

05直线与圆常见复杂问题

1. 求解圆的方程

1. 已知直线 l 在 y 轴上的截距为 -2 ，且垂直于直线 $x - 2y - 1 = 0$.
(1) 求直线 l 的方程 .
(2) 设直线 l 与两坐标轴分别交于 A 、 B 两点， $\triangle OAB$ 内接于圆 C ，求圆 C 的一般方程 .
2. 已知圆 $x^2 + y^2 - 2x + my - 4 = 0$ 上两点 M ， N 关于直线 $2x + y = 0$ 对称，则圆的半径为() .
A. 9 B. 3 C. $2\sqrt{3}$ D. 2

2. 直线与圆的位置关系

相交弦

3. 已知圆 C 的方程为 $x^2 - 2x + y^2 = 0$ ，直线 $l: kx - y + 2 - 2k = 0$ 与圆 C 交于 A ， B 两点，则当 $\triangle ABC$ 面积最大时，直线 l 的斜率 k 为 _____ .
4. 直线 $l: y = kx + 1$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 相交于 A 、 B 两点，则“ $k = 1$ ”是“ $\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{1}{2}$ ”的() .
A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分又不必要条件
5. 已知圆 C 与 x 轴切于点 $(1, 0)$ ，与 y 轴正半轴交于点 A ， B ，且 $|AB| = 2\sqrt{3}$ ，设点 P 是圆 C 上与点 A ， B 不重合的点，则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的取值范围是() .
A. $[-1, 3]$ B. $[2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}]$
C. $[-3 - 2\sqrt{5}, -3 + 2\sqrt{5}]$ D. $[-2, 6]$

点到直线距离为定值

6. 若圆 $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 10 = 0$ 上至少有三个不同的点到直线 $l: ax + by = 0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$ ，则直线 l 的倾斜角的取值范围是() .
A. $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right]$
B. $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right]$
C. $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$
D. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
7. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 上到直线 $l: x + y = a$ 的距离等于1的点至少有2个，则 a 的取值范围为() .
A. $(-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

- B. $(-\infty, -3\sqrt{2}) \cup (3\sqrt{2}, +\infty)$
 C. $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$
 D. $[-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$

🔍 探究直线位置

8. 已知圆 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ 的一条直径通过直线 $2x + y - 4 = 0$ 被圆所截弦的中点, 则该直径所在直线的方程为 ().
 A. $x + 2y - 5 = 0$ B. $x - 2y - 5 = 0$ C. $x - 2y + 5 = 0$ D. $x + 2y + 5 = 0$
9. 在平面直角坐标系中, A 、 B 分别是 x 轴和 y 轴上的动点, 若以 AB 为直径的圆 C 与直线 $2x + y - 4 = 0$ 相切, 则圆 C 面积的最小值为 ().
 A. $\frac{3}{4}\pi$ B. $\frac{4}{5}\pi$
 C. $(6 - 2\sqrt{5})\pi$ D. $\frac{5}{4}\pi$
10. 已知圆 $C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$, 若直线 $y = 2kx - 4$ 上存在点 P , 使得过点 P 的圆 C 的两条切线互相垂直, 则实数 k 的取值范围是 ().
 A. $k \leq -\frac{3}{8}$
 B. $k \leq -\frac{3}{8}$ 或 $k \geq 0$
 C. $k \leq -\frac{2}{3}$
 D. $k \leq -\frac{2}{3}$ 或 $k \geq 0$
11. 已知 $\odot C: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$, 直线 $l: x + 2y + 2 = 0$, M 为直线 l 上的动点, 过点 M 作 $\odot C$ 的切线 MA , MB , 切点为 A , B , 当四边形 $MACB$ 的面积取最小值时, 直线 AB 的方程为 ().
 A. $x + 2y - 1 = 0$ B. $x + 2y + 1 = 0$ C. $x - 2y - 1 = 0$ D. $x - 2y + 1 = 0$

🔍 切线段的长度

12. 若过直线 $3x - 4y + 2 = 0$ 上一点 M 向圆 $C: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ 作一条切线于切点 T , 则 $|MT|$ 的最小值为 ().
 A. $\sqrt{10}$ B. 4 C. $2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{3}$
13. 从点 $P(2, -1)$ 向圆 $x^2 + y^2 - 2mx - 2y + m^2 = 0$ 作切线, 当切线长最短时 m 的值为 ().
 A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

🔍 半圆问题

14. 方程 $\sqrt{1-x^2} = kx + 2$ 有唯一解, 则实数 k 的取值范围是 ().
 A. $k = \pm\sqrt{3}$
 B. $k \in (-2, 2)$

C. $k < -2$ 或 $k > 2$

D. $k < -2$ 或 $k > 2$ 或 $k = \pm\sqrt{3}$

15. 若直线 $y = k(x - 4) + 2$ 与曲线 $x = \sqrt{4 - y^2}$ 恰有两个交点, 则实数 k 的取值范围是 () .

A. $\left[1, \frac{4}{3}\right)$

B. $\left(0, \frac{4}{3}\right)$

C. $\left[1, \frac{5}{3}\right)$

D. $\left(0, \frac{5}{3}\right)$

16. 若直线 $y = x + b$ 与曲线 $x = 3 - \sqrt{4 - y^2}$ 有公共点, 则实数 b 的取值范围是 () .

A. $[-3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}]$

B. $[-3 - 2\sqrt{2}, -1]$

C. $[-5, -3 + 2\sqrt{2}]$

D. $[-3, -3 + 2\sqrt{2}]$

17. 若直线 $x + y - m = 0$ 与曲线 $y = 2 - \sqrt{-x(x + 2)}$ 没有公共点, 则实数 m 的取值范围是 () .

A. $[3 - \sqrt{2}, 4]$

B. $(-\infty, 3 - \sqrt{2}) \cup (4, +\infty)$

C. $[3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}]$

D. $(-\infty, 1 - \sqrt{2}) \cup (2, +\infty)$

根据几何意义求解问题

18. 已知实数 x, y 满足 $6x + 8y - 1 = 0$, 则 $\sqrt{x^2 + y^2 - 2y + 1}$ 的最小值为 _____ .

19. 已知 $P(a, b)$ 为圆 $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ 上任意一点, 则 $\frac{b-1}{a+1}$ 最大值是 _____ .

20. 已知点 $P(x, y)$ 为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的动点, 则 $3x + 4y$ 的最小值为 ()

A. 5

B. 1

C. 0

D. -5

3. 圆系方程

1. 相交的两圆的圆系方程

过两已知圆 $f_i(x, y) = x^2 + y^2 + D_i x + E_i y + F_i = 0 (i = 1, 2)$ 的交点的圆系方程为

$$x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 + \lambda(x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2) = 0$$

$$\text{即 } f_1(x, y) + \lambda f_2(x, y) = 0 (\lambda \neq -1).$$

【特别说明】

当 $\lambda = -1$ 时, 方程变为 $(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0$,

表示过两圆的交点的直线 (当两圆是同心圆时, 此直线不存在)

① 当两圆相交时, 此直线为公共弦所在直线;

② 当两圆相切时, 此直线为两圆的公切线;

③ 当两圆相离时, 此直线为与两圆连心垂直的直线.

2. 过直线与圆交点的圆系方程

设直线 $l: Ax + By + C = 0$ 与圆 $C: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 相交,

则方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F + \lambda(Ax + By + C) = 0$ 表示过直线 l 与圆 C 的两个交点的圆系方程.

4. 圆与圆的位置关系



条件转化

21. 已知原点到直线 l 的距离为 1, 圆 $(x-2)^2 + (y-\sqrt{5})^2 = 4$ 与直线 l 相切, 则满足条件的直线 l 有 _____ 条.
22. 若存在四条直线, 使得点 $P(-3, 0)$ 与点 $Q(0, 4)$ 到该直线的距离分别为 a 和 2, 则实数 a 的取值范围为 _____.
23. 已知圆 $C: x^2 + y^2 = 1$, 点 P 为直线 $x + 2y - 4 = 0$ 上一动点, 过点 P 向圆 C 引两条切线 PA, PB , A, B 为切点, 则直线 AB 经过定点 ().
- A. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ B. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$
- C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, 0\right)$ D. $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$