

直线与圆锥曲线的位置关系

一、直线与双曲线的位置关系

1. 位置关系判断

直线与双曲线的位置关系可分为：相交、相切、相离；

对于双曲线来说，平行于渐近线的直线与双曲线只有一个交点，但并不相切；

直线与双曲线位置关系的判定条件可归纳为：

设直线 $l: Ax + By + C = 0$ ，双曲线 $C: f(x, y) = 0$ ，由
$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$$

消去 y （或消去 x ）得： $ax^2 + bx + c = 0$ 。

若 $a \neq 0$ ， $\Delta = b^2 - 4ac$ ，

$\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 相交，直线与双曲线有两个交点；

$\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 相离，直线与双曲线无交点；

$\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 相切，直线与双曲线有一个交点。

若 $a = 0$ ，得到一个一次方程，与双曲线相交，有一个交点， l 与双曲线的渐近线平行。

2. 典型例题

1. 已知双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ，右焦点坐标为 $(2, 0)$ ， O 为坐标原点。

(1) 求双曲线 C 的标准方程。

(2) 若直线 $l: y = kx + \sqrt{2}$ 与双曲线 C 恒有两个不同的交点 A 和 B ，且 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} > 0$ ，试求实数 k 的取值范围。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 。

(2) $\left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ 。

【解析】 (1) 依题意，设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，则 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3}$ ， $c = 2$ 。

又 $a^2 + b^2 = c^2$ ，

$\therefore a^2 = 3, b^2 = 1$ ，

即双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 。

(2)

$$\text{联立} \begin{cases} y = kx + \sqrt{2} \\ \frac{x^2}{3} - y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 消去 } y \text{ 得 }, (1 - 3k^2)x^2 - 6\sqrt{2}kx - 9 = 0,$$

$\therefore$ 直线 l 与双曲线 C 恒有两个不同的交点,

$$\begin{cases} 1 - 3k^2 \neq 0 \\ \Delta = (-6\sqrt{2}k)^2 + 36(1 - 3k^2) = 36(1 - k^2) > 0 \end{cases}$$

$$\therefore k^2 \neq \frac{1}{3} \text{ 且 } k^2 < 1, \text{ ①}$$

设 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{6\sqrt{2}k}{1 - 3k^2}, x_1x_2 = \frac{-9}{1 - 3k^2},$$

$$\therefore \vec{OA} \cdot \vec{OB} > 0,$$

$$\text{即 } x_1x_2 + y_1y_2 = (k^2 + 1)x_1x_2 + \sqrt{2}k(x_1 + x_2) + 2 = \frac{3k^2 + 7}{3k^2 - 1} > 0,$$

$$\therefore k^2 > \frac{1}{3}, \text{ ②}$$

$$\text{综上①②得, } -1 < k < -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 或 } \frac{\sqrt{3}}{3} < k < 1.$$

【标注】【知识点】向量问题

备注：2019-2020学年11月天津和平区天津市耀华中学高二上学期月考第19题12分

2. 已知点 $D(1, \sqrt{2})$ 在双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上, 且双曲线的一条渐近线的方程是 $\sqrt{3}x + y = 0$.

(1) 求双曲线 C 的方程.

(2) 若过点 $(0, 1)$ 且斜率为 k 的直线 l 与双曲线 C 有两个不同的交点, 求实数 k 的取值范围.

(3) 设 (2) 中直线 l 与双曲线 C 交于 A 、 B 两个不同点, 若以线段 AB 为直径的圆经过坐标原点, 求实数 k 的值.

【答案】 (1) $3x^2 - y^2 = 1$.

(2) $k \in (-\sqrt{6}, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \sqrt{6})$.

(3) $k = \pm 1$.

【解析】 (1) 由题知: 有 $\begin{cases} \frac{1}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1 \\ \frac{b}{a} = \sqrt{3} \end{cases},$

$$\text{解得 } a^2 = \frac{1}{3}, b^2 = 1,$$

因此所求双曲线 C 的方程是 $3x^2 - y^2 = 1$.

(2) $\therefore$ 直线 l 过点 $(0, 1)$, 且斜率为 k ,

$$\therefore \text{直线 } l: y = kx + 1, \text{ 代入双曲线方程得 } (3 - k^2)x^2 - 2kx - 2 = 0,$$

又直线 l 与双曲线 C 有两个不同交点,

$$\therefore 3 - k^2 \neq 0 \text{ 且 } \Delta = (-2k)^2 + 8(3 - k^2) > 0,$$

$$\text{解得 } k \in (-\sqrt{6}, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \sqrt{6}).$$

(3) 设点 A 、 B 的坐标为 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ,

$$\text{由(2)可得 } x_1 + x_2 = \frac{2k}{3 - k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{-2}{3 - k^2},$$

又以线段 AB 为直径的圆经过坐标原点,

$$\text{则 } k_{OA} k_{OB} = -1, \text{ 即 } x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0,$$

$$\therefore x_1 x_2 + (kx_1 + 1)(kx_2 + 1) = 0,$$

$$\text{即 } (k^2 + 1)x_1 x_2 + k(x_1 + x_2) + 1 = 0,$$

$$\therefore \frac{-2(1 + k^2)}{3 - k^2} + \frac{2k^2}{3 - k^2} + 1 = 0,$$

$$\text{解得 } k = \pm 1,$$

$$\text{又 } k = \pm 1, \text{ 满足 } 3 - k^2 \neq 0, \text{ 且 } \Delta = (-2k)^2 + 8(3 - k^2) > 0,$$

$$\therefore \text{所求实数 } k = \pm 1.$$

【标注】【知识点】双曲线的基本量求解；双曲线与圆结合；直线与圆锥曲线的位置关系判断

备注：2018-2019学年12月天津和平区天津市第二十一中学高二上学期月考第17题12分

3. 典型例题

3. 直线 $y = kx + 2$ 与双曲线 $x^2 - y^2 = 6$ 的右支交于不同两点, 那么 k 的取值范围是().

- A. $\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{\sqrt{15}}{3}\right)$
B. $\left(0, \frac{\sqrt{15}}{3}\right)$
C. $\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}, 0\right)$
D. $\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}, -1\right)$

【答案】 D

【解析】
$$\begin{cases} y = kx + 2 \\ x^2 - y^2 = 6 \end{cases}.$$

$$\text{联立可得 } (1 - k^2)x^2 - 4kx - 10 = 0.$$

$$\therefore \Delta = 16k^2 + 40(1 - k^2) > 0, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{10}{k^2 - 1} > 0.$$

$$x_1 + x_2 = \frac{4k}{1 - k^2} > 0,$$

$$\text{解不等式组得 } -\frac{\sqrt{15}}{3} < k < -1.$$

【标注】【知识点】直线和双曲线的位置关系

备注：2018-2019学年12月天津河西区天津市微山路中学高二上学期月考第8题3分

4. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 过点 $A(0, 2)$ ，且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。
- (1) 求椭圆 E 的方程。
- (2) 已知双曲线 C 的离心率是椭圆 E 的离心率的倒数，其顶点为椭圆的焦点，求双曲线 C 的方程。
- (3) 设直线 $l: y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$ 与双曲线交于 M, N 两点，过 $P(5, \sqrt{3})$ 的直线 l 与线段 MN 有公共点，求直线 l 的倾斜角的取值范围。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 或 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ 。
 (2) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ 或 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$ 。
 (3) $(0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{2\pi}{3}, \pi)$ 。

【解析】 (1) ①当 $a > b$ 时：由题意得 $b = 2, e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，
 解得 $a = 2\sqrt{2}, c = 2$ ，
 故椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 。
 ②当 $b > a$ 时：由题意得 $b = 2, e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，
 解得 $a = \sqrt{2}, c = \sqrt{2}$ ，
 故椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ 。
 综①②所述可得椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 或 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ 。

(2) ①当 $a > b$ 时：由题意得双曲线 C 的离心率为 $e' = \frac{c'}{a'} = \frac{1}{e} = \sqrt{2}, a' = c = 2$ ，
 则 $c' = 2\sqrt{2}$ ，所以 $b' = 2$ ，
 故双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ 。
 ②当 $b > a$ 时：由题意得双曲线 C 的离心率为 $e' = \frac{c'}{a'} = \frac{1}{e} = \sqrt{2}, a' = c = \sqrt{2}$ ，
 则 $c' = 2\sqrt{2}$ ，
 所以 $b' = \sqrt{6}$ ，
 故双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$ ；
 综①②所述可得椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ 或 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$ 。

(3) ①当 $a > b$ 时：联立 $\begin{cases} x^2 - y^2 - 4 = 0 \\ y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} \end{cases}$ ，

$$\text{得 } -2x^2 + 12x - 16 = 0,$$

$$\text{解得 } x = 2 \text{ 或 } 4, \text{ 则 } M(2, 0), N(4, 2\sqrt{3}),$$

$$\text{则 } k_{PM} = \frac{\sqrt{3}}{3}, k_{PN} = -\sqrt{3}, \text{ 则 } k_l \in \left[-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right],$$

$$\text{即直线 } l \text{ 的倾斜角的取值范围为 } \left(0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right).$$

$$\text{②当 } b > a \text{ 时: 联立 } \begin{cases} 3x^2 - y^2 - 6 = 0 \\ y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} \end{cases}, \text{ 得 } x = \frac{3}{2} \text{ (不合题意舍去)},$$

$$\text{联立①②可得直线 } l \text{ 的倾斜角的取值范围为 } \left(0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right).$$

【标注】【知识点】倾斜角和斜率的概念

备注：2017-2018学年天津河西区天津市新华中学高二上学期中文科第16题12分

二、直线与抛物线的位置关系

1. 位置关系判断

直线与抛物线的位置关系可分为：相交、相切、相离。

对于抛物线来说，平行于对称轴的直线与抛物线相交于一点，但并不是相切；

直线与抛物线位置关系的判定条件可归纳为：

$$\text{设直线 } l: Ax + By + C = 0, \text{ 抛物线 } C: f(x, y) = 0, \text{ 由 } \begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$$

消去 y (或消去 x) 得: $ax^2 + bx + c = 0$.

$$\text{若 } a \neq 0, \Delta = b^2 - 4ac,$$

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \text{相交};$$

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow \text{相离};$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \text{相切}.$$

若 $a = 0$, 得到一个一次方程, 与抛物线相交, 有一个交点, l 与抛物线的对称轴平行.

2. 典型例题

5. 已知曲线 E 上任意一点 P 到点 $F(2, 0)$ 的距离与它到直线 $l: x = -2$ 的距离相等, 若过 F 的两条直线 l_1, l_2 的斜率之积为 1, 且 l_1, l_2 分别交曲线 E 于 A, B 两点和 C, D 两点.

(1) 求曲线 E 的方程.

(2) 求 $|AB| + |CD|$ 的最小值.

【答案】(1) $y^2 = 4x$.

(2) 16.

【解析】(1) 因为点 P 到点 F 的距离比它到直线 $l: x = -2$ 的距离小,
所以点 P 到 F 的距离与它到直线 $l: x = -1$ 的距离相等,
所以点 P 的轨迹 E 是以 F 为焦点, l' 为准线的抛物线,
所以曲线 E 的方程为 $y^2 = 4x$.

(2) 由题意知, l_1, l_2 的斜率存在且均不为零,

设 l_1 的方程为 $y = k(x - 1)$,

则由 $\begin{cases} y = k(x - 1) \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 消去 y 得 $k^2x^2 - (4 + 2k^2)x + k^2 = 0$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{4 + 2k^2}{k^2}, x_1x_2 = 1$.

所以 $|AB| = x_1 + x_2 + 2 = \frac{4 + 2k^2}{k^2} + 2 = \frac{4}{k^2} + 4$,

因为直线 l_1, l_2 的斜率之积为1, 所以 $|CD|^2 = 4 + 4k^2$,

故 $|AB| + |CD| = \frac{4}{k^2} + 4 + 4k^2 + 4 \geq 16$.

当 $k = \pm 1$ 时, $|AB| + |CD|$ 取得最小值16.

【标注】【知识点】最值问题;弦长求解问题;求曲线方程的问题;直线和抛物线的位置关系;抛物线的标准方程;抛物线的定义

备注:2019-2020学年天津和平区天津市第一中学高二上学期期末第17题

6. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ 经过点 $P(2, 2)$, A, B 是抛物线 C 上异于点 O 的不同的两点, 其中 O 为原点.

(1) 求抛物线 C 的方程, 并求其焦点坐标和准线方程.

(2) 若 $OA \perp OB$, 求 $\triangle AOB$ 面积的最小值.

【答案】(1) $\left(\frac{1}{2}, 0\right), x = -\frac{1}{2}$.

(2) 4.

【解析】(1) 由抛物线 $C: y^2 = 2px$ 经过点 $P(2, 2)$ 知 $4p = 4$, 解得 $p = 1$.

则抛物线 C 的方程为 $y^2 = 2x$.

抛物线 C 的焦点坐标为 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, 准线方程为 $x = -\frac{1}{2}$.

(2) 由题知, 直线 AB 不与 y 轴垂直, 设直线 $AB: x = ty + a$,

由 $\begin{cases} x = ty + a \\ y^2 = 2x \end{cases}$ 消去 x , 得 $y^2 - 2ty - 2a = 0$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = 2t, y_1y_2 = -2a$.

因为 $OA \perp OB$ ，所以 $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ ，即 $\frac{y_1^2y_2^2}{4} + y_1y_2 = 0$ ，

解得 $y_1y_2 = 0$ （舍）或 $y_1y_2 = -4$ 。

所以 $-2a = -4$ 。解得 $a = 2$ 。

所以直线 $AB: x = ty + 2$ 。

所以直线 AB 过定点 $(2, 0)$ 。

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times 2 \times |y_1 - y_2|$$

$$= \sqrt{y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2}$$

$$= \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + 8}$$

$$\geq \sqrt{2|y_1y_2| + 8}$$

$$= 4。$$

当且仅当 $y_1 = 2, y_2 = -2$ 或 $y_1 = -2, y_2 = 2$ 时，等号成立。

所以 $\triangle AOB$ 面积的最小值为4。

【标注】【知识点】面积问题；直线和抛物线的位置关系

备注：2019-2020学年天津和平区高二上学期末第17题10分

7. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 过点 $M(1, -2)$ ，且焦点为 F ，直线 l 与抛物线相交于 A 、 B 两点。

(1) 求抛物线 C 的方程，并求其准线方程。

(2) 若 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -4$ ，证明直线 l 必过一定点，并求出该定点。

【答案】 (1) $y^2 = 4x$ 。

(2) 直线必定过 $(2, 0)$ 。

【解析】 (1) 由 $2^2 = 2p$ 得 $p = 2$ ，

抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$ 。

(2) 设直线 l 的方程为 $x = ty + b$ 代入 $y^2 = 4x$ ，

$$\text{得 } y^2 - 4ty - 4b = 0，$$

设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，

$$\text{则 } y_1 + y_2 = 4t，$$

$$y_1y_2 = -4b，$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1x_2 + y_1y_2$$

$$= (ty_1 + b)(ty_2 + b) + y_1y_2$$

$$= -4bt^2 + 4bt^2 + b^2 - 4b$$

$$= b^2 - 4b = -4，$$

$\therefore b = 2$, 直线必定过 $(2, 0)$.

【标注】【知识点】直线和抛物线的位置关系；定点问题

备注：2017-2018学年天津河西区天津市新华中学高二上学期期末文科第17题12分

3. 巩固练习

8. 已知 F 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，过 F 且垂直于 x 轴的直线被椭圆截得的线段长为 $\sqrt{2}$.

(1) 求该椭圆方程 .

(2) 设直线 l 同时与椭圆和抛物线 $y^2 = 4x$ 各恰有一个公共交点，求直线 l 的方程 .

【答案】 (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$ 或 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \sqrt{2}$.

【解析】 (1) $\because e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore$ 过 F 且垂直于 x 轴的直线，被椭圆截线段长为 $\sqrt{2}$,

$$\therefore \frac{2b^2}{a} = \sqrt{2} ,$$

$$\therefore a = \sqrt{2}b^2 ,$$

$$\therefore \begin{cases} c = \frac{\sqrt{2}}{2}a \\ a = \sqrt{2}b^2 \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = 1 \end{cases} ,$$

$\therefore$ 椭圆方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) $\because$ 由题意得直线斜率存在，

$\therefore$ 设直线方程为 $y = kx + m$,

$$\therefore \begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases} ,$$

$$\therefore (1 + 2k)^2 x^2 + 4kmx + 2m^2 - 2 = 0 .$$

$$\therefore \Delta = 0 ,$$

$$\therefore m^2 - 2k^2 - 1 = 0 ,$$

$$\text{代入 } C_2 : y^2 = 4x \text{ 得 } \frac{k}{4}y^2 - y + m = 0 ,$$

$$\Delta = 0 \text{ 化简得 } km - 1 = 0 ,$$

$$\therefore k = \frac{\sqrt{2}}{2} , m = \sqrt{2} \text{ 或 } k = -\frac{\sqrt{2}}{2} , m = -\sqrt{2} .$$

$$\therefore \text{直线方程为 } y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2} \text{ 或 } y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \sqrt{2} .$$

【标注】【知识点】直线和抛物线的位置关系；直线与圆锥曲线的位置关系判断；椭圆的标准方程；直线和椭圆的位置关系

备注：2018-2019学年天津和平区天津市第一中学高二上学期期末第17题

9. 已知抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点 $M(x_0, 4)$ 到焦点 F 的距离为 $|MF| = \frac{5}{4}x_0$.

(1) 求抛物线 E 的方程 .

(2) 过点 $(2, 0)$ 的直线 l 与抛物线 E 交于两个不同的点 A, B , 求 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 的值 .

【答案】 (1) $y^2 = 4x$.

(2) -4 .

【解析】 (1) 由题意得： $x_0 + \frac{p}{2} = \frac{5}{4}x_0$. $x_0 = 2p$.

$$\therefore M(2p, 4) \text{ 代入方程得： } 16 = 4p^2 . p = 2 .$$

$$\therefore \text{抛物线方程为 } y^2 = 4x .$$

(2) ① 直线 l 斜率不存在时， $l: x = 2$.

$$\text{此时 } A(2, 2\sqrt{2}), B(2, -2\sqrt{2}) .$$

$$\overrightarrow{OA} = (2, 2\sqrt{2}), \overrightarrow{OB} = (2, -2\sqrt{2}) .$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -4 .$$

② 直线 l 斜率存在时， 设为 k .

$$l: y = k(x - 2) . \text{ 与 } y^2 = 4x \text{ 联立得： } k^2x^2 - (4k^2 + 4)x + 4k^2 = 0 .$$

$$x_A x_B = 4, x_A + x_B = \frac{4k^2 + 4}{k^2} .$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_A x_B + (kx_A - 2k)(kx_B - 2k)$$

$$= (k^2 + 1)x_A x_B - 2k^2(x_A + x_B) + 4k^2 = -4 .$$

$$\text{综上， } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -4 .$$

【标注】【知识点】直线和抛物线的位置关系；向量问题

备注：2017-2018学年天津南开区天津市南开中学高二上学期期末文科第15题