

直线与椭圆的位置关系1

一、直线与椭圆的位置关系

直线与椭圆的位置关系有三种：相交、相切、相离。

1. 判断直线与椭圆关系的步骤

第一步，联立直线方程与椭圆方程；

第二步，消元得出关于 x (或 y)的一元二次方程；

第三步，判断方程的 Δ 。

当 $\Delta > 0$ 时，直线与椭圆相交，直线与椭圆有两个交点；

当 $\Delta = 0$ 时，直线与椭圆相切，直线与椭圆只有一个交点；

当 $\Delta < 0$ 时，直线与椭圆相离，直线与椭圆无交点。

2. 直线与椭圆相交时的常见问题的处理方法

涉及问题	处理方法
弦长	利用根与系数的关系、弦长公式求解
弦的中点	点差法

1. 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ，直线 $x + \sqrt{2}y - 2 = 0$ 与椭圆的位置关系为（ ）。

A. 相交

B. 相切

C. 相离

D. 以上都不对

【答案】 B

【解析】 将直线 $x + \sqrt{2}y - 2 = 0$ 代入椭圆，

$$\text{得 } \frac{(\sqrt{2}y - 2)^2}{2} + y^2 = 1, \text{ 即 } 2y^2 - 2\sqrt{2}y + 1 = 0,$$

$$\therefore \Delta = (2\sqrt{2})^2 - 4 \times 2 \times 1 = 0,$$

$\therefore$ 即直线与椭圆相切。

【标注】 【知识点】 直线和椭圆的位置关系；直线与圆锥曲线的位置关系判断

2. 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ，直线 $y = kx - k$ 与椭圆的位置关系为 ()
- A. 相交 B. 相切 C. 相离 D. 相交或相切

【答案】 A

【解析】 法一：联立直线和椭圆 $\begin{cases} y = kx - k \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (4k^2 + 1)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 4 = 0$ ，
 $\Delta = (-8k^2)^2 - 4 \cdot (4k^2 - 4) = 48k^2 + 16$ ，
 $\therefore$ 对任意的 k ， $\Delta > 0$ 恒成立。
 $\therefore$ 直线和椭圆得位置关系为相交。
 法二： $\therefore$ 直线 $y = kx - k = k(x - 1)$ ，
 $\therefore$ 直线过定点 $(1, 0)$ ，
 又 $\therefore$ 点 $(1, 0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的内部，
 $\therefore$ 直线与椭圆得位置关系为相交。

【标注】 【知识点】直线和椭圆的位置关系；直线与圆锥曲线的位置关系判断

3. 设椭圆方程为 $\frac{y^2}{4} + x^2 = 1$ ，直线 $y = k(x - 2)$ 与椭圆相交，则 k 的取值范围为 _____。

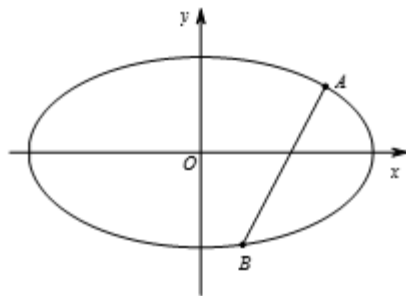
【答案】 $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$

【解析】 联立直线和椭圆 $\begin{cases} y = k(x - 2) \\ \frac{y^2}{4} + x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (k^2 + 4)x^2 - 4k^2x + 4k^2 - 4 = 0$ ，
 $\therefore$ 直线与椭圆相交，
 $\therefore \Delta = (-4k^2)^2 - 4 \cdot (k^2 + 4) \cdot (4k^2 - 4) = -48k^2 + 64 > 0$ ，
 解得 $k \in (-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ 。

【标注】 【知识点】直线和椭圆的位置关系；直线与圆锥曲线的位置关系判断

二、椭圆弦长问题

连结圆锥曲线上两个点的线段称为圆锥曲线的弦，线段的长度简称为弦长。



1. 弦长求解的方法

方法1

将直线方程与圆锥曲线的方程联立，求出两交点的坐标，然后运用两点间的距离公式来求；

方法2

若直线的斜率为 k ，被圆锥曲线截得的弦 AB 两端点坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ，

$$\text{则弦长} |AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta_x}}{|a|}$$

$$\text{或} |AB| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \cdot |y_1 - y_2| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \cdot \sqrt{(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2} = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \cdot \frac{\sqrt{\Delta_y}}{|a|}.$$

具体推导过程：

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (kx_2 - kx_1)^2} = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2|$$

如果 x_1, x_2 满足一元二次方程： $ax^2 + bx + c = 0$ ，

$$\text{则} |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{a}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \quad (\Delta > 0),$$

$$\therefore \text{弦长} |AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta_x}}{|a|}.$$

4. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $A(2, 1)$ ，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，过点 $B(3, 0)$ 的直线 l 与椭圆交于不同的两点 M, N 。

(1) 求椭圆的方程；

(2) 若 $|MN| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，求直线 MN 的方程。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$

(2) $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(x - 3)$ 。

【解析】 (1) 由题意有 $\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ ， $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $a^2 - b^2 = c^2$ ，

解得 $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{3}$,

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 由直线 MN 过点 B 且与椭圆有两交点,

直线 MN 的斜率存在, 设为 $y = k(x - 3)$,

代入椭圆方程整理得 $(2k^2 + 1)x^2 - 12k^2x + 18k^2 - 6 = 0$,

$\Delta = 24 - 24k^2 > 0$, 得 $k^2 < 1$,

设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

则 $x_1 + x_2 = \frac{12k^2}{2k^2 + 1}$, $x_1x_2 = \frac{18k^2 - 6}{2k^2 + 1}$,

$$\begin{aligned} |MN| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(k^2 + 1)(x_1 - x_2)^2} \\ &= \sqrt{(k^2 + 1)[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

解得 $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$,

所求直线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(x - 3)$.

【标注】【知识点】弦长求解问题

5. 若直线 $y = 2x + b$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 相交.

(1) 求 b 的范围.

(2) 当截得弦长最大时, 求 b 的值.

【答案】 (1) $-\sqrt{17} < b < \sqrt{17}$.

(2) 0.

【解析】 (1) 联立 $\begin{cases} y = 2x + b \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 17x^2 + 16bx + 4b^2 - 4 = 0 \\ \Delta = 256b^2 - 17 \times 16(b^2 - 1) \end{cases}$,

$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 < 17 \Rightarrow -\sqrt{17} < b < \sqrt{17}$.

(2) $|PQ| = \sqrt{1 + 2^2}|x_1 - x_2| = \sqrt{5} \cdot \frac{4\sqrt{17 - b^2}}{17}$, 当 $b = 0$ 时, $|PQ|$ 最大.

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系; 最值问题; 弦长求解问题; 直线与圆锥曲线的位置关系判断

6. 已知椭圆 $4x^2 + y^2 = 1$ 及直线 $y = x + m$.

(1) 直线和椭圆有公共点, 求实数 m 的取值范围.

(2) 若 $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 求直线被椭圆截得的弦长.

【答案】 (1) $\left[-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$.
 (2) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

【解析】 (1) 把直线 $y = x + m$ 代入椭圆方程 $4x^2 + y^2 = 1$, 化为: $5x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0$,
 $\therefore$ 直线和椭圆有公共点,

$$\therefore \Delta = 4m^2 - 20(m^2 - 1) \geq 0, \text{ 解得 } -\frac{\sqrt{5}}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\therefore \text{实数 } m \text{ 的取值范围是 } \left[-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right].$$

(2) 设交点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

$$\text{由 } m = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 可得 } 5x^2 + \sqrt{2}x - \frac{1}{2} = 0, \text{ 即 } 10x^2 + 2\sqrt{2}x - 1 = 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{5}, x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{10},$$

$$\therefore |AB| = \sqrt{2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]} = \sqrt{2\left(\frac{2}{25} + \frac{4}{10}\right)} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

【标注】【知识点】弦长求解问题；直线和椭圆的位置关系

7. 椭圆有两顶点 $A(-1, 0)$ 、 $B(1, 0)$, 过其焦点 $F(0, 1)$ 的直线 l 与椭圆交于 C 、 D 两点, 并与 x 轴交于点 C_1 , 当 $|CD| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时, 求直线 l 的方程.

【答案】 $l: y = \pm\sqrt{2}x + 1$.

【解析】 由题意可知椭圆方程为 $\frac{y^2}{2} + x^2 = 1$, 设直线 $l: y = kx + 1$, 联立可得

$$(k^2 + 2)x^2 + 2kx - 1 = 0$$

$$\text{根据弦长公式, } |CD| = \sqrt{1 + k^2} \frac{\sqrt{4k^2 + 4k^2 + 8}}{k^2 + 2} = \frac{2\sqrt{2}k^2 + 2\sqrt{2}}{k^2 + 2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \text{ 解得}$$

$$k = \pm\sqrt{2},$$

$$\text{所以直线 } l: y = \pm\sqrt{2}x + 1.$$

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系

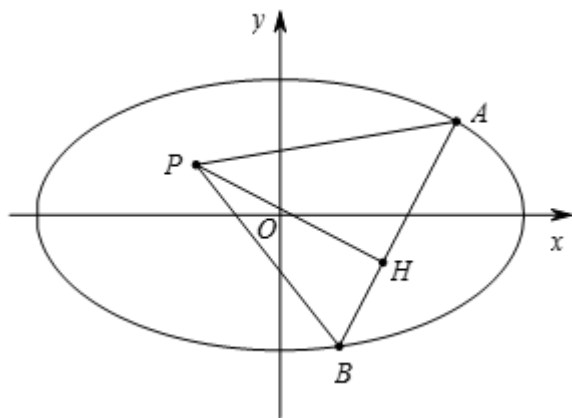
三、椭圆面积问题

1. 三角形面积

设直线 AB 方程为 $y = kx + m$, $P(x_0, y_0)$,

$$\text{则 } d = |PH| = \frac{|kx_0 - y_0 + m|}{\sqrt{1+k^2}},$$

$$\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{1}{2} \sqrt{1+k^2} \frac{\sqrt{\Delta_x}}{|a|} \cdot \frac{|kx_0 - y_0 + m|}{\sqrt{1+k^2}}.$$



8. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)的一个焦点坐标为 $(1, 0)$, 且长轴长是短轴长的 $\sqrt{2}$ 倍.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 O 为坐标原点, 椭圆 C 与直线 $y = kx + 1$ 相交于两个不同的点 A, B , 线段 AB 的中点为 P , 若直线 OP 的斜率为 -1 , 求 $\triangle OAB$ 的面积.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$
 (2) $\frac{2}{3}$.

【解析】 (1) 由题意得 $c = 1$, $a = \sqrt{2}b$, 又 $a^2 - b^2 = 1$, 所以 $b^2 = 1$, $a^2 = 2$.

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $P(x_0, y_0)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 2 \\ y = kx + 1 \end{cases}, \text{ 消去 } y \text{ 得 } (1 + 2k^2)x^2 + 4kx = 0 \dots\dots (*) ,$$

$$\text{解得 } x = 0 \text{ 或 } x = -\frac{4k}{1 + 2k^2}, \text{ 所以 } x_1 = -\frac{4k}{1 + 2k^2},$$

$$\text{所以 } B(-\frac{4k}{1 + 2k^2}, \frac{1 - 2k^2}{1 + 2k^2}), P(-\frac{2k}{1 + 2k^2}, \frac{1}{1 + 2k^2}),$$

因为直线 OP 的斜率为 -1 , 所以 $-\frac{1}{2k} = -1$, 解得 $k = \frac{1}{2}$ (满足 $(*)$ 式判别式大于零).

$$O \text{ 到直线 } l: y = \frac{1}{2}x + 1 \text{ 的距离为 } \frac{2}{\sqrt{5}}, |AB| = \sqrt{x_1^2 + (y_1 - 1)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{5},$$

$$\text{所以 } \triangle OAB \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\sqrt{5} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{3}.$$

【标注】【知识点】面积问题；中点弦问题；直线和椭圆的位置关系

9. 已知点 $P(2,2)$ ，圆 $C: x^2 + y^2 - 8y = 0$ ，过点 P 的动直线 l 与圆 C 交于 A, B 两点，线段 AB 的中点为 M ， O 为坐标原点。

(1) 求 M 的轨迹方程；

(2) 当 $|OP| = |OM|$ 时，求 l 的方程及 $\triangle POM$ 的面积。

【答案】(1) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 2$ 。

(2) $l: y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$ ， $S_{\triangle POM} = \frac{16}{5}$ 。

【解析】(1) 由题意知，圆 $C: x^2 + (y-4)^2 = 16$ ，即 $C(0,4)$ ， $CM \perp AB$ 。

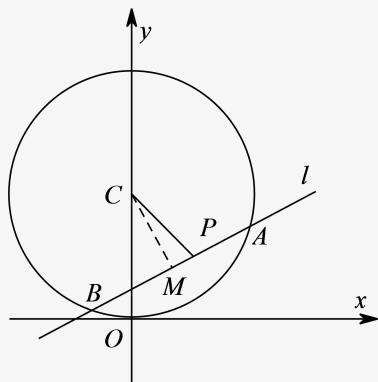
则 $CM^2 + PM^2 = CP^2$ 。

设 $M(x, y)$ ，则有

$$x^2 + (y-4)^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 = 8。$$

整理得： $x^2 - 2x + y^2 - 6y + 8 = 0$ 。

所以， M 点的轨迹方程为 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 2$ 。



(2) 设 M 点的轨迹方程为圆 E ，则圆心 $E(1,3)$ ，半径 $r = \sqrt{2}$ 。

由对称性可知，当 $|OP| = |OM|$ 时， $PM \perp OE$ 于 N 。

所以， $k_{AB} = k_{PM} = -\frac{1}{3}$ 。

故直线 $l: y = -\frac{1}{3}(x-2) + 2 = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$ 。

所以， $ON = \frac{|\frac{8}{3}|}{\sqrt{1 + (\frac{1}{3})^2}} = \frac{4}{5}\sqrt{10}$ 。

则 $EN = OE - ON = \frac{\sqrt{10}}{5}$ ， $NP = \sqrt{r^2 - EN^2} = \frac{2}{5}\sqrt{10}$ 。

故 $S_{\triangle POM} = ON \cdot NP = \frac{4}{5}\sqrt{10} \cdot \frac{2}{5}\sqrt{10} = \frac{16}{5}$ 。

$$\text{由题意, } \begin{cases} a - c = \sqrt{3} - 1, \\ b = \sqrt{2}, \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$$

解得 $a = \sqrt{3}, c = 1$.

即椭圆方程为 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$

(2) 当直线 AB 与 x 轴垂直时, $|AB| = \frac{4}{\sqrt{3}}$,

此时 $S_{\triangle AOB} = \sqrt{3}$ 不符合题意故舍掉;

当直线 AB 与 x 轴不垂直时, 设直线 AB 的方程为: $y = k(x + 1)$,

代入消去 y 得: $(2 + 3k^2)x^2 + 6k^2x + (3k^2 - 6) = 0$.

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则 } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-6k^2}{2+3k^2}, \\ x_1x_2 = \frac{3k^2-6}{2+3k^2}, \end{cases}$$

$$\text{所以 } |AB| = \frac{4\sqrt{3}(k^2 + 1)}{2 + 3k^2}.$$

$$\text{原点到直线的 } AB \text{ 距离 } d = \frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}},$$

$$\text{所以三角形的面积 } S = \frac{1}{2}|AB|d = \frac{1}{2} \frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}} \frac{4\sqrt{3}(k^2 + 1)}{2 + 3k^2}.$$

$$\text{由 } S = \frac{3\sqrt{2}}{4} \Rightarrow k^2 = 2 \Rightarrow k = \pm\sqrt{2},$$

所以直线 $l_{AB}: \sqrt{2}x - y + \sqrt{2} = 0$ 或 $l_{AB}: \sqrt{2}x + y + \sqrt{2} = 0$.

【标注】【知识点】椭圆的定义、标准方程

3. 平行四边形的面积

$$\text{直线 } AB \text{ 为 } y = kx + m_1, \text{ 直线 } CD \text{ 为 } y = kx + m_2, d = |CH| = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{1+k^2}},$$

$$|AB| = \sqrt{1+k^2}|x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1+k^2} \frac{\sqrt{\Delta_x}}{|a|},$$

$$S_{\text{四边形 } ABCD} = |AB| \cdot d = \sqrt{1+k^2} \frac{\sqrt{\Delta_x}}{|a|} \cdot \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{\sqrt{\Delta_x}|m_1 - m_2|}{|a|}.$$

11. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 $F(-2, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 设 O 为坐标原点, T 为直线 $x = -3$ 上一点, 过 F 作 TF 的垂线交椭圆于 P, Q . 当四边形 $OPTQ$ 是平行四边形时, 求四边形 $OPTQ$ 的面积.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) $2\sqrt{3}$.

【解析】(1) 由已知可得 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $c = 2$, 所以 $a = \sqrt{6}$,

又由 $a^2 = 3b^2 = 4 + b^2$, 解得 $b = \sqrt{2}$

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 设 T 点的坐标为 $(-3, m)$, 则直线 TF 的斜率为 $k_{TF} = \frac{m-0}{-3-(-2)} = -m$.

当 $m \neq 0$ 时, 直线 PQ 的斜率为 $\frac{1}{m}$, 直线 PQ 的方程为 $x = my - 2$,

当 $m = 0$ 时, 直线 PQ 的方程为 $x = -2$, 也符合 $x = my - 2$ 的形式,

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 将直线 PQ 的方程与椭圆 C 的方程联立,

$$\begin{cases} x = my - 2, \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1. \end{cases}, (m^2 + 3)y^2 - 4my - 2 = 0$$

$$\Delta = 16m^2 + 8(m^2 + 3) > 0,$$

$$\text{所以 } y_1 + y_2 = \frac{4m}{m^2 + 3}, y_1 \cdot y_2 = \frac{-2}{m^2 + 3},$$

$$x_1 + x_2 = m(y_1 + y_2) - 4 = \frac{-12}{m^2 + 3},$$

因为四边形 $OPTQ$ 是平行四边形, 所以 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{QT}$, 即

$$(x_1, y_1) = (-3 - x_2, m - y_2).$$

$$\text{所以 } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-12m}{m^2 + 3} = -3, \\ y_1 + y_2 = \frac{4m}{m^2 + 3} = m. \end{cases}$$

解得, $m = \pm 1$,

因此四边形 $OPTQ$ 的面积

$$S_{OPTQ} = 2S_{OPQ} = 2 \times \frac{1}{2} \cdot |OF| \cdot |y_1 - y_2| = 2\sqrt{\left(\frac{4m}{m^2 + 3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{-2}{m^2 + 3}} = 2\sqrt{3}$$

【标注】【知识点】面积问题

四、面积范围最值问题

首选均值不等式或对勾函数, 其实用二次函数配方法, 最后选导数思想

均值不等式: $a^2 + b^2 \geq 2ab (a, b \in \mathbf{R})$,

变式: $a + b \geq 2\sqrt{ab} (a, b \in \mathbf{R}^+)$, $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 (a, b \in \mathbf{R}^+)$,

作用: 当两个正数的积为定值时求出这两个正数的和的最小值;

当两个正数的和为定值时求出这两个正数的积的最大值.

注意: 应用均值不等式求解最值时, 应注意“一”正“二”定“三”相等.

以下是圆锥曲线经常用到的均值不等式形式:

$$(1) S = \frac{2t}{t^2 + 64} = \frac{2}{t + \frac{64}{t}}, \text{ (注意分 } t = 0, t > 0, t < 0 \text{ 三种情况讨论)}$$

$$(2) |AB|^2 = 3 + \frac{12k^2}{9t^4 + 6k^2 + 1} = 3 + \frac{12}{9k^2 + \frac{1}{k^2} + 6} \leq 3 + \frac{12}{2 \times 3 + 6}, \text{ 当且仅当 } 9k^2 = \frac{1}{k^2} \text{ 时, 等号成立.}$$

$$(3) |PQ|^2 = 34 + 25 \cdot \frac{25y_0^2}{9x_0^2} + 9 \cdot \frac{9x_0^2}{25y_0^2} \geq 34 + 2\sqrt{25 \cdot \frac{25y_0^2}{9x_0^2} \times 9 \cdot \frac{9x_0^2}{25y_0^2}} = 64,$$

当且仅当 $25 \cdot \frac{25y_0^2}{9x_0^2} = 9 \cdot \frac{9x_0^2}{25y_0^2}$ 时等号成立.

$$(4) S = \frac{1}{2} \sqrt{12 - \frac{3}{2}m^2} \cdot \frac{|m|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}m^2(-m^2 + 8)} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \times \frac{m^2 - m^2 + 8}{2} = \sqrt{2},$$

当且仅当 $m^2 = -m^2 + 8$ 时, 等号成立.

$$(5)$$

$$S = 2\sqrt{2} \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{2k^2 - m_1^2 + 1}}{1+2k^2} \cdot \frac{|2m_1|}{\sqrt{1+k^2}} = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{(2k^2 - m_1^2 + 1)m_1^2}}{1+2k^2} \leq 4\sqrt{2} \frac{\frac{2k^2 - m_1^2 + 1 + m_1^2}{2}}{1+2k^2} = 2\sqrt{2}$$

当且仅当 $2k^2 + 1 = 2m_1^2$ 时等号成立.

12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦点为 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$, 点 P 是椭圆 C 上的一点, PF_1 与 y 轴的交点 Q 恰为 PF_1 的中点, $|OQ| = \frac{3}{4}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若点 A 为椭圆的右顶点, 过焦点 F_1 的直线与椭圆 C 交于不同的两点 M, N , 求 $\triangle AMN$ 面积的取值范围.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$
 (2) $(0, \frac{9}{2}]$

【解析】 (1) 因为 Q 为 PF_1 的中点, O 为 F_1F_2 的中点, $|OQ| = \frac{3}{4}$,
 所以 $PF_2 \parallel OQ$, 且 $|PF_2| = 2|OQ| = \frac{3}{2}$. 所以 $PF_2 \perp F_1F_2$.
 因为 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$,
 所以 $|PF_1| = \sqrt{|F_1F_2|^2 + |PF_2|^2} = \frac{5}{2}$, 因为 $2a = |PF_1| + |PF_2| = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$,
 所以 $a = 2, b^2 = a^2 - c^2 = 3$. 所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.
 (2) 设过点 $F_1(-1, 0)$ 的直线 l 的斜率为 k , 显然 $k \neq 0$.
 (1) 当 k 不存在时, 直线 l 的方程为 $x = -1$,
 所以 $|MN| = 3$. 因为 $A(2, 0)$, 所以 $S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2}|MN||AF_1| = \frac{9}{2}$.

(2) 当 k 存在时, 设直线 l 的方程为 $y = k(x + 1)$.

$$\text{由} \begin{cases} y = k(x + 1) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{消} y \text{并整理得: } (3 + 4k^2)x^2 + 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0.$$

$$\text{设} M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), \text{则} x_1 + x_2 = \frac{-8k^2}{3 + 4k^2}, x_1 \cdot x_2 = \frac{4k^2 - 12}{3 + 4k^2}.$$

$$\text{因为} |MN| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1 + k^2)[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]} \\ = \sqrt{(1 + k^2)\left[\frac{64k^4}{(3 + 4k^2)^2} - \frac{4(4k^2 - 12)}{3 + 4k^2}\right]} = \frac{12(k^2 + 1)}{3 + 4k^2},$$

$$\text{又因为点} A(2, 0) \text{到直线} y = k(x + 1) \text{的距离} d = \frac{|3k|}{\sqrt{k^2 + 1}},$$

$$\text{所以} S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} \cdot d \cdot |MN| = \frac{1}{2} \cdot \frac{12(k^2 + 1)}{3 + 4k^2} \cdot \frac{|3k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 18 \cdot \frac{|k|\sqrt{k^2 + 1}}{3 + 4k^2}$$

$$= 18 \sqrt{\frac{k^2(k^2 + 1)}{(3 + 4k^2)^2}} = 18 \sqrt{\frac{k^4 + k^2}{9 + 24k^2 + 16k^4}} = 18 \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{k^2}}{\frac{9}{k^4} + \frac{24}{k^2} + 16}},$$

$$\text{设} m = \frac{1}{k^2}, \text{则}$$

$$S_{\triangle AMN} = 18 \sqrt{\frac{1 + m}{9m^2 + 24m + 16}} = 18 \sqrt{\frac{1}{\frac{9m^2 + 24m + 16}{m+1}}} = 18 \sqrt{\frac{1}{\frac{9(m+1)^2 + 6(m+1) + 1}{m+1}}} = 18 \sqrt{\frac{1}{9(m+1) + \frac{1}{m+1} + 6}}$$

因为 $m > 0$, 所以 $m + 1 > 1$. 因为函数 $f(x) = 9x + \frac{1}{x}$ 在 $(\frac{1}{3}, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{所以} 9(m + 1) + \frac{1}{m + 1} > 10.$$

$$\text{所以} 9(m + 1) + \frac{1}{m + 1} + 6 > 16. \text{所以} \frac{1}{9(m + 1) + \frac{1}{m + 1} + 6} < \frac{1}{16}.$$

$$\text{所以} \sqrt{\frac{1}{9(m + 1) + \frac{1}{m + 1} + 6}} < \frac{1}{4}. \text{所以} 18 \sqrt{\frac{1}{9(m + 1) + \frac{1}{m + 1} + 6}} < \frac{9}{2},$$

$$\text{所以} 0 < S_{\triangle AMN} < \frac{9}{2}. \text{综合(1)(2)可知} 0 < S_{\triangle AMN} \leq \frac{9}{2}.$$

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系；椭圆的标准方程；面积问题

13. 在平面直角坐标系 xOy 中, 动点 P 到两点 $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$ 的距离之和等于4, 设点 P 的轨迹为曲线 C , 直线 l 过点 $E(-1, 0)$ 且与曲线 C 交于 A, B 两点.

(1) 求曲线 C 的轨迹方程;

(2) 是否存在 $\triangle AOB$ 面积的最大值, 若存在, 求出 $\triangle AOB$ 的面积; 若不存在, 说明理由.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$

(2) 存在, 最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}.$

【解析】 (1) 由椭圆定义可知, 点 P 的轨迹 C 是以

$(-\sqrt{3}, 0), (\sqrt{3}, 0)$ 为焦点, 长半轴长为2的椭圆.

故曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 存在 $\triangle AOB$ 面积的最大值.

因为直线 l 过点 $E(-1, 0)$, 可设直线 l 的方程为 $x = my - 1$ 或 $y = 0$ (舍).

$$\text{则} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ x = my - 1. \end{cases}$$

整理得 $(m^2 + 4)y^2 - 2my - 3 = 0$.

由 $\Delta = (2m)^2 + 12(m^2 + 4) > 0$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

$$\text{解得 } y_1 = \frac{m + 2\sqrt{m^2 + 3}}{m^2 + 4}, \quad y_2 = \frac{m - 2\sqrt{m^2 + 3}}{m^2 + 4}.$$

$$\text{则 } |y_2 - y_1| = \frac{4\sqrt{m^2 + 3}}{m^2 + 4}.$$

$$\text{因为 } S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |OE| \cdot |y_1 - y_2| = \frac{2\sqrt{m^2 + 3}}{m^2 + 4} = \frac{2}{\sqrt{m^2 + 3} + \frac{1}{\sqrt{m^2 + 3}}}.$$

设 $g(t) = t + \frac{1}{t}$, $t = \sqrt{m^2 + 3}$, $t \geq \sqrt{3}$.

则 $g(t)$ 在区间 $[\sqrt{3}, +\infty)$ 上为增函数.

$$\text{所以 } g(t) \geq \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{所以 } S_{\triangle AOB} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 当且仅当 } m = 0 \text{ 时取等号, 即 } (S_{\triangle AOB})_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{所以 } S_{\triangle AOB} \text{ 的最大值为 } \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系；面积问题

14. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 点 P 在椭圆 E 上, 且 $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 $4\sqrt{2} + 4$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 若直线 $l: y = x + m$ 与椭圆 E 交于 A, B 两点, O 为坐标原点, 求 $\triangle AOB$ 面积的最大值.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

(2) $2\sqrt{2}$

【解析】 (1) 由题意知 $\begin{cases} 2a + 2c = 4\sqrt{2} + 4, \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} a = 2\sqrt{2}, \\ c = 2, \end{cases}$ 所以 $b = 2$ 所以椭圆的方程为:

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$$

(2) $\begin{cases} y = x + m \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$ 即消去 y 并整理得: $3x^2 + 4mx + 2m^2 - 8 = 0$.

$$\Delta = 16m^2 - 12(2m^2 - 8) = 96 - 8m^2 > 0$$

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-4m}{3}, \\ x_1 x_2 = \frac{2m^2 - 8}{3}, \end{cases}$$

$$\text{所以弦长 } |AB| = \sqrt{2}|x_1 - x_2| = \sqrt{2(x_1 + x_2)^2 - 8x_1 x_2} = \frac{4}{3}\sqrt{12 - m^2}$$

$$\text{原点 } O \text{ 到直线 } l \text{ 的距离为 } d = \frac{|m|}{\sqrt{2}}$$

$$\text{所以 } S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}d|AB| = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{12m^2 - m^4}{2}}$$

$$\text{所以当 } m^2 = 6 \text{ 时, } S_{\triangle AOB} \text{ 的最大值为 } 2\sqrt{2}.$$

【标注】【知识点】最值问题；面积问题；椭圆的基本量求解

15. 已知菱形 $ABCD$ 的顶点 A, C 在椭圆 $x^2 + 3y^2 = 4$ 上，对角线 BD 所在直线的斜率为 1.

(1) 当直线 BD 过点 $(0, 1)$ 时，求直线 AC 的方程.

(2) 当 $\angle ABC = 60^\circ$ 时，求菱形 $ABCD$ 面积的最大值.

【答案】 (1) $x + y + 2 = 0$.

(2) $4\sqrt{3}$.

【解析】 (1) 由题意得直线 BD 的方程为 $y = x + 1$.

因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $AC \perp BD$.

于是可设直线 AC 的方程为 $y = -x + n$. 由 $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 4 \\ y = -x + n \end{cases}$ 得

$$4x^2 - 6nx + 3n^2 - 4 = 0.$$

因为 AC 在椭圆上，所以 $\Delta = -12n^2 + 64 > 0$ ，解得 $-\frac{4\sqrt{3}}{3} < n < \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

设 AC 两点坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ，则 $x_1 + x_2 = \frac{3n}{2}$ ， $x_1 x_2 = \frac{3n^2 - 4}{4}$ ，

$y_1 = -x_1 + n$ ， $y_2 = -x_2 + n$. 所以 $y_1 + y_2 = \frac{n}{2}$.

所以 AC 的中点坐标为 $(\frac{3n}{4}, \frac{n}{4})$.

由四边形 $ABCD$ 为菱形可知，点 $(\frac{3n}{4}, \frac{n}{4})$ 在直线 $y = x + 1$ 上，

所以 $\frac{n}{4} = \frac{3n}{4} + 1$ ，解得 $n = -2$.

所以直线 AC 的方程为 $y = -x - 2$ ，即 $x + y + 2 = 0$.

(2) 因为四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $\angle ABC = 60^\circ$ ，所以 $|AB| = |BC| = |CA|$.

所以菱形 $ABCD$ 的面积 $S = \frac{\sqrt{3}}{2}|AC|^2$.

由 (1) 可得 $|AC|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \frac{-3n^2 + 16}{2}$ ，

所以 $S = \frac{\sqrt{3}}{4}(-3n^2 + 16) \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3} < n < \frac{4\sqrt{3}}{3} \right)$.

所以当 $n = 0$ 时，菱形 $ABCD$ 的面积取得最大值 $4\sqrt{3}$.

【标注】【知识点】最值问题；中点弦问题；直线和椭圆的位置关系