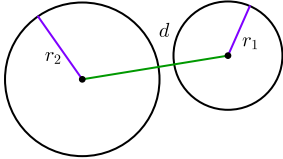
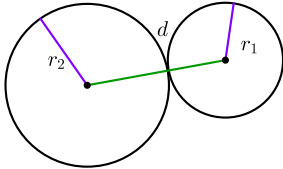
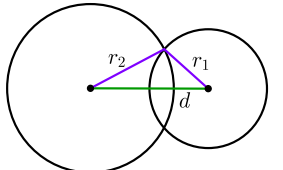
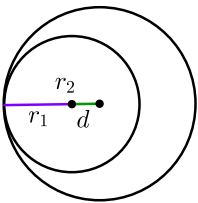
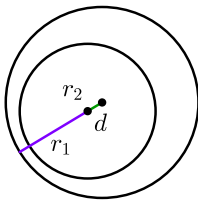


04圆与圆的位置关系

1. 圆与圆的位置关系

圆与圆的位置关系的判断方法

①**几何法**：设两圆的圆心距为 d ，则位置关系表示如下：

位置关系	关系式	图示	公切线
_____			_____
_____			_____
_____			_____
_____			_____
_____			_____

②代数法

设由两圆的方程组成的方程组为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0 \end{cases}$$

有两组不同的实数解 $\Leftrightarrow$ 两圆_____；

有两组相同的实数解 $\Leftrightarrow$ 两圆_____；

无实数解 $\Leftrightarrow$ 两圆_____.

🔗 求解公切线条数

1. 若圆 $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$, 圆 $C_2: x^2 + y^2 - 6x - 10y - 2 = 0$, 则 C_1, C_2 的公切线条数为().
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
2. 圆 $C_1: x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 的公切线有().
A. 1条 B. 2条 C. 3条 D. 4条
3. 与圆 $C_1: x^2 + y^2 + 2x - 6y - 26 = 0$, $C_2: x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ 都相切的直线有().
A. 1条 B. 2条 C. 3条 D. 4条
4. 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$, 圆 $C_2: x^2 + y^2 - 14x - 2y + 34 = 0$, 两圆公切线的条数为().
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
5. 已知圆 $A: x^2 + y^2 = 1$, 圆 $B: (x - 2)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$, 圆 A 与圆 B 的公切线的条数的可能取值共有().
A. 2种 B. 3种 C. 4种 D. 5种

🔗 根据公切线条数求解参数值或取值范围

6. 若圆 $C_1: x^2 + y^2 + 2ax + a^2 - 4 = 0 (a \in \mathbf{R})$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 - 2by - 1 + b^2 = 0 (b \in \mathbf{R})$ 恰有三条公切线, 则 $a^2 + b^2 =$ ().
A. 3 B. 5 C. 9 D. 17
7. 若 $C: x^2 + y^2 = 5 - m$ 与圆 $E: (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 16$ 有三条公切线, 则 m 的值为().
A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. 4 D. 6
8. 若圆 $x^2 + y^2 - 6x - 8y + m = 0$ 和圆 $x^2 + y^2 = 1$ 只有两条公切线, 则 m 的取值范围是().
A. $-11 < m < 9$ B. $9 < m < 19$ C. $19 < m < 21$ D. $m > 21$
9. 圆 $x^2 + y^2 + y + m = 0$ 与其关于直线 $x + 2y - 1 = 0$ 对称的圆总有四条公切线, 则 m 的取值范围是_____.
10. 已知抛物线 $C_1: y = x^2 + 2x$ 和 $C_2: y = -x^2 + a$, 若直线 l 同时是 C_1 和 C_2 的切线, 则称 l 是 C_1 和 C_2 的公切线, 公切线上两个切点之间的线段, 称为公切线段.
(1) 则 a 取什么值时, C_1 和 C_2 有且仅有一条公切线? 写出此公切线的方程.
(2) 若 C_1 和 C_2 有两条公切线, 证明相应的两条公切线段互相平分.

|| 包罗万象 举一千从

11.

已知两圆 $x^2 + y^2 + 4ax + 4a^2 - 4 = 0$ 和 $x^2 + y^2 - 2by + b^2 - 1 = 0$ 恰有三条公切线, 若 $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, 且 $ab \neq 0$, 则 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 的最小值为 ().

- A. 3 B. 1 C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{1}{9}$

12. 若圆 $C_1: x^2 + y^2 + 2ax + a^2 - 4 = 0 (a \in \mathbf{R})$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 - 2by - 1 + b^2 = 0 (b \in \mathbf{R})$ 恰有三条切线, 则 $a + b$ 的最大值为 ().

- A. $-3\sqrt{2}$ B. -3 C. 3 D. $3\sqrt{2}$

13. 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 + 4ax + 4a^2 - 4 = 0$ 和圆 $C_2: x^2 + y^2 - 2by + b^2 - 1 = 0$ 只有一条公切线, 若 $a, b \in \mathbf{R}$ 且 $ab \neq 0$, 则 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 的最小值是 _____.

求解公切线方程

14. 已知圆 $O_1: x^2 + y^2 + 2x + 6y + 9 = 0$, $O_2: x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$, 求两圆的公切线方程.

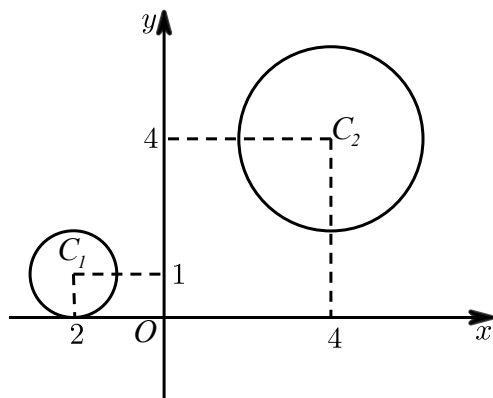
15. 直线 l 的倾斜角为锐角, 且和圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 及圆 $A: x^2 + (y - 4)^2 = 9$ 均相切, 则直线 l 的斜率等于 _____.

16. 已知圆 D 经过点 $M(1, 0)$, 且与圆 $C: x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$ 切于点 $N(1, 2)$.

(1) 求两圆过点 N 的公切线方程.

(2) 求圆 D 的标准方程.

17. 如图, 已知圆 $C_1: (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$ 和圆 $C_2: (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 4$.



(1) 求两圆所有公切线的斜率.

(2) 设 P 为平面上一点, 满足: 若存在点 P 的无穷多条直线 l 与圆 C_1 和圆 C_2 相交, 且直线 l 被圆 C_2 截得的弦长是直线 l 被圆 C_1 截得的弦长的 2 倍, 试求所有满足条件的点 P 的坐标.

2. 两圆的公共弦

1. 两圆的公共弦的定义

当两圆相交时, 必有两个交点, 那么过这两个交点的弦称为两圆的 **公共弦**.

2. 公共弦所在直线方程

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 \text{ ①} \\ x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0 \text{ ②} \end{cases}$$

$$\text{①}-\text{②} \text{得} (D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0 \text{ ③}$$

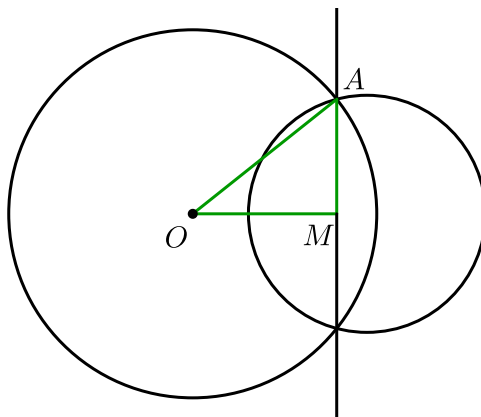
圆 C_1 与 C_2 相交，③为公共弦所在的直线方程。

3. 两圆公共弦长的求法

方法一：将两圆的方程联立，解出两交点的坐标，利用两点间的距离公式求弦长；

（某知名不愿意透露姓名的爱智康高数张老师集体备课时曾说：“正常人一般不会用这个办法的，求解计算量太大了”）

方法二：求出公共弦所在直线的方程，利用勾股定理解如图所示的 $Rt \triangle OAM$ ，求出弦长。



🔍 求解公共弦所在直线方程

18. 圆 $x^2 + y^2 + x = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ 的公共弦所在的直线方程为 _____。

📊 精进不休 日新月异

19. 圆： $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$ 和圆： $x^2 + y^2 - 6x = 0$ 交于 A, B 两点，则 AB 的垂直平分线的方程是（ ）

- A. $x + y + 3 = 0$ B. $2x - y - 5 = 0$ C. $3x - y - 9 = 0$ D. $4x - 3y + 7 = 0$

🔍 求解公共弦长

20. 圆 $x^2 + y^2 = 4$ 与圆 $x^2 + y^2 + 2y - 6 = 0$ 的公共弦长为（ ）。

- A. 1 B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

21. 已知圆 C_1 的方程为 $x^2 + y^2 - 2x + 10y - 24 = 0$ ，圆 C_2 的方程为 $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0$ 。

- (1) 判断两圆的位置关系。
(2) 求公共弦所在的直线方程。
(3) 求公共弦的长度。

3. 两圆上点的距离问题

22.

点 P 在圆 $C_1 : x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$ 上 , 点 Q 在圆 $C_2 : x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$ 上 , 则 $|PQ|$ 的最小值是 _____ .