

直线与椭圆的位置关系1

一、 直线与椭圆的位置关系

直线与椭圆的位置关系有三种：相交、相切、相离。

1. 判断直线与椭圆关系的步骤

- 第一步，联立直线方程与椭圆方程；
- 第二步，消元得出关于 x (或 y)的一元二次方程；
- 第三步，判断方程的 Δ .
- 当 $\Delta > 0$ 时，直线与椭圆相交，直线与椭圆有两个交点；
- 当 $\Delta = 0$ 时，直线与椭圆相切，直线与椭圆只有一个交点；
- 当 $\Delta < 0$ 时，直线与椭圆相离，直线与椭圆无交点.

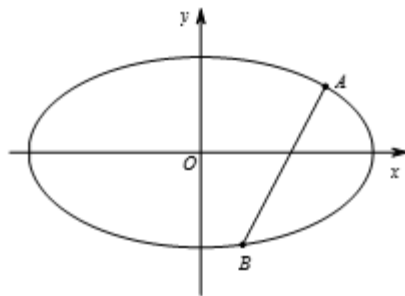
2. 直线与椭圆相交时的常见问题的处理方法

涉及问题	处理方法
弦长	利用根与系数的关系、弦长公式求解
弦的中点	点差法

- 1. 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ，直线 $x + \sqrt{2}y - 2 = 0$ 与椭圆的位置关系为（ ）。
A. 相交 B. 相切 C. 相离 D. 以上都不对
- 2. 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ，直线 $y = kx - k$ 与椭圆的位置关系为（ ）
A. 相交 B. 相切 C. 相离 D. 相交或相切
- 3. 设椭圆方程为 $\frac{y^2}{4} + x^2 = 1$ ，直线 $y = k(x - 2)$ 与椭圆相交，则 k 的取值范围为 _____。

二、 椭圆弦长问题

连结圆锥曲线上两个点的线段称为圆锥曲线的弦，线段的长度简称为弦长。



1. 弦长求解的方法

方法1

将直线方程与圆锥曲线的方程联立，求出两交点的坐标，然后运用两点间的距离公式来求；

方法2

若直线的斜率为 k ，被圆锥曲线截得的弦 AB 两端点坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ，

$$\text{则弦长} |AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta_x}}{|a|}$$

$$\text{或} |AB| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \cdot |y_1 - y_2| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \cdot \sqrt{(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2} = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \cdot \frac{\sqrt{\Delta_y}}{|a|}.$$

具体推导过程：

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (kx_2 - kx_1)^2} = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2|$$

如果 x_1, x_2 满足一元二次方程： $ax^2 + bx + c = 0$ ，

$$\text{则} |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{a}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \quad (\Delta > 0),$$

$$\therefore \text{弦长} |AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta_x}}{|a|}.$$

4. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $A(2, 1)$ ，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，过点 $B(3, 0)$ 的直线 l 与椭圆交于不同的两点 M, N 。

(1) 求椭圆的方程；

(2) 若 $|MN| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，求直线 MN 的方程。

5. 若直线 $y = 2x + b$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 相交。

(1) 求 b 的范围。

(2) 当截得弦长最大时，求 b 的值。

6. 已知椭圆 $4x^2 + y^2 = 1$ 及直线 $y = x + m$ 。

(1) 直线和椭圆有公共点, 求实数 m 的取值范围.

(2) 若 $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 求直线被椭圆截得的弦长.

7. 椭圆有两顶点 $A(-1, 0)$ 、 $B(1, 0)$, 过其焦点 $F(0, 1)$ 的直线 l 与椭圆交于 C 、 D 两点, 并与 x 轴交于点 C_1 , 当 $|CD| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时, 求直线 l 的方程.

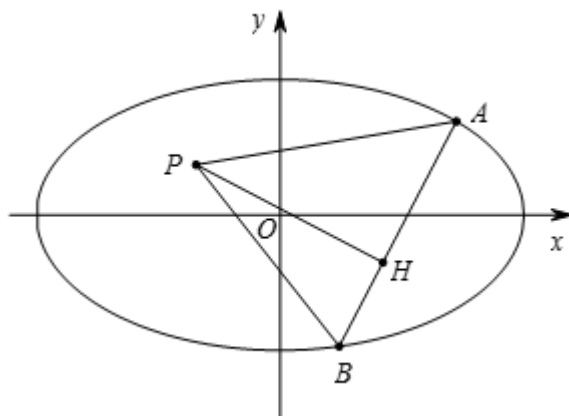
三、椭圆面积问题

1. 三角形面积

设直线 AB 方程为 $y = kx + m$, $P(x_0, y_0)$,

则 $d = |PH| = \frac{|kx_0 - y_0 + m|}{\sqrt{1 + k^2}}$,

$\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2}|AB| \cdot d = \frac{1}{2}\sqrt{1 + k^2} \frac{\sqrt{\Delta_x}}{|a|} \cdot \frac{|kx_0 - y_0 + m|}{\sqrt{1 + k^2}}$.



8. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)的一个焦点坐标为 $(1, 0)$, 且长轴长是短轴长的 $\sqrt{2}$ 倍.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 O 为坐标原点, 椭圆 C 与直线 $y = kx + 1$ 相交于两个不同的点 A, B , 线段 AB 的中点为 P , 若直线 OP 的斜率为 -1 , 求 $\triangle OAB$ 的面积.

9. 已知点 $P(2, 2)$, 圆 $C: x^2 + y^2 - 8y = 0$, 过点 P 的动直线 l 与圆 C 交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 M , O 为坐标原点.

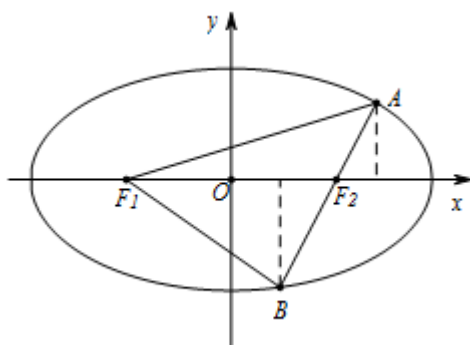
(1) 求 M 的轨迹方程;

(2) 当 $|OP| = |OM|$ 时, 求 l 的方程及 $\triangle POM$ 的面积.

2. 焦点三角形的面积

直线 AB 过焦点 F_2 , $\triangle ABF_1$ 的面积为:

$$S_{\triangle ABF_1} = \frac{1}{2} |F_1 F_2| \cdot |y_1 - y_2| = c |y_1 - y_2| = \frac{c \sqrt{\Delta_y}}{|a|}.$$



10. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 右顶点与右焦点的距离为 $\sqrt{3} - 1$, 短轴长为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 过左焦点 F 的直线与椭圆分别交于 A 、 B 两点, 若三角形 OAB 的面积为 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$, 求直线 AB 的方程.

3. 平行四边形的面积

$$\begin{aligned} \text{直线 } AB \text{ 为 } y = kx + m_1, \text{ 直线 } CD \text{ 为 } y = kx + m_2, d = |CH| &= \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{1 + k^2}}, \\ |AB| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| &= \sqrt{1 + k^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{1 + k^2} \frac{\sqrt{\Delta_x}}{|a|}, \\ S_{\text{四边形 } ABCD} = |AB| \cdot d &= \sqrt{1 + k^2} \frac{\sqrt{\Delta_x}}{|a|} \cdot \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{\sqrt{\Delta_x} |m_1 - m_2|}{|a|}. \end{aligned}$$

11. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点为 $F(-2, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 设 O 为坐标原点, T 为直线 $x = -3$ 上一点, 过 F 作 TF 的垂线交椭圆于 P, Q . 当四边形 $OPTQ$ 是平行四边形时, 求四边形 $OPTQ$ 的面积.

四、 面积范围最值问题

首选均值不等式或对勾函数, 其实用二次函数配方法, 最后选导数思想

均值不等式: $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ($a, b \in \mathbf{R}$),

变式: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ($a, b \in \mathbf{R}^+$), $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ($a, b \in \mathbf{R}^+$),

作用: 当两个正数的积为定值时求出这两个正数的和的最小值;

当两个正数的和为定值时求出这两个正数的积的最大值.

注意: 应用均值不等式求解最值时, 应注意“一”正“二”定“三”相等.

以下是圆锥曲线经常用到的均值不等式形式：

$$(1) S = \frac{2t}{t^2 + 64} = \frac{2}{t + \frac{64}{t}}, \quad (\text{注意分 } t = 0, t > 0, t < 0 \text{ 三种情况讨论})$$

$$(2) |AB|^2 = 3 + \frac{12k^2}{9t^4 + 6k^2 + 1} = 3 + \frac{12}{9k^2 + \frac{1}{k^2} + 6} \leq 3 + \frac{12}{2 \times 3 + 6}, \quad \text{当且仅当 } 9k^2 = \frac{1}{k^2} \text{ 时, 等号成立.}$$

$$(3) |PQ|^2 = 34 + 25 \cdot \frac{25y_0^2}{9x_0^2} + 9 \cdot \frac{9x_0^2}{25y_0^2} \geq 34 + 2\sqrt{25 \cdot \frac{25y_0^2}{9x_0^2} \times 9 \cdot \frac{9x_0^2}{25y_0^2}} = 64,$$

$$\text{当且仅当 } 25 \cdot \frac{25y_0^2}{9x_0^2} = 9 \cdot \frac{9x_0^2}{25y_0^2} \text{ 时等号成立.}$$

$$(4) S = \frac{1}{2} \sqrt{12 - \frac{3}{2}m^2} \cdot \frac{|m|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}m^2(-m^2 + 8)} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \times \frac{m^2 - m^2 + 8}{2} = \sqrt{2},$$

$$\text{当且仅当 } m^2 = -m^2 + 8 \text{ 时, 等号成立.}$$

(5)

$$S = 2\sqrt{2} \sqrt{1 + k^2} \frac{\sqrt{2k^2 - m_1^2 + 1}}{1 + 2k^2} \cdot \frac{|2m_1|}{\sqrt{1 + k^2}} = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{(2k^2 - m_1^2 + 1)m_1^2}}{1 + 2k^2} \leq 4\sqrt{2} \frac{\frac{2k^2 - m_1^2 + 1 + m_1^2}{2}}{1 + 2k^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{当且仅当 } 2k^2 + 1 = 2m_1^2 \text{ 时等号成立.}$$

12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦点为 $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$, 点 P 是椭圆 C 上的一点, PF_1 与 y 轴的交点 Q 恰为 PF_1 的中点, $|OQ| = \frac{3}{4}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若点 A 为椭圆的右顶点, 过焦点 F_1 的直线与椭圆 C 交于不同的两点 M, N , 求 $\triangle AMN$ 面积的取值范围.

13. 在平面直角坐标系 xOy 中, 动点 P 到两点 $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$ 的距离之和等于 4, 设点 P 的轨迹为曲线 C , 直线 l 过点 $E(-1, 0)$ 且与曲线 C 交于 A, B 两点.

(1) 求曲线 C 的轨迹方程;

(2) 是否存在 $\triangle AOB$ 面积的最大值, 若存在, 求出 $\triangle AOB$ 的面积; 若不存在, 说明理由.

14. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 点 P 在椭圆 E 上, 且 $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 $4\sqrt{2} + 4$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 若直线 $l: y = x + m$ 与椭圆 E 交于 A, B 两点, O 为坐标原点, 求 $\triangle AOB$ 面积的最大值.

15. 已知菱形 $ABCD$ 的顶点 A, C 在椭圆 $x^2 + 3y^2 = 4$ 上, 对角线 BD 所在直线的斜率为 1.

(1) 当直线 BD 过点 $(0, 1)$ 时, 求直线 AC 的方程.

(2) 当 $\angle ABC = 60^\circ$ 时, 求菱形 $ABCD$ 面积的最大值.

