (x \neq \pm 2)$.

化简并整理，得 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (x \neq \pm 2)$.

$\therefore$ 动点 P 的轨迹 C 的方程是 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (x \neq \pm 2)$.

(2) 解法一：依题意，直线 l 过点 $(\frac{1}{2}, 0)$ 且斜率不为零，故可设其方程为 $x = my + \frac{1}{2}$

由方程组 $\begin{cases} x = my + \frac{1}{2} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ ，消去 x ，并整理得 $4(3m^2 + 4)y^2 + 12my - 45 = 0$ ，设

$E(x_1, y_1)$ ， $F(x_2, y_2)$ ， $M(x_0, y_0)$ ，则 $y_1 + y_2 = -\frac{3m}{3m^2 + 4}$ ，

$\therefore y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{3m}{2(3m^2 + 4)}$ ，

$\therefore x_0 = my_0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3m^2}{2(3m^2 + 4)}$ ， $\therefore k = \frac{y_0}{x_0 - 2} = \frac{m}{4m^2 + 4}$ ，

(1) 当 $m = 0$ 时， $k = 0$ ；

(2) 当 $m \neq 0$ 时， $k = \frac{1}{4m + \frac{4}{m}}$ ， $\therefore |4m + \frac{4}{m}| = 4|m| + \frac{4}{|m|} \geq 8$ ，

$\therefore 0 < \frac{1}{|4m + \frac{4}{m}|} \leq \frac{1}{8}$ ， $\therefore 0 < |k| \leq \frac{1}{8}$.

$\therefore -\frac{1}{8} \leq k \leq \frac{1}{8}$ 且 $k \neq 0$. 综合 (1)、(2) 可知直线 MA 的斜率 k 的取值范围是： $-\frac{1}{8} \leq k \leq \frac{1}{8}$.

解法二：依题意，直线 l 过点 $(\frac{1}{2}, 0)$ 且斜率不为零.

(1) 当直线 l 与 x 轴垂直时， M 点的坐标为 $(\frac{1}{2}, 0)$ ，此时， $k = 0$ ；

(2) 当直线 l 的斜率存在且不为零时，设直线 l 方程为 $y = m(x - \frac{1}{2})$ ，

由方程组 $\begin{cases} y = m(x - \frac{1}{2}) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ ，消去 y ，并整理得

$$(3 + 4m^2)x^2 - 4m^2x + m^2 - 12 = 0,$$

设 $E(x_1, y_1), F(x_2, y_2), M(x_0, y_0)$ ，则 $x_1 + x_2 = \frac{4m^2}{3 + 4m^2}$ ，

$$\therefore x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2m^2}{3 + 4m^2}, \therefore y_0 = m(x_0 - \frac{1}{2}) = -\frac{3m}{2(3 + 4m^2)},$$

$$\therefore k = \frac{y_0}{x_0 - \frac{1}{2}} = \frac{m}{4m^2 + 4} = \frac{1}{4(m + \frac{1}{m})} (m \neq 0),$$

$$\therefore |m + \frac{1}{m}| = |m| + \frac{1}{|m|} \geq 2, \therefore 0 < |k| \leq \frac{1}{8}.$$

$$\therefore -\frac{1}{8} \leq k \leq \frac{1}{8} \text{ 且 } k \neq 0.$$

综合 (1)、(2) 可知直线 MA 的斜率 k 的取值范围是： $-\frac{1}{8} \leq k \leq \frac{1}{8}$.

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系；椭圆的标准方程

4. 设 A, B 的坐标分别为 $(-2, 0)$ 和 $(2, 0)$ ，直线 AM, BM 相交于点 M ，且它们的斜率之积是 $-\frac{3}{4}$.

(1) 求点 M 的轨迹 C 的方程.

(2) 过 $F(1, 0)$ 作直线 l 交曲线 C 于 P, Q 两点.

① 求证： $\frac{1}{|FP|} + \frac{1}{|FQ|}$ 为定值.

② 若 $\overrightarrow{PF} = 2\overrightarrow{FQ}$ ，求直线 l 的方程.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (x \neq \pm 2)$.

(2) ① 证明见解析.

$$\text{② } y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}(x - 1).$$

【解析】 (1) 由题可知，

设 $M(x, y)$ ，则由直线 AM 与直线 BM 的斜率之积为 $-\frac{3}{4}$ ，

$$\text{则 } \frac{y-0}{x+2} \cdot \frac{y-0}{x-2} = -\frac{3}{4} (x \neq \pm 2),$$

$$\text{整理即可知, } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (x \neq \pm 2),$$

可知其 M 点的轨迹为椭圆 (除去长轴两个端点)，

则 M 点的轨迹方程为: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (x \neq \pm 2)$.

(2) ① 由题可知: $F(1, 0)$ 为椭圆的右焦点, 则

1. 当直线斜率不存在时, 由 $|PF| = |FQ| = \frac{b^2}{a} = \frac{3}{2}$,

故 $\frac{1}{|PF|} + \frac{1}{|FQ|} = \frac{a}{b^2} + \frac{a}{b^2} = \frac{2a}{b^2} = \frac{4}{3}$;

2. 当直线的斜率存在时, 且设直线 l 的方程为: $y - 0 = k(x - 1)$,

联立方程 $\begin{cases} y = kx - k \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 消去 y , 整理可得,

$$(3 + 4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0,$$

$$\text{由 } \Delta = 64k^4 - 4 \times 36(k^2 + 1) = 144(k^2 + 1) > 0,$$

故设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, 则由根与系数的关系,

$$\text{可知 } x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{3 + 4k^2}, \quad x_1x_2 = \frac{4k^2 - 12}{3 + 4k^2},$$

$$\text{由 } \frac{1}{|PF|} + \frac{1}{|FQ|} = \frac{|FQ| + |PF|}{|PF||FQ|} = \frac{|PQ|}{|PF||FQ|},$$

$$\text{由 } |PQ| = \sqrt{1 + k^2}|x_1 - x_2| = \sqrt{1 + k^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$$

$$= \sqrt{1 + k^2} \sqrt{\left(\frac{8k^2}{3 + 4k^2}\right)^2 - \frac{4(4k^2 - 12)}{3 + 4k^2}} = \frac{12(k^2 + 1)}{3 + 4k^2},$$

$$\text{又由 } |FQ||FP| = \frac{\vec{FP} \cdot \vec{FQ}}{\cos \langle \vec{FP}, \vec{FQ} \rangle},$$

易知 $\vec{FP}$ 与 $\vec{FQ}$ 之间夹角为 π ,

$$\text{则 } |FQ||FP| = -\vec{FP} \cdot \vec{FQ} = -[(x_1 - 1)(x_2 - 1) + y_1y_2]$$

$$= -[(x_1 - 1)(x_2 - 1) + k^2(x_1 - 1)(x_2 - 1)]$$

$$= -(k^2 + 1)[x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1]$$

$$= -(k^2 + 1) \left(\frac{4k^2 - 12}{3 + 4k^2} - \frac{8k^2}{3 + 4k^2} + \frac{3 + 4k^2}{3 + 4k^2} \right)$$

$$= \frac{9(k^2 + 1)}{3 + 4k^2},$$

$$\text{故 } \frac{1}{|FQ|} + \frac{1}{|FP|} = \frac{|PQ|}{|FP||FQ|} = \frac{\frac{12(k^2 + 1)}{3 + 4k^2}}{\frac{9(k^2 + 1)}{3 + 4k^2}} = \frac{4}{3},$$

故 $\frac{1}{|FQ|} + \frac{1}{|FP|} = \frac{4}{3}$ 恒为定值.

② 由 $\vec{PF} = 2\vec{FQ}$, 由①知 $F(1, 0)$, $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$,

$$\text{由根与系数关系可知 } x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{3 + 4k^2}, \quad x_1x_2 = \frac{4k^2 - 12}{3 + 4k^2},$$

$$\vec{PF} = (1 - x_1, -y_1), \quad \vec{FQ} = (x_2 - 1, y_2),$$

$$\text{则由 } \vec{PF} = 2\vec{FQ}, \text{ 即可得 } \begin{cases} 1 - x_1 = 2(x_2 - 1) \\ -y_1 = 2y_2 \end{cases},$$

$$\text{由此可解得 } x_2 = 3 - (x_1 + x_2) = 3 - \frac{8k^2}{3+4k^2} = \frac{4k^2+9}{3+4k^2},$$

$$\begin{aligned} y_2 &= -(y_1 + y_2) = -[k(x_1 - 1) + k(x_2 - 1)] \\ &= -[k(x_1 + x_2) - 2k] = 2k - \frac{8k^3}{3+4k^2} = \frac{6k}{3+4k^2}, \end{aligned}$$

又由 $Q(x_2, y_2)$ 在椭圆上, 则满足椭圆方程,

$$\begin{aligned} \text{即 } \frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{3} &= 1, \\ \text{即 } \frac{\left(\frac{4k^2+9}{3+4k^2}\right)^2}{4} + \frac{\left(\frac{6k}{3+4k^2}\right)^2}{3} &= \frac{(4k^2+9)^2 + 48k^2}{4(4k^2+3)^2} = 1, \end{aligned}$$

$$\text{即由此可整理得 } 16k^4 - 8k^2 - 15 = 0,$$

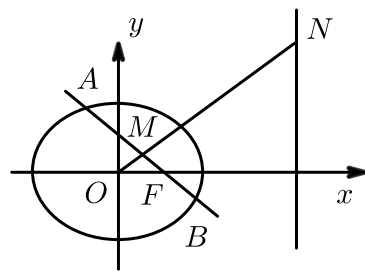
$$\text{则由此可解得 } k^2 = \frac{5}{4} \quad (k^2 = -\frac{3}{4} \text{ 故应舍去}),$$

$$\text{即 } k = \pm \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\text{故直线 } l \text{ 的方程为 } y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}(x-1).$$

【标注】【知识点】向量问题；定值问题（证明、探究）

5. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点 $F(1, 0)$, 右准线 $l: x = 4$. 圆 $C_2: x^2 + y^2 = b^2$. A, B 为椭圆上不同的两点, AB 中点为 M .



- (1) 求椭圆 C_1 的方程.
 (2) 若直线 AB 过 F 点, 直线 OM 交 l 于 N 点, 求证: $NF \perp AB$.
 (3) 若直线 AB 与圆 C_2 相切, 求原点 O 到 AB 中垂线的最大距离.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 证明见解析.

(3) $\frac{1}{4}$.

【解析】 (1) 依题准线 $l: x = \frac{a^2}{c} = 4$, 而右焦点 $F(1, 0)$,

$$\text{所以 } c = 1, \text{ 所以 } a^2 = 4, \text{ 所以 } a = 2, b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3},$$

所以椭圆 C_1 的方程为： $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 若直线 AB 过 F 点，直线 OM 交 l 于 N 点，

则可设直线 AB 方程为： $x = my + 1$ ，

$A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，则 $m\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ ，

则此时联立方程： $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ x = my + 1 \end{cases}$ ，

得： $(3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0$ ，

所以由根与系数的关系知，

$$y_1 + y_2 = \frac{-6m}{3m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{-9}{3m^2 + 4},$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = m(y_1 + y_2) + 2 = \frac{-6m^2}{3m^2 + 4} + 2 = \frac{8}{3m^2 + 4},$$

$$\text{所以点 } M\left(\frac{4}{3m^2 + 4}, \frac{-3m}{3m^2 + 4}\right),$$

所以直线 OM ： $y = -\frac{3}{4}mx$ ，令 $x = 4$ ，则 $y = -3m$ 而 $F(1, 0)$ ，

$N(4, -3m)$ 所以直线 NF 斜率为： $\frac{3m}{-3} = -m$ ，

而直线 AB 斜率为： $\frac{1}{m}$ ，所以 $-m \cdot \frac{1}{m} = -1$ ，

所以 $NF \perp AB$ ，得证。

(3) 若直线 AB 与 $\odot C_2$ 相切，设直线 AB 的方程为 $y = kx + t$ ，

$A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ 因为 $\odot C_2$ 与直线 AB 相切，

$$\text{所以 } \frac{|t|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{3} = 7, 3k^2 + 3 = t^2,$$

$$\text{联立 } AB \text{ 与椭圆 } C_1 \text{ 的方程得： } \begin{cases} y = kx + t \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases},$$

$$\text{化简得： } (4k^2 + 3)x^2 + 8ktx + 4t^2 - 12 = 0,$$

$$\Delta = 64k^2t^2 - 4(4t^2 - 12)(4k^2 + 3) > 0,$$

$$\text{得 } 4k^2 > t^2 - 3,$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-8kt}{4k^2 + 3}, x_1 x_2 = \frac{4t^2 - 12}{4k^2 + 3},$$

$$\text{所以 } y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2t = \frac{6t}{4k^2 + 3},$$

$$\text{所以 } M\left(\frac{-4kt}{4k^2 + 3}, \frac{3t}{4k^2 + 3}\right), \text{ 而 } k_{AB} = k, k_{\text{中垂线}} = -\frac{1}{k},$$

$$\text{所以 } AB \text{ 中垂线方程为： } y = -\frac{1}{k}\left(x + \frac{4kt}{4k^2 + 3}\right) + \frac{3t}{4k^2 + 3} = -\frac{1}{k}x - \frac{t}{4k^2 + 3},$$

$$\text{所以 } O \text{ 点到该直线的距离 } d = \left| \frac{\frac{kt}{4k^2 + 3}}{\sqrt{k^2 + 1}} \right|, \text{ 而 } 3k^2 + 3 = t^2,$$

$$\text{所以 } \sqrt{k^2 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}t,$$

$$\text{所以 } d = \left| \frac{\sqrt{3}k}{4k^2 + 3} \right| = \left| \frac{\sqrt{3}}{4k + \frac{3}{k}} \right| \leq \left| \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{12}} \right|,$$

$$\text{当且仅当 } k = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 时等号成立且满足 } \Delta > 0,$$

$$\text{所以原点 } O \text{ 到 } AB \text{ 中垂线的最大距离为 } \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系；椭圆的标准方程；中点弦问题；最值问题；定值问题（证明、探究）

6. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，点 $(1, 0)$ 与椭圆短轴的两个端点的连线互相垂直。
- (1) 求椭圆 C 的标准方程；
- (2) 设椭圆 C 与直线 $y = kx + m$ 相交于不同的两点 M, N ，点 $D(0, -1)$ ，当 $|DM| = |DN|$ 时，求实数 m 的取值范围。

【答案】 (1) 椭圆方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 。

(2) $(-1, 2)$

【解析】 (1) 依题意知：

$$\begin{cases} e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 3 \\ b^2 = 1 \end{cases} \text{ 所以，椭圆方程为 } \frac{x^2}{3} + y^2 = 1.$$

$$\frac{b-0}{0-1} \cdot \frac{-b-0}{0-1} = -1 \Rightarrow c^2 = 2$$

(2) (1) 当 $k \neq 0$ ，设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \\ y = kx + m \end{cases} \text{ 消 } y \text{ 知：} (3k^2 + 1)x^2 + 6kmx + 3m^2 - 3 = 0$$

$$\therefore \Delta = (6mk)^2 - 12(3k^2 + 1)(m^2 - 1) = 12(3k^2 - m^2 + 1) > 0$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{6km}{3k^2 + 1}, x_1 x_2 = \frac{3(m^2 - 1)}{3k^2 + 1}$$

$$\text{设 } MN \text{ 中点 } E(x_0, y_0), \text{ 则 } x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{3km}{3k^2 + 1}, y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{m}{3k^2 + 1}$$

$$\therefore D(0, -1), \text{ 且 } |DM| = |DN|$$

$$\therefore DE \perp MN \therefore k_{DE} \cdot k = -1$$

$$\therefore k_{DE} = \frac{\frac{m}{3k^2 + 1} + 1}{-\frac{3km}{3k^2 + 1} - 0} = \frac{m + 3k^2 + 1}{-3km} = -\frac{1}{k}$$

$$\therefore 3k^2 + 1 = 2m \geq 1$$

$$\text{由 } \Delta = 12(3k^2 - m^2 + 1) > 0 \text{ 知 } m^2 - 2m < 0 \therefore 0 < m < 2$$

$$\text{则符合条件的实数 } m \text{ 的取值范围是 } \left[\frac{1}{2}, 2 \right).$$

$$k = 0 \text{ 时, } m \in (-1, 1), k \neq 0 \text{ 时, } m \in \left(\frac{1}{2}, 2 \right).$$

$$\therefore m \in (-1, 2).$$

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系；中点弦问题

7. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点是 $F(1, 0)$ ，且离心率为 $\frac{1}{2}$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 设经过点 F 的直线交椭圆 C 于 M, N 两点，线段 MN 的垂直平分线交 y 轴于点 $P(0, y_0)$ ，求 y_0 的取值范围。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.
 (2) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{12}, \frac{\sqrt{3}}{12}\right]$.

【解析】 (1) 设椭圆 C 的半焦距是 c . 依题意，得 $c = 1$.

因为椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，

所以 $a = 2c = 2$ ， $b^2 = a^2 - c^2 = 3$.

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 当 $MN \perp x$ 轴时，显然 $y_0 = 0$.

当 MN 与 x 轴不垂直时，可设直线 MN 的方程为 $y = k(x - 1) (k \neq 0)$.

由 $\begin{cases} y = k(x - 1), \\ 3x^2 + 4y^2 = 12, \end{cases}$ 消去 y 整理得 $(3 + 4k^2)x^2 - 8k^2x + 4(k^2 - 3) = 0$.

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ ，线段 MN 的中点为 $Q(x_3, y_3)$ ，

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{3 + 4k^2} .$$

$$\text{所以 } x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4k^2}{3 + 4k^2}, y_3 = k(x_3 - 1) = \frac{-3k}{3 + 4k^2} .$$

$$\text{线段 } MN \text{ 的垂直平分线方程为 } y + \frac{3k}{3 + 4k^2} = -\frac{1}{k} \left(x - \frac{4k^2}{3 + 4k^2} \right) .$$

$$\text{在上述方程中令 } x = 0, \text{ 得 } y_0 = \frac{1}{3 + 4k^2} = \frac{\frac{3}{k} + 4k}{\frac{3}{k} + 4k} .$$

$$\text{当 } k < 0 \text{ 时, } \frac{3}{k} + 4k \leq -4\sqrt{3}; \text{ 当 } k > 0 \text{ 时, } \frac{3}{k} + 4k \geq 4\sqrt{3} .$$

$$\text{所以 } -\frac{\sqrt{3}}{12} \leq y_0 < 0, \text{ 或 } 0 < y_0 \leq \frac{\sqrt{3}}{12} .$$

$$\text{综上, } y_0 \text{ 的取值范围是 } \left[-\frac{\sqrt{3}}{12}, \frac{\sqrt{3}}{12}\right] .$$

【标注】【知识点】椭圆的定义、标准方程

椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点为 F_1, F_2 , 点 P 在椭圆 C 上, 且 $PF_1 \perp F_1F_2$, 且 $|PF_1| = \frac{4}{3}, |PF_2| = \frac{14}{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 若直线 l 过圆 $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$ 的圆心 M , 交椭圆 C 于 A, B 两点, 且 A, B 关于点 M 对称, 求直线 l 的方程.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

(2) $x + 2y - 4 = 0$.

【解析】 (1) $|F_1F_2|^2 = 20 \therefore |F_1F_2| = 2\sqrt{5} = 2c \Rightarrow c = \sqrt{5}$ 又

$$2a = |PF_1| + |PF_2| = 6 \Rightarrow a = 3$$

$$\text{所以 } C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

(2) 方法一: 设 A, B 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,

$$\text{已知圆的方程为 } (x+2)^2 + (y-1)^2 = 5,$$

$$\therefore \text{圆心 } M \text{ 的坐标为 } y - k(x+2) + 1,$$

$$\text{代入椭圆 } C \text{ 的方程得 } (4+9k^2)x^2 + (36k^2+18k)x + 36k^2+36k-27=0,$$

$\therefore A, B$ 关于点 M 对称,

$$\therefore \frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{18k^2+9k}{4+9k^2} = -2,$$

$$\text{解得 } k = \frac{8}{9},$$

$$\text{所以直线 } l \text{ 的方程为 } y = \frac{8}{9}(x+2) + 1,$$

$$\text{即 } 8x - 9y + 25 = 0.$$

(经检验, 所求直线方程符合题意).

$$\text{方法二: 已知圆的方程为 } (x+2)^2 + (y-1)^2 = 5,$$

所以圆心 M 的坐标为 $(-2, 1)$,

设 A, B 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,

$$\text{由题意 } x_1 \neq x_2 \text{ 且 } \frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 1 \text{ ①, } \frac{x_2^2}{9} + \frac{y_2^2}{4} = 1 \text{ ②,}$$

$$\text{由①②得 } \frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{9} + \frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{4} = 0 \text{ ③,}$$

因为 A, B 关于点 M 对称,

$$\text{所以 } x_1+x_2 = -4, y_1+y_2 = 2,$$

$$\text{代③得 } \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{8}{9},$$

$$\text{即直线 } l \text{ 的斜率为 } \frac{8}{9},$$

$$\text{所以直线 } l \text{ 的方程为 } y-1 = \frac{8}{9}(x+2),$$

$$\text{即 } 8x - 9y + 25 = 0 .$$

(经检验 , 所求直线方程符合题意)

【标注】【知识点】对称问题

9. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 $F(1, 0)$, 点 O 为坐标原点 , A, B 是曲线 C 上异于 O 的两点 .

(1) 求曲线 C 的方程 .

(2) 若直线 OA, OB 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$, 求证 : 直线 AB 过定点 .

【答案】 (1) $y^2 = 4x$.

(2) 证明见解析 .

【解析】 (1) $\because$ 焦点为 $F(1, 0)$, $\therefore p = 2$, $\therefore$ 抛物线方程为 $y^2 = 4x$.

(2) 方法一 : $\because$ 直线 OA, OB 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$

$\therefore$ 设直线 OA 的方程为 $y = kx$; 直线 OB 的方程为 $y = -\frac{1}{2k}x$.

联立 $\begin{cases} y = kx \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 得 $A(\frac{4}{k^2}, \frac{4}{k})$, 同理 $B(16k^2, -8k)$.

由抛物线关于 x 轴对称可知定点在 x 轴上 ,

那么当 A, B 横坐标相同时的横坐标即为定点的横坐标 .

令 $\frac{4}{k^2} = 16k^2$, 解得 $k^2 = \frac{1}{2}$, 则 $\frac{4}{k^2} = 16k^2 = 8$, 点 $M(8, 0)$ 为直线 AB 过的定点 .

下面证明直线 AB 过 M 点

$\therefore \overrightarrow{MA} = (\frac{4}{k^2} - 8, \frac{4}{k})$, $\overrightarrow{MB} = (16k^2 - 8, -8k)$

由 $(\frac{4}{k^2} - 8) \cdot (-8k) = (16k^2 - 8) \cdot \frac{4}{k}$ 可知向量 $\overrightarrow{MA}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 共线 .

$\therefore$ 直线 AB 过定点 M .

方法二 : 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

(1) 若直线 AB 斜率存在 , 设其方程为 $y = kx + b$.

$\begin{cases} y = kx + b \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 即 $k^2x^2 + (2kb - 4)x + b^2 = 0$.

$\therefore x_1x_2 = \frac{b^2}{k^2}$, $y_1y_2 = \frac{4b}{k}$.

$\because$ 直线 OA, OB 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$, 即 $\frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -\frac{1}{2}$,

$\therefore \frac{4k}{b} = -\frac{1}{2}$, 即 $b = -8k$, 代入直线方程 , 得直线 AB 方程为 $y = kx - 8k$.

$\therefore$ 即直线 AB 过定点 $(8, 0)$.

(2) 若直线 AB 斜率不存在 , 则 $x_1 = x_2, y_1 = -y_2$,

由 $\frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -\frac{1}{2}$ 可得 $x_1 = x_2 = 8$,
 $\therefore$ 直线 AB 方程为 $x = 8$, 过定点 $(8, 0)$.
 综上, 直线 AB 过定点 .

【标注】【知识点】抛物线的标准方程；定点问题

10. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点为 A . 四点 $P_1(1, 0)$, $P_2(0, \sqrt{2})$, $P_3(\sqrt{2}, 1)$, $P_4(-\sqrt{2}, -1)$ 恰有三点在椭圆上, 过点 $P_1(1, 0)$ 且与 x 轴不重合的直线 l 与椭圆交于 M , N 两点 .
 (1) 求椭圆 C 的方程 .
 (2) 过点 $P_1(1, 0)$ 且平行于 AM 的直线交直线 $x = \frac{5}{2}$ 于点 Q , 求证: 直线 NQ 过定点 .

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.
 (2) 证明见解析 .

【解析】 (1) 由题设可知:

点 $P_1(1, 0)$, $P_2(0, \sqrt{2})$, $P_3(\sqrt{2}, 1)$, $P_4(-\sqrt{2}, -1)$ 恰有三点在椭圆上, 则 P_3 和 P_4 必在椭圆上, 则 $\frac{2}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$,

可知 $a^2 > 2$, $b^2 > 1$.

则当 P_1 点在椭圆上时, 即 $\frac{1}{a^2} + \frac{0}{b^2} = 1$, 解得 $a^2 = 1 < 2$, 不满足上式, 故舍去, 则

当 $P_2(0, \sqrt{2})$ 必在椭圆上时, 即 $\frac{0}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1$, 解得 $b^2 = 2 > 1$,

满足题设, 故 $a^2 = 4$, $b^2 = 2$.

即椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

故答案为: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

- (2) 方法一: 直线恒过定点 $(2, 0)$, 证明如下:

设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

由题意可知, 设直线 MN 的方程为 $x = my + 1$, 则由

$$\begin{cases} x = my + 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases} \text{ 消去 } x \text{ 得, } (m^2 + 2)y^2 + 2my - 3 = 0 ,$$

显然, $\Delta > 0$, 则由根与系数的关系, 则

$$y_1 + y_2 = \frac{-2m}{m^2 + 2} , y_1 y_2 = \frac{-3}{m^2 + 2} .$$

因为直线 RQ 与 AM 平行, 故 $R_{P_1Q} = R_{AM} = \frac{y_1}{x_1 + 2}$.

则直线 P_1Q 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x - 1)$.

令 $x = \frac{5}{2}$, 则 $y = \frac{\frac{3}{2}y_1}{x_1 + 2} = \frac{3y_1}{2(xy_1 + 3)}$, 即

点 $Q(\frac{5}{2}, \frac{3y_1}{2(my_1 + 3)})$.

$$\text{又由 } R_{NQ} = \frac{y_2 - \frac{3y_1}{2(my_1 + 3)}}{x_2 - \frac{5}{2}} = \frac{2my_1y_2 + 6y_2 - 3y_1}{(my_1 + 3)(2my_2 - 3)}.$$

直线 NQ 方程为:

$$y - y_2 = \frac{2my_1y_2 + 6y_2 - 3y_1}{2m^2y_1y_2 + 6my_2 - 3my_1 - 9}(x - x_2).$$

$$\text{即 } y = \frac{2my_1y_2 + 6y_2 - 3y_1}{2m^2y_1y_2 + 6my_2 - 3my_1 - 9}x - \frac{(2my_1y_2 + 6y_2 - 3y_1)(my_2 + 1)}{2m^2y_1y_2 + 6my_2 - 3my_1 - 9}$$
$$= \frac{2my_1y_2 + 6y_2 - 3y_1}{2m^2y_1y_2 + 6my_2 - 3my_1 - 9}x - \frac{2m^2y_1y_2 + 6my_2 - 3my_1 - 9}{2m^2y_1y_2 + 6my_2 - 3my_1 - 9}$$

$$\text{令 } y = 0, \text{ 得 } x = \frac{2my_1y_2 + 15y_2 - 3y_1}{2my_1y_2 + 6y_2 - 3y_1}.$$

$$\text{又由 } 2my_1y_2 = 3(y_1 + y_2), \text{ 故 } x = \frac{18y_2}{9y_2} = 2.$$

故直线 NQ 恒过定点 $(2, 0)$.

方法二: 点 $Q(\frac{5}{2}, \frac{3y_1}{2(my_1 + 3)})$.

又由

$$R_{NQ} = \frac{y_2 - \frac{3y_1}{2(my_1 + 3)}}{x - \frac{5}{2}} = \frac{2my_1y_2 + 6y_2 - 3y_1}{(my_1 + 3)(2my_2 - 3)} = \frac{2my_1y_2 + 6y_2 - 3y_1}{2m^2y_1y_2 + 6my_2 - 3my_1 - 9}$$

$$\text{又由 } y_1 + y_2 = \frac{-2m}{m^2 + 2}, y_1y_2 = \frac{-3}{m^2 + 2}.$$

故 $2my_1y_2 = 3(y_1 + y_2)$, 代入 R_{NQ} 中, 即可化简为

$$R_{NQ} = \frac{3y_1 + 3y_2 + 6y_2 - 3y_1}{3m(y_1 + y_2) + 6my_2 - 3my_1 - 9} = \frac{9y_2}{9(my_2 - 1)} = \frac{y_2}{my_2 - 1}.$$

故直线 NQ 的方程为:

$$y - y_2 = R_{NQ}(x - x_2) = \frac{y_2}{my_2 - 1}(x - x_2).$$

$$\text{即令 } y = 0, \text{ 则 } -y_2(my_2 - 1) = y_2(x - x_2).$$

$$\text{即 } -my_2^2 + y_2 = y_2x - y_2(my_2 + 1).$$

解得 $x = 2$.

故直线 NQ 过定点 $(2, 0)$.

【标注】【知识点】定点问题; 椭圆的标准方程; 直线和椭圆的位置关系