

直线与椭圆的位置关系2

一、中点弦问题

直线被椭圆所截得的弦 AB 的中点我们称之为弦中点，与弦中点有关的系列问题叫做中点弦问题。

弦中点的求法：设直线 $y = kx + m$ 与椭圆得两个交点坐标分别为 $A(x_1, y_1)B(x_2, y_2)$ ，则弦 AB 的中点 Q 的坐标为 $(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$ ，其中 $\frac{y_1 + y_2}{2} = k(\frac{x_1 + x_2}{2}) + m$ 。

1. 中点弦常见题型

- ①已知圆锥曲线内一点 P ，求过定点 P 且以 P 为中点的弦所在直线的方程；
- ②利用已知条件求弦的中点；
- ③求线段的垂直平分线；
- ④对称问题。

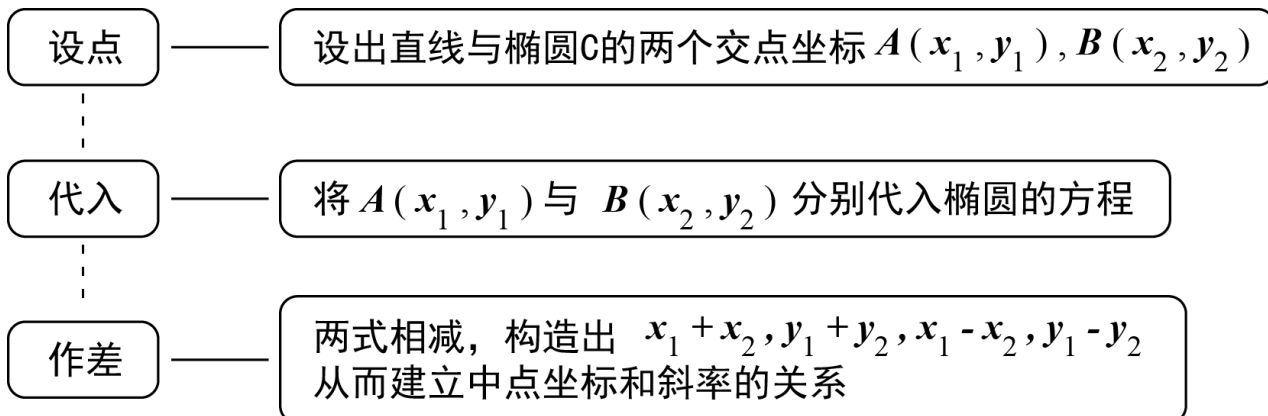
2. 中点弦常见解题方法

根与系数的关系法

将直线方程代入圆锥曲线的方程，消元后得到一个一元方程，若为一元二次方程，则利用根与系数的关系和中点坐标公式建立等式求解它有一个固定的模式，即设交点坐标为 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ ，联立直线方程和曲线方程，消元得出一个一元方程(必要时对二次项的系数加以讨论)，二次项系数不为0时，得出 $x_1 + x_2, x_1x_2$ (或 $y_1 + y_2, y_1y_2$)及 $\Delta > 0$ ，然后再根据题设条件求解。

点差法

(1)点差法的“三步曲”



(2)点差法的结论(设弦 AB 的中点为 P)

①当椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 时, $k_{AB} \cdot k_{OP} = -\frac{b^2}{a^2}$;

②当椭圆方程为 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 时, $k_{AB} \cdot k_{OP} = -\frac{a^2}{b^2}$.

1. 已知椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的弦 AB 的中点 M 的坐标为 $(2, 1)$, 求直线 AB 的方程.

【答案】 $x + 2y - 4 = 0$.

【解析】 方法一: 易知直线 AB 的斜率存在, 设直线 AB 的方程为 $y - 1 = k(x - 2)$,

$$\text{由} \begin{cases} y - 1 = k(x - 2) \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}, \text{得}$$

$$(4k^2 + 1)x^2 - 8(2k^2 - k)x + 4(2k - 1)^2 - 16 = 0.$$

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 x_1, x_2 是上述方程的两根,

$$\text{于是 } x_1 + x_2 = \frac{8(2k^2 - k)}{4k^2 + 1}.$$

又 M 为 AB 的中点,

$$\therefore \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4(2k^2 - k)}{4k^2 + 1} = 2,$$

$$\text{解得 } k = -\frac{1}{2}, \text{ 其满足 } \Delta > 0,$$

故所求直线的方程为 $x + 2y - 4 = 0$.

方法二: 易知直线 AB 的斜率存在,

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

$\because M(2, 1)$ 为 AB 的中点,

$$\therefore x_1 + x_2 = 4, y_1 + y_2 = 2.$$

又 A, B 两点在椭圆上,

$$\text{则 } x_1^2 + 4y_1^2 = 16, x_2^2 + 4y_2^2 = 16,$$

$$\text{两式相减, 得 } (x_1^2 - x_2^2) + 4(y_1^2 - y_2^2) = 0,$$

$$\text{于是 } (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + 4(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0.$$

$$\therefore \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{x_1 + x_2}{4(y_1 + y_2)} = -\frac{4}{4 \times 2} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{即 } k_{AB} = -\frac{1}{2}.$$

故所求直线的方程为 $x + 2y - 4 = 0$.

方法三: 设 $A(x, y)$, 由于 AB 的中点为 $M(2, 1)$,

所以 $B(4 - x, 2 - y)$.

$\because A, B$ 两点都在椭圆上,

$$\therefore \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 16 \text{ ①} \\ (4 - x)^2 + 4(2 - y)^2 = 16 \text{ ②} \end{cases}.$$

①-②, 得 $x + 2y - 4 = 0$.

显然, A 点的坐标满足这个方程. 代入验证可知 B 点的坐标也满足这个方程, 而过 A, B 的直线只有一条, 故所求直线的方程为 $x + 2y - 4 = 0$.

【标注】【知识点】中点弦问题; 直线和椭圆的位置关系; 直线的点斜式方程; 中点公式

2. 已知椭圆与双曲线 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$ 的焦点相同, 且它们的离心率之和等于 $\frac{14}{5}$.

(1) 求椭圆方程.

(2) 过椭圆内一点 $M(1, 1)$ 作一条弦 AB , 使该弦被点 M 平分, 求弦 AB 所在直线方程.

【答案】 (1) $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$.

(2) $25x + 9y - 34 = 0$.

【解析】 (1) 双曲线 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$ 的焦点为 $(0, 4), (0, -4)$,
离心率为 $\frac{4}{2} = 2$,

则椭圆的方程为 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$,

且离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{14}{5} - 2 = \frac{4}{5}$,

由于 $c = 4$, 则 $a = 5, b = \sqrt{a^2 - c^2} = 3$,

则椭圆方程为 $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$.

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

则 $x_1 + x_2 = 2, y_1 + y_2 = 2$,

$\frac{y_1^2}{25} + \frac{x_1^2}{9} = 1, \frac{y_2^2}{25} + \frac{x_2^2}{9} = 1$,

两式相减可得, $\frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{25} + \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{9} = 0$,

即有 $k_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{25}{9}$,

则直线 AB 所在方程为 $y - 1 = -\frac{25}{9}(x - 1)$,

由于 M 在椭圆内, 则弦 AB 存在,

则所求直线 AB 的方程为: $25x + 9y - 34 = 0$.

【标注】【知识点】椭圆的标准方程; 直线和椭圆的位置关系; 中点弦问题

3. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴长是短轴长的 $\sqrt{2}$ 倍, 且椭圆过点 $A(0, -2)$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 若直线 l 与椭圆相交于 M, N 两点, 且线段 MN 的中点为 $E(-2, 1)$, 求直线 l 的方程.

【答案】(1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) $y = x + 3$

【解析】(1) 由题得 $a = \sqrt{2}b$, $b = 2 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$, $b = 2 \Rightarrow C: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = -4$, $y_1 + y_2 = 2$,

由 $\begin{cases} x_1^2 + 2y_1^2 = 8 \\ x_2^2 + 2y_2^2 = 8 \end{cases}$, 两式相减, 得 $(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + 2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0$,

于是 $-4(x_1 - x_2) + 4(y_1 - y_2) = 0 \Rightarrow k_l = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} = 1$,

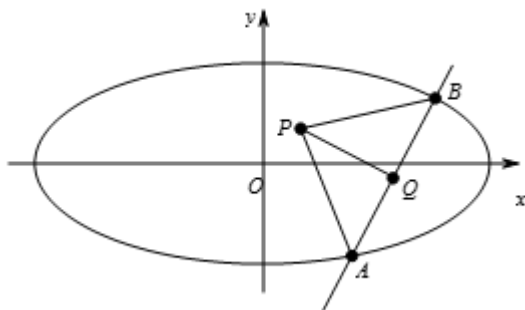
故 $l: y - 1 = 1(x + 2)$, 即 $l: y = x + 3$,

因为点 $E(-2, 1)$ 在椭圆内部, 所以所求的直线 $l: y = x + 3$ 满足题意.

【标注】【知识点】椭圆的标准方程; 直线和椭圆的位置关系; 中点弦问题

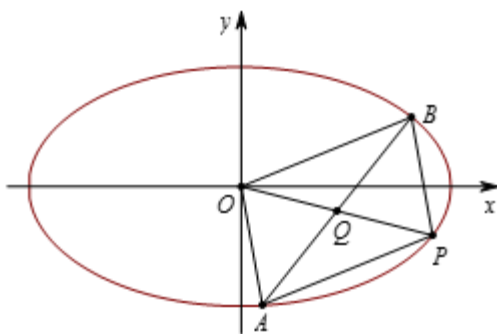
3. 中点弦相关模型

🔗 等腰三角形型



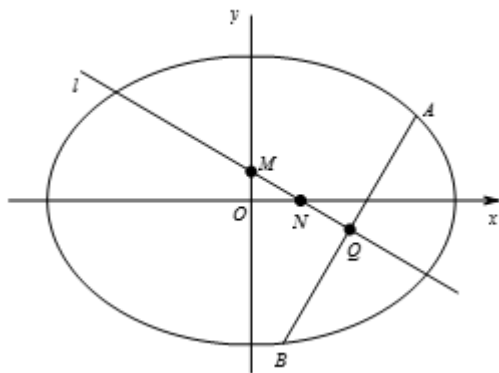
解题思路: $|PB| = |PA| \Leftrightarrow PQ \perp AB \Leftrightarrow k_{PQ} = -\frac{1}{k_{AB}}$.

🔗 平行四边形型



解题思路: 由以 OA, OB 为邻边的平行四边形的顶点 P 在椭圆上,

得 $x_P = 2x_Q = x_1 + x_2$, $y_P = 2y_Q = y_1 + y_2$, 然后再把 P 点坐标代入到椭圆方程中.



解题思路：中点 Q 的坐标为 (x_Q, y_Q) ，垂直平分线方程为 $y - y_Q = -\frac{1}{k}(x - x_Q)$ ，
令 $x = 0$ ，得到 M 点坐标，令 $y = 0$ ，得到 N 点坐标。

4. 已知椭圆 $G: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $A\left(1, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 和点 $B(0, -1)$ 。

(1) 求椭圆 G 的方程；

(2) 设过点 $P\left(0, \frac{3}{2}\right)$ 的直线 l 与椭圆 G 交于 M, N 两点，且 $|BM| = |BN|$ ，求直线 l 的方程。

【答案】 (1) 椭圆 G 的方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 。

(2) 直线 l 的方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}x + \frac{3}{2}$ 。

【解析】 (1) 因为椭圆 $G: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $A\left(1, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 和点 $B(0, -1)$ 。

所以 $b = 1$ ，由 $\frac{1}{a^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}{1} = 1$ ，得 $a^2 = 3$ 。

所以椭圆 G 的方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 。

(2) 显然直线 l 的斜率 k 存在，且 $k \neq 0$ 。

设直线 l 的方程为 $y = kx + \frac{3}{2}$ 。

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \\ y = kx + \frac{3}{2} \end{cases}$ 消去 y 并整理得 $\left(k^2 + \frac{1}{3}\right)x^2 + 3kx + \frac{5}{4} = 0$ ，

由 $\Delta = 9k^2 - 5\left(k^2 + \frac{1}{3}\right) > 0$ ， $k^2 > \frac{5}{12}$ 。

设 $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ， MN 中点为 $Q(x_0, y_0)$ ，

得 $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{9k}{6k^2 + 2}$ ， $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{3}{6k^2 + 2}$ 。

由 $|BM| = |BN|$ ，知 $BQ \perp MN$ ，

所以 $\frac{y_0 + 1}{x_0} = -\frac{1}{k}$ ，即 $\frac{\frac{3}{6k^2 + 2} + 1}{-\frac{9k}{6k^2 + 2}} = -\frac{1}{k}$ 。

化简得 $k^2 = \frac{2}{3}$, 满足 $\Delta > 0$.

所以 $k = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$.

因此直线 l 的方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}x + \frac{3}{2}$.

【标注】【知识点】角度问题；直线和椭圆的位置关系

5. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$, 其焦点为 F , O 为坐标原点 , 直线 AB (不垂直于 x 轴) , 过点 F 且抛物线 C 交于 A, B 两点 , 直线 OA 与 OB 的斜率之积为 $-p$.

(1) 求抛物线 C 的方程 .

(2) 若 M 为线段 AB 的中点 , 射线 OM 交抛物线 C 于点 D , 求证 : $\frac{|OD|}{|OM|} > 2$.

【答案】 (1) $C: y^2 = 8x$.

(2) $\frac{|OD|}{|OM|} > 2$.

【解析】 (1) 因为直线 AB 过点 F 且与抛物线 C 交于两 A, B 点 , $F(\frac{p}{2}, 0)$.

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 直线 AB (不垂直于 x 轴) 的方程可设为

$$y = k(x - \frac{p}{2}) (k \neq 0) .$$

$$\text{所以 } y_1^2 = 2px_1, y_2^2 = 2px_2 (p > 0) .$$

因为直线 OA 与 OB 的斜率之积为 $-p$.

$$\text{所以 } \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = -p .$$

$$\text{所以 } (\frac{y_1 y_2}{x_1 x_2})^2 = p^2, \text{ 得 } x_1 x_2 = 4 .$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = k(x - \frac{p}{2}) \\ y^2 = 2px \end{cases}, \text{ 消 } y \text{ 得 } k^2 x^2 - (k^2 p + 2p)x + \frac{k^2 p^2}{4} = 0 .$$

$$\text{其中 } \Delta = (k^2 p + 2p)^2 - k^2 p^2 k^2 > 0 .$$

$$\text{所以 } x_1 x_2 = \frac{p^2}{4}, x_1 + x_2 = \frac{k^2 p + 2p}{k^2} .$$

$$\text{所以 } p = 4, \text{ 抛物线 } C: y^2 = 8x .$$

(2) 设 $M(x_0, y_0)$, $D(x_3, y_3)$, 因为 M 为线段 AB 的中点 ,

$$\text{所以 } x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{k^2 p + 2p}{2k^2} = \frac{2(k^2 + 2)}{k^2}, y_0 = k(x_0 - 2) = \frac{4}{k}$$

$$\text{所以直线 } OD \text{ 的斜率为 } k_{OD} = \frac{y_0}{x_0} = \frac{2k}{k^2 + 2} .$$

$$\text{直线 } OD \text{ 的方程为 } y = k_{OD}x = \frac{2k}{k^2 + 2}x \text{ 代入抛物线 } C: y^2 = 8x \text{ 的方程 ,}$$

$$\text{得 } x_3 = \frac{2(k^2 + 2)^2}{k^2} .$$

$$\text{所以 } \frac{x_3}{x_0} = k^2 + 2 .$$

因为 $k^2 > 0$

$$\text{所以 } \frac{|OD|}{|OM|} = \frac{x_3}{x_0} = k^2 + 2 > 2.$$

【标注】【知识点】中点弦问题；抛物线的标准方程；直线和抛物线的位置关系

6. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，以椭圆的一个短轴端点及两个焦点为顶点的三角形的面积为 $\sqrt{3}$ ，已知点 $A(a, 0)$ ， $B(-a, 0)$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 过点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 作直线 l 与椭圆 C 交于 E, F 两点，线段 EF 的中点为 M ，求直线 MA 的斜率 k 的取值范围。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。

(2) $-\frac{1}{8} \leq k \leq \frac{1}{8}$ 。

【解析】 (1) $\because$ 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，

以椭圆的一个短轴端点及两个焦点为顶点的三角形的面积为 $\sqrt{3}$ ，

$$\text{可得: } \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \times 2c \times b = \sqrt{3}, a^2 - b^2 = c^2,$$

$$\text{解得 } a = 2, b = \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为: } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 依题意，直线 l 过点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 且斜率不为零，故可设其方程为 $x = my + \frac{1}{2}$ ，

$$\text{联立方程组消去 } x, \text{ 并整理得 } 4(3m^2 + 4)y^2 + 12my - 45 = 0,$$

设 $E(x_1, y_1)$ ， $F(x_2, y_2)$ ， $M(x_0, y_0)$ ，则：

$$\therefore y_1 + y_2 = -\frac{-3m}{3m^2 + 4},$$

$$\therefore y_0 = -\frac{3m}{2(3m^2 + 4)}, x_0 = \frac{2}{3m^2 + 4},$$

$$\therefore k = \frac{m}{4m^2 + 4},$$

①当 $m = 0$ 时， $k = 0$ ；

$$\text{②当 } m \neq 0 \text{ 时, } k = \frac{1}{4m + \frac{4}{m}},$$

$$\therefore \left| 4m + \frac{4}{m} \right| = 4|m| + \frac{4}{|m|} \geq 8,$$

$$\therefore 0 < |k| \leq \frac{1}{8},$$

$$\therefore -\frac{1}{8} \leq k \leq \frac{1}{8} \text{ 且 } k \neq 0.$$

综合①②可知直线 MA 的斜率 k 的取值范围是： $-\frac{1}{8} \leq k \leq \frac{1}{8}$ 。

【标注】【知识点】椭圆的基本量求解；中点弦问题

7. 已知菱形 $ABCD$ 的顶点 A, C 在椭圆 $x^2 + 3y^2 = 4$ 上，对角线 BD 所在直线的斜率为1.

(1) 当直线 BD 过点 $(0, 1)$ 时，求直线 AC 的方程.

(2) 当 $\angle ABC = 60^\circ$ 时，求菱形 $ABCD$ 面积的最大值.

【答案】(1) $x + y + 2 = 0$.

(2) $4\sqrt{3}$.

【解析】(1) 由题意得直线 BD 的方程为 $y = x + 1$.

因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $AC \perp BD$.

于是可设直线 AC 的方程为 $y = -x + n$. 由 $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 4 \\ y = -x + n \end{cases}$ 得

$$4x^2 - 6nx + 3n^2 - 4 = 0.$$

因为 AC 在椭圆上，所以 $\Delta = -12n^2 + 64 > 0$ ，解得 $-\frac{4\sqrt{3}}{3} < n < \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

设 AC 两点坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ，则 $x_1 + x_2 = \frac{3n}{2}$ ， $x_1x_2 = \frac{3n^2 - 4}{4}$ ，

$y_1 = -x_1 + n$ ， $y_2 = -x_2 + n$. 所以 $y_1 + y_2 = \frac{n}{2}$.

所以 AC 的中点坐标为 $(\frac{3n}{4}, \frac{n}{4})$.

由四边形 $ABCD$ 为菱形可知，点 $(\frac{3n}{4}, \frac{n}{4})$ 在直线 $y = x + 1$ 上，

所以 $\frac{n}{4} = \frac{3n}{4} + 1$ ，解得 $n = -2$.

所以直线 AC 的方程为 $y = -x - 2$ ，即 $x + y + 2 = 0$.

(2) 因为四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $\angle ABC = 60^\circ$ ，所以 $|AB| = |BC| = |CA|$.

所以菱形 $ABCD$ 的面积 $S = \frac{\sqrt{3}}{2} |AC|^2$.

由(I)可得 $|AC|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \frac{-3n^2 + 16}{2}$ ，

所以 $S = \frac{\sqrt{3}}{4} (-3n^2 + 16) \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3} < n < \frac{4\sqrt{3}}{3} \right)$.

所以当 $n = 0$ 时，菱形 $ABCD$ 的面积取得最大值 $4\sqrt{3}$.

【标注】【知识点】最值问题；中点弦问题；直线和椭圆的位置关系

8. 已知椭圆 C 以坐标轴为对称轴，以坐标原点为对称中心，椭圆的一个焦点为 $F(1, 0)$ ，点

$M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 在椭圆上，

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2)

斜率为 k 的直线 l 过点 F 且不与坐标轴垂直, 直线 l 交椭圆于 A 、 B 两点, 线段 AB 的垂直平分线与 x 轴交于点 G , 求点 G 横坐标的取值范围.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) $0 < x_G < \frac{1}{3}$.

【解析】 (1) 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$,

$$\text{则} \begin{cases} a^2 - b^2 = 1(1) \\ \frac{3}{4a^2} + \frac{3}{2b^2} = 1(2) \end{cases}$$

由(2)得 $6a^2 + 3b^2 = 4a^2b^2(3)$

由(1)得 $b^2 = a^2 - 1$ 代入(3)得 $6a^2 + 3(a^2 - 1) = 4a^2(a^2 - 1)$,

即 $4a^4 - 13a^2 + 3 = 0$, 即 $(4a^2 - 1)(a^2 - 3) = 0$, 或 $a^2 = \frac{1}{4}$

$\because a^2 > 1, \therefore a^2 = 3$, 得 $a = \sqrt{3}$,

$\therefore b^2 = 2, b = \sqrt{2}$,

$\therefore$ 椭圆方程为 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 方法一: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, AB 中点 $N(x_0, y_0)$,

直线 AB 的方程为 $y = k(x - 1) (k \neq 0)$,

代入 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$, 整理得 $(3k^2 + 2)x^2 - 6k^2x + 3(k^2 - 2) = 0$,

$\therefore$ 直线 AB 过椭圆的左焦点 F , $\therefore$ 方程有两个不等实根,

则 $x_1 + x_2 = \frac{6k^2}{3k^2 + 2}, y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2 - 2) = -\frac{4k}{3k^2 + 2}$,

$\therefore x_0 = \frac{3k^2}{3k^2 + 2}, y_0 = -\frac{2k}{3k^2 + 2}$,

$\therefore AB$ 的垂直平分线 NG 的方程为 $y + \frac{2k}{3k^2 + 2} = -\frac{1}{k} \left(x - \frac{3k^2}{3k^2 + 2} \right)$,

$y = 0$ 时, $x_G = \frac{k^2}{3k^2 + 2} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3(3k^2 + 2)}$,

$\because k \neq 0, \therefore 3(3k^2 + 2) > 6, 0 < \frac{2}{3(3k^2 + 2)} < \frac{1}{3}, 0 < \frac{1}{3} - \frac{2}{3(3k^2 + 2)} < \frac{1}{3}$

$\therefore 0 < x_G < \frac{1}{3}$.

方法二: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, AB 中点 $N(x_0, y_0)$,

由 $\begin{cases} \frac{x_1^2}{3} + \frac{y_1^2}{2} = 1(1) \\ \frac{x_2^2}{3} + \frac{y_2^2}{2} = 1(2) \end{cases}$, (1)-(2) 得 $\frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{3} + \frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{2} = 0$,

斜率 $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{2(x_1 + x_2)}{3(y_1 + y_2)} = -\frac{2x_0}{3y_0}$,

又 $k = \frac{y_0}{x_0 - 1}, \therefore -\frac{2x_0}{3y_0} = \frac{y_0}{x_0 - 1}$,

$\therefore 2x_0(x_0 - 1) = -3y_0^2 < 0$, 得 $0 < x_0 < 1$,

$$\because (x_0, y_0) \text{ 在椭圆内, 即 } \frac{x_0^2}{3} + \frac{y_0^2}{2} < 1,$$

$$\text{将 } y_0^2 = -\frac{2x_0(x_0-1)}{3} \text{ 代入得 } \frac{x_0^2}{3} + \frac{x_0-x_0^2}{3} < 1,$$

$$\text{解得 } x_0 < 3$$

$$\therefore 0 < x_0 < 1,$$

$$\text{则 } AB \text{ 的垂直平分线为 } y - y_0 = \frac{3y_0}{2x_0}(x - x_0), y = 0 \text{ 时, } x = \frac{1}{3}x_0 \in \left(0, \frac{1}{3}\right).$$

【标注】【知识点】中点弦问题；椭圆的基本量求解

9. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 连接椭圆的四个顶点得到的菱形的面积为 4.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设直线 l 与椭圆相交于不同的两点 A, B . 已知点 A 的坐标为 $(-a, 0)$.

① 若 $|AB| = \frac{4\sqrt{2}}{5}$, 求直线 l 的倾斜角;

② 若点 $Q(0, y_0)$ 在线段 AB 的垂直平分线上, 且 $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = 4$. 求 y_0 的值.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$;

(2) ① $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$;

② $y_0 = \pm 2\sqrt{2}$ 或 $y_0 = \pm \frac{2\sqrt{14}}{5}$.

【解析】 (1) 由 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 得 $3a^2 = 4c^2$. 再由 $c^2 = a^2 - b^2$, 解得 $a = 2b$. 由题意可知 $\frac{1}{2} \times 2a \times 2b = 4$, 即 $ab = 2$. 解方程组 $\begin{cases} a = 2b \\ ab = 2 \end{cases}$, 得 $a = 2, b = 1$. 所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) ① 由 (1) 可知点 A 的坐标是 $(-2, 0)$, 设点 B 的坐标为 (x_1, y_1) , 直线 l 的斜率为

k . 则直线 l 的方程为 $y = k(x + 2)$. 于是 A, B 两点的坐标满足方程组 $\begin{cases} y = k(x + 2) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$, 消去 y 并整理, 得 $(1 + 4k^2)x^2 + 16k^2x + (16k^2 - 4) = 0$.

由 $-2x_1 = \frac{16k^2 - 4}{1 + 4k^2}$, 得 $x_1 = \frac{2 - 8k^2}{1 + 4k^2}$. 从而 $y_1 = \frac{4k}{1 + 4k^2}$. 所以

$$|AB| = \sqrt{\left(-2 - \frac{2 - 8k^2}{1 + 4k^2}\right)^2 + \left(\frac{4k}{1 + 4k^2}\right)^2} = \frac{4\sqrt{1 + k^2}}{1 + 4k^2}. \text{ 由}$$

$$|AB| = \frac{4\sqrt{2}}{5}, \text{ 得 } \frac{4\sqrt{1 + k^2}}{1 + 4k^2} = \frac{4\sqrt{2}}{5}. \text{ 整理得 } 32k^4 - 9k^2 - 23 = 0, \text{ 即}$$

$$(k^2 - 1)(32k^2 + 23) = 0, \text{ 解得 } k = \pm 1. \text{ 所以直线 } l \text{ 的倾斜角为 } \frac{\pi}{4} \text{ 或 } \frac{3\pi}{4}.$$

② 设线段 AB 的中点为 M , 由 (i) 得 M 的坐标为 $\left(-\frac{8k^2}{1 + 4k^2}, \frac{2k}{1 + 4k^2}\right)$. 以下

分两种情况: ① 当 $k = 0$ 时, 点 B 的坐标是 $(2, 0)$, 线段 AB 的垂直平分线为

y 轴, 于是 $\overrightarrow{QA} = (-2, -y_0)$, $\overrightarrow{QB} = (2, -y_0)$. 由 $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = 4$, 得
 $y_0 = \pm 2\sqrt{2}$. ②当 $k \neq 0$ 时, 线段 AB 的垂直平分线方程为
 $y - \frac{2k}{1+4k^2} = -\frac{1}{k} \left(x + \frac{8k^2}{1+4k^2} \right)$. 令 $x = 0$, 解得 $y_0 = -\frac{6k}{1+4k^2}$. 由
 $\overrightarrow{QA} = (-2, -y_0)$, $\overrightarrow{QB} = (x_1, y_1 - y_0)$.
 $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = -2x_1 - y_0(y_1 - y_0) = \frac{-2(2-8k^2)}{1+4k^2} + \frac{6k}{1+4k^2} \left(\frac{4k}{1+4k^2} + \frac{6k}{1+4k^2} \right) =$
 $\frac{4(16k^4 + 15k^2 - 1)}{(1+4k^2)^2} = 4$, 整理得 $7k^2 = 2$. 故 $k = \pm \frac{\sqrt{14}}{7}$. 所以
 $y_0 = \pm \frac{2\sqrt{14}}{5}$. 综上, $y_0 = \pm 2\sqrt{2}$ 或 $y_0 = \pm \frac{2\sqrt{14}}{5}$.

【标注】【知识点】弦长求解问题；中点弦问题

10. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 其右顶点与上顶点的距离为 $\sqrt{5}$, 过点 $P(0, 2)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于 A 、 B 两点.
- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 设 M 是 AB 中点, 且 Q 点的坐标为 $\left(\frac{2}{5}, 0\right)$, 当 $QM \perp AB$ 时, 求直线 l 的方程.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 直线 l 的方程为 $x = 0$ 或 $x + y - 2 = 0$.

【解析】 (1) $\because$ 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,

其右顶点与上顶点的距离为 $\sqrt{5}$,

$$\therefore \text{由题意知: } \begin{cases} e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ a^2 + b^2 = 5 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}, \text{ 解得 } a = \sqrt{3}, b = \sqrt{2},$$

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为: $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) ①若直线 l 的斜率不存在, 此时 M 为原点, 满足 $QM \perp AB$,

$\therefore$ 方程为 $x = 0$;

②若直线 l 的斜率存在, 设其方程为 $y = kx + 2$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{将直线方程与椭圆方程联立 } \begin{cases} y = kx + 2 \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}, \text{ 得 } (2 + 3k^2)x^2 + 12kx + 6 = 0,$$

$$\Delta = 72k^2 - 48 > 0, x_1 + x_2 = \frac{-12k}{2 + 3k^2},$$

$$\text{设 } M(x_0, y_0), \text{ 则 } x_0 = \frac{-6k}{2 + 3k^2}, y_0 = k \cdot \frac{-6k}{2 + 3k^2} + 2 = \frac{4}{2 + 3k^2},$$

$$\text{由 } QM \perp AB, \text{ 知 } \frac{y_0}{x_0 - \frac{2}{5}} \cdot k = -1, \text{ 化简得 } 3k^2 + 5k + 2 = 0,$$

解得 $k = -1$ 或 $k = -\frac{2}{3}$ ，将结果代入 $\Delta = 72k^2 - 480$ 验证，舍掉 $k = -\frac{2}{3}$ ，

此时，直线 l 的方程为 $x + y - 2 = 0$ ，

综上所述，直线 l 的方程为 $x = 0$ 或 $x + y - 2 = 0$ 。

【标注】【知识点】中点弦问题；直线和椭圆的位置关系

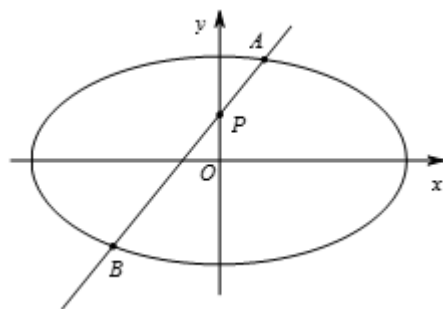
二、共线比例问题

在直线与圆锥曲线的综合题中，我们把一条直线上涉及到两条线段或者两个向量成比例的问题称之为共线问题。共线比例线段问题的解题思路主要利用相似转化为 x_1, x_2 或是 y_1, y_2 成比例的关系。

例如：设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(0, t)$ ，

(1) 若 $\overrightarrow{PA} = \lambda \overrightarrow{PB}$ ，则 $\begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \cdots (1) \\ y_1 - t = \lambda(y_2 - t) \cdots (2) \end{cases}$ ，其中(1)(2)是等价的，我们只选择其中一个运用。

(2) 若 $|AP| = \lambda |BP|$ ，则 $x_1 = -\lambda x_2$ 。



【补充说明】有时候题目中会以两个三角形的面积成倍数呈现，但实质上也是共线比例问题。

11. 已知点 $A(2, 1)$ 为椭圆 $G: x^2 + 2y^2 = m$ 上的一点。

(1) 求椭圆 G 的焦点坐标；

(2) 若椭圆 G 上的 B, C 两点满足 $2k_1 k_2 = -1$ （其中 k_1, k_2 分别为直线 AB, AC 的斜率）。证明： B, C, O 三点共线。

【答案】(1) $(-\sqrt{3}, 0)$ 和 $(\sqrt{3}, 0)$

(2) 证明过程见解析。

【解析】(1) $\because$ 点 $A(2, 1)$ 为椭圆 $G: x^2 + 2y^2 = m$ 上的一点，

$$\therefore m = 4 + 2 = 6, \therefore \text{椭圆的标准方程为 } \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1,$$

$$\therefore c = \sqrt{6 - 3} = \sqrt{3},$$

∴椭圆G的焦点坐标为 $(-\sqrt{3}, 0)$ 和 $(\sqrt{3}, 0)$.

(2) 设 $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$,

由 $\begin{cases} y = k_1(x-2) + 1 \\ x^2 + 2y^2 = 6 \end{cases}$, 消去 y , 化简, 得:

$$(2k_1^2 + 1)x^2 - 4k_1(2k_1 - 1)x + 2(2k_1 - 1)^2 - 6 = 0,$$

$$\therefore x_1 = \frac{(2k_1 - 1)^2 - 3}{2k_1^2 + 1}, \text{ 同理得 } x_2 = \frac{(2k_2 - 1)^2 - 3}{2k_2^2 + 1},$$

$$\therefore 2k_1k_2 = -1,$$

∴

$$x_2 = \frac{2k_1^2(2k_2 - 1)^2 - 6k_1^2}{4k_1^2k_2^2 + 2k_1^2} = \frac{2(-1 - k_1)^2 - 6k_1^2}{1 + 2k_1^2} = \frac{2 + 4k_1 - 4k_1^2}{1 + 2k_1^2} = \frac{3 - (2k_1 - 1)^2}{1 + 2k_1^2} = -x_1$$

,

∴

$$2k_1k_2 = 2 \times \frac{y_1 - 1}{x_1 - 2} \times \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2} = 2 \times \frac{(y_1 - 1)(y_2 - 1)}{4 - x_1^2} = \frac{(y_1 - 1)(y_2 - 1)}{y_1^2 - 1} = \frac{y_2 - 1}{y_1 + 1} = -1$$

,

$$\therefore y_1 = -y_2,$$

∴ B, C, O 三点共线.

【标注】【知识点】共线比例问题；直线和椭圆的位置关系

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 动点 P 到直线 $l: x = 2$ 的距离是到点 $F(1, 0)$ 的距离的 $\sqrt{2}$ 倍.

(1) 求动点 P 的轨迹方程;

(2) 设直线 FP 与(I)中曲线交于点 Q , 与 l 交于点 A , 分别过点 P 和 Q 作 l 的垂线, 垂足为 M, N , 问: 是否存在点 P 使得 $\triangle APM$ 的面积是 $\triangle AQN$ 面积的9倍? 若存在, 求出 P 的坐标; 若不存在, 说明理由.

【答案】 (1) $x^2 + 2y^2 = 2$

(2) $(0, \pm 1)$

【解析】 (1) 设点 P 的坐标为 (x, y) . 由题意知 $\sqrt{2} \times \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = |2-x|$

化简得 $x^2 + 2y^2 = 2$, 所以动点 P 的轨迹方程为 $x^2 + 2y^2 = 2$.

(2) 设直线 FP 的方程为 $x = ty + 1$, 点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$

因为 $\triangle AQN \sim \triangle APM$, 所以有 $PM = 3QN$, 由已知得

$$PM = \sqrt{2}PF, QN = \sqrt{2}QF,$$

所以 $PF = 3QF$, 所以有 $y_1 = -3y_2$ (1)

$$\begin{aligned} & \text{由} \begin{cases} x = ty + 1 \\ x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases}, \text{得} (t^2 + 2)y^2 + 2ty - 1 = 0, \Delta > 0, y_1 + y_2 = -\frac{2t}{t^2 + 2} \\ & (2), \\ & y_1 \cdot y_2 = -\frac{1}{t^2 + 2} \quad (3) \\ & \text{由}(1)(2)(3) \text{得} t = -1, y_1 = 1, y_2 = -\frac{1}{3} \text{ 或 } t = 1, y_1 = -1, y_2 = \frac{1}{3}, \\ & \text{所以存在点} P \text{ 为} (0, \pm 1). \end{aligned}$$

【标注】【知识点】面积问题；直线和椭圆的位置关系

13. 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 $B(0, b)$, 过点 B 且与 BF_2 垂直的直线交 x 轴负半轴于点 D , $\overrightarrow{DF_1} = \overrightarrow{F_1F_2}$.
- (1) 求证: $b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.
- (2) 若过 B, D, F_2 三点的圆与直线 $l: x + y = 0$ 相交于 E, F 两点, 且 $|EF| = 2\sqrt{7}$, 求 Γ 的方程.
- (3) 若 $a = 2$, 过 F_2 且不与坐标轴垂直的直线与 Γ 交于 P, Q 两点, 点 M 是点 P 关于 x 轴的对称点, 在 x 轴上是否存在一个定点 N , 使得 M, Q, N 三点共线? 若存在, 求出点 N 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1$.

(3) 存在点 $N(4, 0)$, 使得 M, Q, N 三点共线.

【解析】 (1) 设 $D(x_0, 0) (x_0 < 0)$, 由 $F_2(c, 0), B(0, b)$,

$$\text{得} \overrightarrow{F_2B} = (-c, b), \overrightarrow{BD} = (x_0, -b),$$

$$\because \overrightarrow{F_2B} \perp \overrightarrow{BD},$$

$$\therefore -cx_0 - b^2 = 0, \text{得} x_0 = -\frac{b^2}{c},$$

$$\text{故} \overrightarrow{DF_1} = \left(\frac{b^2}{c} - c, 0 \right),$$

$$\text{又} \overrightarrow{F_1F_2} = (2c, 0),$$

$$\text{故由} \overrightarrow{DF_1} = \overrightarrow{F_1F_2}, \text{得} \frac{b^2}{c} - c = 2c,$$

$$\therefore b^2 - 2c^2 = 3(a^2 - b^2), \text{则} 4b^2 = 3a^2,$$

$$\therefore b = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

(2) 由(1)知, $b = \sqrt{3}c$, 故 $a = 2c$, 此时, 点 D 的坐标为 $(-3c, 0)$,

又 $\triangle BDF_2$ 是直角三角形, 故其外接圆圆心为 $F_1(-c, 0)$, 半径为 $2c$,

$$\therefore \text{圆心 } F_1(-c, 0) \text{ 到直线 } x + y = 0 \text{ 的距离 } d = \frac{|-c|}{\sqrt{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}} .$$

$$\therefore |EF| = 2\sqrt{4c^2 - \frac{c^2}{2}} = 2\sqrt{7} ,$$

$$\text{解得 } c = \sqrt{2} , b = \sqrt{6} , a = 2\sqrt{2} ,$$

$$\text{所求椭圆 } \Gamma \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1 .$$

$$(3) \text{ 如 } a = 2 , \text{ 则 } b = \sqrt{3} , \text{ 椭圆方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 .$$

$$\text{得 } F_2(1, 0) ,$$

$\therefore$ 直线 l 过 F_2 且不与坐标轴垂直 ,

故可设直线 l 的方程为 : $y = k(x - 1) , k \neq 0 .$

$$\text{由 } \begin{cases} y = k(x - 1) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} ,$$

$$\text{得 } (3 + 4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0 ,$$

$$\text{设 } P(x_1, y_1) , Q(x_2, y_2) ,$$

$$\text{则有 } x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{3 + 4k^2} , x_1x_2 = \frac{4k^2 - 12}{3 + 4k^2} ,$$

$$\text{由题意 , } M(x_1, -y_1) ,$$

$$\text{故直线 } QM \text{ 的方向向量为 } \vec{a} = (x_2 - x_1, y_2 + y_1) ,$$

$$\therefore \text{直线 } QM \text{ 的方程为 } \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y + y_1}{y_2 + y_1} ,$$

令 $y = 0$, 得

$$\begin{aligned} x &= \frac{y_1(x_2 - x_1)}{y_2 + y_1} + x_1 = \frac{x_1y_2 + x_2y_1}{y_1 + y_2} = \frac{k(x_1 - 1)x_2 + k(x_2 - 1)x_1}{k(x_2 - 1) + k(x_1 - 1)} \\ &= \frac{2kx_1x_2 - k(x_1 + x_2)}{k(x_1 + x_2) - 2k} = \frac{2x_1x_2 - (x_1 + x_2)}{(x_1 + x_2) - 2} = \frac{2 \cdot \frac{4k^2 - 12}{3 + 4k^2} - \frac{8k^2}{3 + 4k^2}}{\frac{8k^2}{3 + 4k^2} - 2} = 4 \end{aligned}$$

即直线 QM 与 x 轴交于定点 $(4, 0)$.

$\therefore$ 存在点 $N(4, 0)$, 使得 M 、 Q 、 N 三点共线 .

【标注】【知识点】定点问题

三、 定点定值问题

1. 定点问题

解题思路 :

- ①根据题意选择参数，建立一个直线系或曲线系方程，经过分析、整理，对方程进行等价变形，以找出适合方程且与参数无关的坐标(该坐标对应的点即为所求定点)；
- ②从特殊位置入手，找出定点，再证明该点符合题意.

【教师可见】

解题举例：

- (1) 若直线 AB 过的这个点 $P(m, n)$ 是已知或可求的，那么要证明直线 AB 过的这个点 $P(m, n)$ ，只需证明 AP, BP, AB 任意两个斜率相等即可。
- (2) 探究 $\times \times \times$ 是否过定点(一般在 x 轴上)。可以设动点坐标为 $(m, 0)$ ，然后结合条件，将需要探究的 $\times \times \times$ 转化成与 $x_1 + x_2, x_1x_2$ 有关的关系式，代入 $x_1 + x_2, x_1x_2$ 后，会得到一个含有 m 的代数式，然后求解即可。

14. 在平面直角坐标系中，点 $P(x, y)$ 为动点，已知点 $A(\sqrt{2}, 0), B(-\sqrt{2}, 0)$ ，直线 PA 与 PB 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$ 。
- (1) 求动点 P 的轨迹 E 的方程。
- (2) 过点 $F(1, 0)$ 的直线 l 交曲线 E 于 M, N 两点，设点 N 关于 x 轴的对称点为 Q (M, Q 不重合)，求证：直线 MQ 过定点。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1 (y \neq 0)$ 。

(2) 证明见解析。

【解析】 (1) 依题意，得 $\frac{y}{x + \sqrt{2}} \cdot \frac{y}{x - \sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$ ，
化简得 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1 (y \neq 0)$ 。

(2) 取特殊位置：当直线 l 为 $y = -x + 1$ 时，满足题意，此时直线 MQ 为 $y = \frac{1}{2}x - 1$ ，
当直线 l 为 $y = x - 1$ 时，满足题意，此时直线 MQ 为 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ ，

$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + 1 \end{cases} \text{可解得} \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}.$$

以下证明直线 MQ 恒过定点 $(2, 0)$ 。

易知直线 l 的斜率存在。

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), l: y = k(x - 1)$ ，

则 $Q(x_2, -y_2)$ ，

将 $y = k(x - 1)$ 代入 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1 (y \neq 0)$ ，整理得

$$(1 + k^2)x^2 - 4k^2x + 2k^2 - 2 = 0,$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{1 + 2k^2}, x_1x_2 = \frac{2k^2 - 2}{1 + 2k^2}.$$

直线 MQ 的方程为 $y - y_1 = \frac{y_1 + y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$,

令 $y = 0$, 得

$$x = x_1 + \frac{y_1(x_2 - x_1)}{y_1 + y_2} = x_1 + \frac{k(x_1 + 1)(x_2 - x_1)}{k(x_1 + x_2 - 2)} = \frac{2x_1x_2 - (x_1 + x_2)}{x_1 + x_2 - 2} = 2.$$

$\therefore$ 直线 MQ 过点 $(2, 0)$.

【标注】【知识点】定点问题

15. 设 O 为坐标原点, 动点 M 在椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 上, 过点 M 作 x 轴的垂线, 垂足为 N , 点 P 满足 $\overrightarrow{NP} = \sqrt{2}\overrightarrow{NM}$.

(1) 求点 P 的轨迹方程.

(2) 设点 Q 在直线 $x = -3$ 上, 且 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 1$. 证明: 过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过椭圆 C 的左焦点 F .

【答案】 (1) $x^2 + y^2 = 2$

(2) 证明见解析

【解析】 (1) 设 $P(x, y)$, $M(x_0, y_0)$,

则 $N(x_0, 0)$, $\overrightarrow{NP} = (x - x_0, y)$, $\overrightarrow{NM} = (0, y_0)$.

由 $\overrightarrow{NP} = \sqrt{2}\overrightarrow{NM}$ 得 $x_0 = x$, $y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}y$, 因为 $M(x_0, y_0)$ 在椭圆 C 上,

所以 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 1$,

因此点 P 的轨迹方程为 $x^2 + y^2 = 2$.

(2) 方法一: 设 $Q(-3, y_Q)$, $P(x_1, y_1)$, 所以 $\overrightarrow{PQ} = (-3 - x_1, y_Q - y_1)$,

由 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 1$ 得 $(x_1, y_1) \cdot (-3 - x_1, y_Q - y_1) = 1$,

即 $-3x_1 + y_1y_Q = x_1^2 + y_1^2 + 1$,

即 $-3x_1 + y_1y_Q = 3$,

$$y_Q = \frac{3(x_1 + 1)}{y_1} \quad ①,$$

因为直线 l 与 OQ 垂直, 所以 $k_l \cdot k_{OQ} = -1$,

即 $k_l \cdot \frac{y_Q}{-3} = -1$, 所以 $k_l = \frac{3}{y_Q}$,

直线 l 的方程为 $y - y_1 = \frac{3}{y_Q}(x - x_1)$,

将①代入直线可得 $y = \frac{y_1}{(x_1 + 1)}(x - x_1) + y_1 = \frac{y_1}{(x_1 + 1)}(x + 1)$,

所以直线 l 过定点 $(-1, 0)$.

方法二: 设点 $Q(-3, y_Q)$, $P(x_P, y_P)$ ($y_Q \neq 0$),

$$\text{由已知可得 } \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = (x_P, y_P) \cdot (-3 - y_P, y_Q - y_P) = 1,$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} - |\overrightarrow{OP}|^2 = 1,$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}|^2 + 1 = 3,$$

$$\therefore -3x_P + y_P y_Q = 3.$$

$$\text{设直线 } OQ : y = \frac{y_Q}{-3} \cdot x,$$

$\therefore$ 直线 l 与 l_{OQ} 垂直,

$$\therefore k_l = \frac{3}{y_Q}$$

$$\text{故直线 } l \text{ 的方程为 } y = \frac{3}{y_Q}(x - x_P) + y_P,$$

$$\text{令 } y = 0, \text{ 得 } -y_P y_Q = 3(x - x_P),$$

$$-\frac{1}{3} \cdot y_P y_Q = x - x_P,$$

$$\therefore x = -\frac{1}{3} y_P \cdot y_Q + x_P,$$

$$\therefore y_P y_Q = 3 + 3x_P,$$

$$\therefore x = -\frac{1}{3}(3 + 3x_P) + x_P = -1,$$

若 $y_Q = 0$, 则 $-3x_P = 3$, $x_P = -1$, $y_P = \pm 1$,

直线 OQ 方程为 $y = 0$, 直线 l 的方程为 $x = -1$,

直线 l 过点 $(-1, 0)$, 为椭圆 C 的左焦点 F .

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系；定点问题

16. 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, F_1, F_2 是椭圆的两个焦点, A 为椭圆上一点且 $\angle F_1 A F_2 = \frac{\pi}{3}$, $\triangle F_1 A F_2$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求椭圆的方程.

(2) 已知点 $P(0, 1)$, 直线 l 不经过点 P 且与椭圆交于 B, C 两点, 若直线 PB 与直线 PC 的斜率之和为 1, 证明直线 l 过定点, 并求出该定值.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) $(-2, -1)$.

【解析】 (1) 由题意得 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 $c = \frac{\sqrt{2}}{2}a$,

$$\text{因为 } S_{\triangle F_1 A F_2} = \frac{1}{2} |AF_1| \cdot |AF_2| \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{所以 } |AF_1| + |AF_2| = 2a, |F_1 F_2| = 2c,$$

在 $\triangle A F_1 F_2$ 中, 由余弦定理得:

$$|F_1F_2|^2 = |AF_1|^2 + |AF_2|^2 - 2|AF_1| \cdot |AF_2| \cdot \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= (|AF_1| + |AF_2|)^2 - 3|AF_1| \cdot |AF_2|,$$

$$\text{所以 } 4 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a \right)^2 = 4a^2 - 4,$$

$$\text{解得 } a^2 = 2, c^2 = 1, b^2 = 1,$$

$$\text{故椭圆方程为 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$$

(2) 由题意设直线方程为 $y = kx + m (m \neq \pm 1)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 整理得 } (1 + 2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 2 = 0,$$

因为椭圆与直线交于 B, C 两点,

$$\text{所以 } \Delta = (4km)^2 - 4(1 + 2k^2)(2m^2 - 2) = -8(m^2 - 2k^2 - 1) > 0,$$

设点 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{-4km}{1 + 2k^2}, x_1x_2 = \frac{2m^2 - 2}{1 + 2k^2},$$

$$\text{由题意知 } k_{PB} + k_{PC} = \frac{y_1 - 1}{x_1} + \frac{y_2 - 1}{x_2} = 1,$$

$$\text{即 } (2k - 1)x_1x_2 + (m - 1)(x_1 + x_2) = 0,$$

$$\text{故 } (2k - 1) \cdot \frac{2m^2 - 2}{1 + 2k^2} + (m - 1) \cdot \frac{-4km}{1 + 2k^2} = 0,$$

$$\text{解得 } k = \frac{m + 1}{2},$$

$$\text{即直线 } l \text{ 方程为 } 2y - x = m(x + 2),$$

所以直线过定点 $(-2, -1)$.

【标注】【知识点】定点问题；定值问题（证明、探究）；直线和椭圆的位置关系

2. 定值问题

解题思路：

- ①从特殊情况入手，求出定值，再证明这个值与变量无关；
- ②直接推理、计算，并在计算的过程中消去变量，从而得到定值.

【教师可见】

解题举例：

(1) 求证： $\times \times \times$ 为定值

解题思路：将需要求证的 $\times \times \times$ 转化成与 $x_1 + x_2, x_1x_2$ 有关的关系式，代入 $x_1 + x_2, x_1x_2$ 后，得到的就是我们需要证明的定值；

(2) 探究 $\times \times \times$ 是否为定值？

解题思路：将需要探究的 $\times \times \times$ 转化成与 $x_1 + x_2, x_1 x_2$ 有关的关系式，代入 $x_1 + x_2, x_1 x_2$ 后，一般情况下会得到一个含有参数 k 的整式或者分式。若含有参数 k 的代数式为整式，则令 k 的每一项系数都等于0；若含有参数 k 的代数式为分式，则令含有 k 的分子分母对应的系数之比相等。

17. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，右焦点为 F ，点 $Q(0, 1)$ 在椭圆 C 上。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 过点 F 的直线交椭圆 C 于 M, N 两点，交直线 $x = 2$ 于点 P ，设 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{MF}$ ， $\overrightarrow{PN} = \mu \overrightarrow{NF}$ ，求证： $\lambda + \mu$ 为定值。

【答案】(1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 。

(2) 证明过程见解析。

【解析】(1) $\because$ 点 $Q(0, 1)$ 在椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上，

$$\therefore \frac{1}{b^2} = 1, \text{ 即 } b = 1.$$

又 $\because$ 椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

$$\therefore \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{由 } a^2 = b^2 + c^2, \text{ 得 } a = \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$$

(2) 方法一：设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ 。

$\because$ 当 $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{FN}$ 时 MN 垂直于 x 轴，与直线 $x = 2$ 无交点

$\therefore$ 可记 $\overrightarrow{MF} = n\overrightarrow{FN} (n \neq \pm 1)$ ，则有： $x_F - x_1 = n(x_2 - x_F)$ ，

$$y_F - y_1 = n(y_2 - y_F).$$

由已知得 $F(1, 0)$ ，直线 MN 的斜率存在。

设直线 MN 的方程为 $y = k(x - 1)$ ，

$M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ ，则 $P(2, k)$ 。

$$\text{由 } \overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{MF}, \overrightarrow{PN} = \mu \overrightarrow{NF},$$

$$\text{得 } \lambda = \frac{2 - x_1}{x_1 - 1}, \mu = \frac{2 - x_2}{x_2 - 1},$$

$$\therefore \lambda + \mu = \frac{2 - x_1}{x_1 - 1} + \frac{2 - x_2}{x_2 - 1} = \frac{3(x_1 + x_2) - 2x_1x_2 - 4}{x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1},$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = k(x - 1) \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 得 } (1 + 2k^2)x^2 - 4k^2x + 2k^2 - 2 = 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{1 + 2k^2}, x_1x_2 = \frac{2k^2 - 2}{1 + 2k^2},$$

$$\therefore 3(x_1 + x_2) - 2x_1x_2 - 4 = 3 \times \frac{4k^2}{1 + 2k^2} - 2 \times \frac{2k^2 - 2}{1 + 2k^2} - 4$$

$$= \frac{12k^2 - 4k^2 + 4 - 4 - 8k^2}{1 + 2k^2}$$

$$= 0.$$

$\therefore \lambda + \mu = 0$ 为定值.

方法二：设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$.

记 $\overrightarrow{MF} = n\overrightarrow{FN}$ ($n \neq \pm 1$), 则有: $x_F - x_1 = n(x_2 - x_F)$, $y_F - y_1 = n(y_2 - y_F)$.

解得 $F(\frac{x_1 + nx_2}{1+n}, \frac{y_1 + ny_2}{1+n})$.

设直线 MN 上一点 Q 满足 $\overrightarrow{MQ} = -n\overrightarrow{QN}$, 同样解得: $Q(\frac{x_1 - nx_2}{1-n}, \frac{y_1 - ny_2}{1-n})$.

M, N 满足: $\frac{x_1^2}{2} + y_1^2 = 1$ ①, $\frac{x_2^2}{2} + y_2^2 = 1$ ②.

① - ② $\times \lambda^2$ 得: $\frac{(x_1 + \lambda x_2)(x_1 - \lambda x_2)}{2} + (y_1 + \lambda y_2)(y_1 - \lambda y_2) = 1 - \lambda^2$,

即: $\frac{(1+\lambda)x_F \cdot (1-\lambda)x_Q}{2} + (1+\lambda)y_F \cdot (1-\lambda)y_Q = 1 - \lambda^2$.

得 $\frac{x_F x_Q}{2} + y_F y_Q = 1$, 代入 $x_F = 1, y_F = 0$.

解得 $x_Q = 2$, 意即 Q 为直线 MN 与直线 $x = 2$ 的交点, 即为点 P .

故有 $\overrightarrow{MF} = n\overrightarrow{FN}$, $\overrightarrow{MP} = -n\overrightarrow{PN}$. 由 $\overrightarrow{MF} = n\overrightarrow{FN}$ 得 $\overrightarrow{NF} = -\frac{1}{n}\overrightarrow{MF}$.

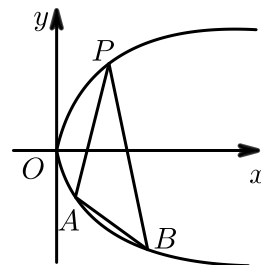
结合 $\overrightarrow{PN} = -\mu\overrightarrow{NF}$, 有:

$\overrightarrow{MP} = -n\overrightarrow{PN} = -n\mu\overrightarrow{NF} = -n\mu \cdot (-\frac{1}{n}\overrightarrow{MF}) = \mu\overrightarrow{MF}$.

又 $\overrightarrow{PM} = \lambda\overrightarrow{MF}$, 故有 $\lambda = -\mu$, $\lambda + \mu = 0$ 为定值.

【标注】【知识点】定值问题 (证明、探究); 椭圆的基本量求解

18. 如图所示, 抛物线关于 x 轴对称, 它的顶点坐标在坐标原点, 点 $P(1, 2)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 均在抛物线上.



- (1) 求抛物线的方程及其准线方程.
- (2) 当 PA 与 PB 的斜率存在且倾斜角互补时, 证明: 直线 AB 的斜率为定值.

【答案】 (1) 所求的抛物线方程为 $y^2 = 4x$, 准线方程为 $x = -1$.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) 由题意可设抛物线方程为 $y^2 = 2px$ ($p > 0$),

∵点 $P(1, 2)$ 在抛物线上,

$$\therefore 2^2 = 2p \cdot 1,$$

$$\therefore p = 2,$$

∴所求的抛物线方程为 $y^2 = 4x$, 准线方程为 $x = -1$.

(2) 证明: 设直线 PA 的斜率为 k_{PA} , $k_{AB} = \frac{y_2 - 2}{x_2 - 1}$,

∵ PA 与 PB 的斜率存在且倾斜角互补,

$$\therefore k_{PA} = -k_{PB},$$

∵ $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 在抛物线上,

$$\therefore \begin{cases} y_1^2 = 4x_1 \\ y_2^2 = 4x_2 \end{cases},$$

$$\therefore \frac{y_1 - 2}{\frac{1}{4}y_1^2} = -\frac{y_2 - 2}{\frac{1}{4}y_2^2 - 1},$$

$$\therefore y_1 + 2 = -(y_2 + 2),$$

$$\therefore y_1 + y_2 = -4,$$

$$\text{由①-②得: } k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4}{y_1 + y_2} = -\frac{4}{4} = -1,$$

∴直线 AB 的斜率为定值.

【标注】【知识点】定值问题(证明、探究); 直线和抛物线的位置关系; 抛物线的标准方程

19. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(0, 1)$, 且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) A_1, A_2 为椭圆 C 的左、右顶点, 直线 $l: x = 2\sqrt{2}$ 与 x 轴交于点 D , 点 P 是椭圆 C 上异于 A_1, A_2 的动点, 直线 A_1P, A_2P 分别交直线 l 于 E, F 两点. 证明: $|DE| \cdot |DF|$ 恒为定值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

(2) 证明见解析.

【解析】(1) 由已知 $\begin{cases} b = 1, \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$, 解得 $a = 2$. 所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 由(1)可知, $A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$. 设 $P(x_0, y_0)$, 依题意 $-2 < x_0 < 2$,

于是直线 A_1P 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0 + 2}(x + 2)$, 令 $x = 2\sqrt{2}$, 则 $y = \frac{(2\sqrt{2} + 2)y_0}{x_0 + 2}$.

$$\text{即 } |DE| = (2\sqrt{2} + 2) \frac{|y_0|}{|x_0 + 2|}.$$

又直线 A_2P 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0 - 2}(x - 2)$, 令 $x = 2\sqrt{2}$, 则 $y = \frac{(2\sqrt{2} - 2)y_0}{x_0 - 2}$,

$$\text{即 } |DF| = (2\sqrt{2} - 2) \frac{|y_0|}{|x_0 - 2|}.$$

所以

$$|DE| \cdot |DF| = (2\sqrt{2} + 2) \frac{|y_0|}{|x_0 + 2|} \cdot (2\sqrt{2} - 2) \frac{|y_0|}{|x_0 - 2|} = \frac{4y_0^2}{|x_0^2 - 4|} = \frac{4y_0^2}{4 - x_0^2}$$

又 $P(x_0, y_0)$ 在 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上, 所以 $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$, 即 $4y_0^2 = 4 - x_0^2$, 代入上式,

$$\text{得 } |DE| \cdot |DF| = \frac{4 - x_0^2}{4 - x_0^2} = 1, \text{ 所以 } |DE| \cdot |DF| \text{ 为定值 } 1.$$

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系；定值问题（证明、探究）

四、 夹角问题

(1) 原点 O 在以 AB 为直径的圆内 $\Leftrightarrow \angle AOB$ 为钝角 $\Leftrightarrow \vec{OA} \cdot \vec{OB} < 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 < 0$.

(2) 原点 O 在以 AB 为直径的圆外 $\Leftrightarrow \angle AOB$ 为锐角 $\Leftrightarrow \vec{OA} \cdot \vec{OB} > 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 > 0$.

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 C 的顶点是原点, 以 x 轴为对称轴, 且经过点 $P(1, 2)$.

(1) 求抛物线 C 的方程.

(2) 设点 A, B 在抛物线 C 上, 直线 PA, PB 分别与 y 轴交于点 M, N , $|PM| = |PN|$. 求直线 AB 的斜率.

【答案】 (1) 抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$.

(2) 直线 AB 的斜率为 -1 .

【解析】 (1) 依题意, 设抛物线 C 的方程为 $y^2 = ax$ ($a \neq 0$).

由抛物线 C 且经过点 $P(1, 2)$,

得 $a = 4$,

所以抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$.

(2) 因为 $|PM| = |PN|$,

所以 $\angle PMN = \angle PNM$,

所以 $\angle 1 = \angle 2$,

所以直线 PA 与 PB 的倾斜角互补,

所以 $k_{PA} + k_{PB} = 0$.

依题意, 直线 AP 的斜率存在, 设直线 AP 的方程为: $y - 2 = k(x - 1)$ ($k \neq 0$),

将其代入抛物线 C 的方程, 整理得

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 证明见解析.

【解析】(1) 设椭圆 C 的半焦距为 c . 依题意, 得

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{2}, a + c = 3.$$

解得 $a = 2, c = 1$.

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 3,$$

$$\therefore \text{椭圆} C \text{的方程是 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 解法一: 由(1)得 $A(-2, 0)$. 设 AP 的中点 $M(x_0, y_0)$, $P(x_1, y_1)$.

设直线 AP 的方程为: $y = k(x + 2) (k \neq 0)$, 将其代入椭圆方程, 整理得

$$(4k^2 + 3)x^2 + 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0,$$

$$\therefore -2 + x_1 = \frac{-16k^2}{4k^2 + 3}.$$

$$\therefore x_0 = \frac{-8k^2}{4k^2 + 3}, y_0 = k(x_0 + 2) = \frac{6k}{4k^2 + 3},$$

$$\text{即 } M\left(\frac{-8k^2}{4k^2 + 3}, \frac{6k}{4k^2 + 3}\right).$$

$$\therefore \text{直线 } OM \text{ 斜率是 } \frac{\frac{6k}{4k^2 + 3}}{\frac{-8k^2}{4k^2 + 3}} = -\frac{3}{4k},$$

$$\therefore \text{直线 } OM \text{ 的方程是 } y = -\frac{3}{4k}x. \text{ 令 } x = 4, \text{ 得 } D(4, -\frac{3}{k}).$$

$$\text{直线 } OE \text{ 的方程是 } y = kx. \text{ 令 } x = 4, \text{ 得 } E(4, 4k).$$

$$\text{由 } F(1, 0), \text{ 得直线 } EF \text{ 的斜率是 } \frac{4k}{4-1} = \frac{4k}{3}, \therefore EF \perp OM, \text{ 记垂足为 } H;$$

$$\therefore \text{直线 } DF \text{ 的斜率是 } \frac{-\frac{3}{k}}{4-1} = -\frac{1}{k}, \therefore DF \perp OE, \text{ 记垂足为 } G.$$

在 $Rt\triangle EHO$ 和 $Rt\triangle DGO$ 中, $\angle ODF$ 和 $\angle OEF$ 都与 $\angle EOD$ 互余,

$$\therefore \angle ODF = \angle OEF.$$

解法二: 由(1)得 $A(-2, 0)$. 设 $P(x_1, y_1) (x_1 \neq \pm 2)$, 其中 $3x_1^2 + 4y_1^2 - 12 = 0$

$$\therefore AP \text{ 的中点为 } M, \therefore M\left(\frac{x_1 - 2}{2}, \frac{y_1}{2}\right).$$

$$\therefore \text{直线 } OM \text{ 的斜率是 } k_{OM} = \frac{y_1}{x_1 - 2},$$

$$\therefore \text{直线 } OM \text{ 的方程是 } y = \frac{y_1}{x_1 - 2}x. \text{ 令 } x = 4, \text{ 得 } D\left(4, \frac{4y_1}{x_1 - 2}\right).$$

$$\text{直线 } OE \text{ 的方程是 } y = \frac{y_1}{x_1 + 2}x. \text{ 令 } x = 4, \text{ 得 } E\left(4, \frac{4y_1}{x_1 + 2}\right).$$

$$\text{由 } F(1, 0), \text{ 得直线 } EF \text{ 的斜率是 } k_{EF} = \frac{4y_1}{3(x_1 + 2)},$$

$$\therefore k_{EF} \cdot k_{OM} = \frac{4y_1}{3(x_1 + 2)} \cdot \frac{y_1}{x_1 - 2} = \frac{4y_1^2}{3(x_1^2 - 4)} = -1,$$

$\therefore EF \perp OM$, 记垂足为 H ;

$$\text{同理可得 } k_{DF} \cdot k_{OE} = \frac{4y_1}{3(x_1-2)} \cdot \frac{y_1}{x_1+2} = \frac{4y_1^2}{3(x_1^2-4)} = -1,$$

$\therefore DF \perp OE$, 记垂足为 G .

在 $Rt\triangle EHO$ 和 $Rt\triangle DGO$ 中, $\angle ODF$ 和 $\angle OEF$ 都与 $\angle EOD$ 互余,

$$\therefore \angle ODF = \angle OEF.$$

解法三: (此解析由高原提供)

设椭圆右顶点为 A' , P 点坐标为 (x_0, y_0) , 则

$$k_{PA} \cdot k_{OM} = k_{PA} \cdot k_{PA'} = \frac{y_0}{x_0+2} \cdot \frac{y_0}{x_0-2} = \frac{y_0^2}{x_0^2-4} = -\frac{3}{4}.$$

故 $k_{OD} \cdot k_{EF} = k_{OM} \cdot \frac{4}{3} k_{OE} = k_{OM} \cdot \frac{4}{3} k_{PA} = -1$, 所以 $OD \perp EF$, 同理

$OE \perp DF$, 因此 $\angle ODF = \angle OEF$.

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系

22. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 , 点 $P(2, \sqrt{3})$ 满足: F_2 在线段 PF_1 的中垂线上.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 若斜率为 $k (k \neq 0)$ 的直线 l 与 x 轴、椭圆 C 顺次相交于点 $A(2, 0)$ 、 M 、 N , 且 $\angle NF_2F_1 = \angle MF_2A$, 求 k 的取值范围.

【答案】 (1) 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) 直线 l 的斜率 k 的取值范围是 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

【解析】 (1) 方法一: 椭圆 C 的离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 得 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 其中 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ 椭圆 C 的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0)$ 、 $F_2(c, 0)$,

又点 F_2 在线段 PF_1 的中垂线上, $\therefore F_1F_2 = PF_2$, $\therefore (2c)^2 = (\sqrt{3})^2 + (2-c)^2$

解得 $c = 1$, $a^2 = 2$, $b^2 = 1$, $\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

方法二: 椭圆 C 的离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 得 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 其中 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

椭圆 C 的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0)$ 、 $F_2(c, 0)$,

设线段 PF_1 的中点为 D , $\therefore F_1(-c, 0)$, $P(2, \sqrt{3})$, $\therefore D\left(\frac{2-c}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

又线段 PF_1 的中垂线过点 F_2 , $\therefore k_{PF_1} \cdot k_{DF_2} = -1$, 即

$$\frac{\sqrt{3}}{2+c} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{2-c}{2}-c} = -1 \Rightarrow c = 1, a^2 = 2, b^2 = 1,$$

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) 由题意, 直线 l 的方程为 $y = k(x - 2)$, 且 $k \neq 0$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = k(x - 2) \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{得} (1 + 2k^2)x^2 - 8k^2x + 8k^2 - 2 = 0,$$

$$\text{由} \Delta = 8(1 - 2k^2) > 0, \text{得} -\frac{\sqrt{2}}{2} < k < \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{且} k \neq 0$$

$$\text{设} M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), \text{则有} x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{1 + 2k^2}, x_1x_2 = \frac{8k^2 - 2}{1 + 2k^2}, (*)$$

$$\because \angle NF_2F_1 = \angle MF_2A, \text{且由题意} \angle NF_2A \neq 90^\circ, \therefore k_{MF_2} + k_{NF_2} = 0,$$

$$\text{又} F_2(1, 0), \therefore \frac{y_1}{x_1 - 1} + \frac{y_2}{x_2 - 1} = 0, \text{即} \frac{k(x_1 - 2)}{x_1 - 1} + \frac{k(x_2 - 2)}{x_2 - 1} = 0,$$

$$\therefore 2 - \left(\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} \right) = 0, \text{整理得} 2x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 4 = 0,$$

$$\text{将} (*) \text{代入得}, \frac{16k^2 - 4}{1 + 2k^2} - \frac{24k^2}{1 + 2k^2} + 4 = 0, \text{知上式恒成立, 故直线} l \text{的斜率} k \text{的}$$

$$\text{取值范围是} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

【标注】【知识点】角度问题; 最值问题

23. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点为 A , 右焦点为 $F_2(2, 0)$, 点 $B(2, -\sqrt{2})$ 在椭圆 C 上.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 直线 $y = kx (k \neq 0)$ 与椭圆 C 交于 E, F 两点, 直线 AE, AF 分别与 y 轴交于点 M, N . 当 k 变化时, 在 x 轴上是否存在点 P , 使得 $\angle MPN$ 为直角. 若存在, 求出点 P 的坐标, 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 存在点 P , 使得无论非零实数 k 怎么变化, 总有 $\angle MPN$ 为直角.

点 P 坐标为 $(2, 0)$ 或 $(-2, 0)$.

【解析】 (1) 依题意, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 右焦点为 $F_2(2, 0)$, $c = 2$,

$$\because \text{点} B(2, -\sqrt{2}) \text{在} C \text{上},$$

$$\therefore \frac{4}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1.$$

$$\text{又} \because a^2 = b^2 + c^2.$$

$$\therefore a^2 = 8, b^2 = 4.$$

$$\therefore \text{椭圆方程为} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

(2) 假设存在这样的点 P , 设 $P(x_0, 0)$, $E(x_1, y_1)$, 则 $F(-x_1, -y_1)$.

$$\text{联立直线与椭圆的方程}, \begin{cases} y = kx \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow (1 + 2k^2) \cdot x^2 - 8 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+2k^2}}, y_1 = \frac{2\sqrt{2}k}{\sqrt{1+2k^2}}, A(-2\sqrt{2}, 0).$$

$$\therefore AE \text{ 所在的直线方程为 } y = \frac{k}{1+\sqrt{1+2k^2}} \cdot (x+2\sqrt{2}),$$

$$\therefore M\left(0, \frac{2\sqrt{2}k}{1+\sqrt{1+2k^2}}\right), \text{ 同理可得 } N\left(0, \frac{2\sqrt{2}k}{1-\sqrt{1+2k^2}}\right),$$

$$\overrightarrow{PM} = \left(-x_0, \frac{2\sqrt{2}k}{1+\sqrt{1+2k^2}}\right), \overrightarrow{PN} = \left(-x_0, \frac{2\sqrt{2}k}{1-\sqrt{1+2k^2}}\right),$$

$$\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0 \Rightarrow x_0^2 - 4 = 0,$$

$$\therefore x_0 = 2 \text{ 或 } x_0 = -2,$$

$\therefore$ 存在点 P , 使得无论非零实数 k 怎么变化, 总有 $\angle MPN$ 为直角,

点 P 坐标为 $(2, 0)$ 或 $(-2, 0)$.

【标注】【知识点】向量问题；椭圆的基本量求解