

## 03直线与圆的位置关系练习题

### 1. 圆的方程

1. 以两点 $A(-3, -1)$ 和 $B(5, 5)$ 为直径端点的圆的标准方程是( )

- A.  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$
- B.  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 100$
- C.  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$
- D.  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$

**【答案】** D

**【解析】** 解：由题意可得，圆心为线段 $AB$ 的中点 $C(1, 2)$ ，半径为 $r = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 6^2} = 5$ ，  
故所求的圆的方程为 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ ，  
故选：D。

**【标注】**【知识点】圆的标准方程问题

2. 经过圆 $x^2 + y^2 + 2y = 3$ 的圆心，且与直线 $2x + 3y - 4 = 0$ 垂直的直线方程为( )。

- A.  $2x + 3y - 2 = 0$
- B.  $2x + 3y + 3 = 0$
- C.  $3x - 2y + 2 = 0$
- D.  $3x - 2y - 2 = 0$

**【答案】** D

**【解析】** 直线 $2x + 3y - 4 = 0$ 的斜率为 $-\frac{2}{3}$ ，  
与之垂直的直线斜率为 $\frac{-1}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$ ，  
设直线经过圆 $x^2 + y^2 + 2y = 3$ 的圆心 $x^2 + (y+1)^2 = 4$ ，即 $(0, -1)$ ，  
故该直线方程为 $y = \frac{3}{2}x - 1$ ，  
即 $3x - 2y - 2 = 0$ 。  
故选D。

**【标注】**【知识点】直线的垂直；直线的一般式方程

3. 与圆 $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ 关于直线 $l: x + y = 0$ 对称的圆的方程是\_\_\_\_\_。

**【答案】**  $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$

**【解析】**  $\because$ 圆 $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ ，

则其标准方程为  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$ ,

圆心  $C(1, -2)$ , 半径为  $\sqrt{5}$ ,

设圆心  $C(1, -2)$  关于直线  $x+y=0$  对称点为  $(m, n)$ ,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{n+2}{m-1} = 1 \\ \frac{m+1}{2} + \frac{n-2}{2} = 0 \end{cases}$$

解得  $m=2$ ,  $n=-1$ ,

$\therefore$  圆心  $C(1, -2)$  关于直线  $x+y=0$  对称点为  $(2, -1)$ ,

$\therefore$  所求圆方程为  $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$ .

**【标注】**【知识点】圆的标准方程问题；点或直线的对称问题

4. 圆  $C: x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$  关于直线  $x + y - 1 = 0$  对称的圆的方程为 ( ) .

A.  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

B.  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

C.  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

D.  $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$

**【答案】** A

**【解析】** 圆  $C: x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$  可化为:  $(x+1)^2 + y^2 = 4$ ,

故圆  $C$  的圆心  $C(-1, 0)$ , 半径为 2,

设  $C(-1, 0)$  关于  $x + y - 1 = 0$  的对称点为  $C'(m, n)$ ,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{n}{m+1} = 1 \\ \frac{m-1}{2} + \frac{n}{2} - 1 = 0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} m=1 \\ n=2 \end{cases}$$

故圆  $C$  关于直线  $x + y - 1 = 0$  对称的圆的方程为:  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ ,

即:  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ ,

故选: A.

**【标注】**【知识点】圆的标准方程问题

## 2. 直线与圆的位置关系

5. 直线  $3x + 4y - 14 = 0$  与圆  $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$  的位置关系是 ( ) .

A. 相交且直线过圆心

B. 相切

C. 相交但直线不过圆心

D. 相离

**【答案】** D

**【解析】** 已知圆心  $(1, -1)$ , 半径  $r = 2$ ,

$$\therefore \text{直线与圆心距离} d = \frac{|3 \times 1 + 4 \times (-1) - 14|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3 > 2,$$

∴直线和圆位置关系为相离.

故选D.

【标注】【知识点】直线与圆的相离问题

【素养】数学运算

6. 直线 $3x + 4y = b$ 与圆 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 相切, 则 $b = ( )$ .

A. -2或12

B. 2或-12

C. -2或-12

D. 2或12

【答案】D

【解析】因为直线与圆相切,  $\therefore \frac{|3 + 4 - b|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1 \Rightarrow b = 2 \text{ 或 } 12$ .

故选D.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】圆的切线的相关问题

7. 若直线 $(1 + a)x + y + 1 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 相切, 则 $a$ 的值为 $( )$ .

A. 1或-1

B. 2或-2

C. 1

D. -1

【答案】D

【解析】由直线与圆相切, 得圆心到直线的距离等于圆的半径;

圆 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 的方程变为 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ , 半径为1,

圆心 $(1, 0)$ 到直线的距离为 $\frac{|1 + a + 0 + 1|}{\sqrt{(1 + a)^2 + 1}} = 1$ ,

则 $a = -1$ . 故选D.

【标注】【知识点】圆的切线的相关问题

【素养】数学运算

### 3. 直线与圆相交时的重点题型

#### 求解弦长

8. 已知圆 $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2 - m$ 截直线 $x + y + 2 = 0$ 所得弦的长度为4, 则实数 $m = ( )$ .

A. -2

B. -4

C. -6

D. -8

【答案】B

**【解析】** 由题意：圆心 $(-1, 1)$ ， $r = \sqrt{2-a}$ ，

设圆心到直线的距离为 $d$ ，

$$\therefore d = \sqrt{r^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{(2-a) - 4} = \sqrt{-2-a},$$

$$\therefore d = \frac{|-1+1+2|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2},$$

$$\therefore \sqrt{-2-a} = \sqrt{2},$$

$$\therefore a = -4.$$

**【标注】**【知识点】圆的弦长的相关问题

**【素养】**数学运算

9. 已知圆 $C$ 过点 $(1, 0)$ ，且圆心在 $x$ 轴的正半轴上，直线 $l: y = x - 1$ 被圆所截得的弦长为 $2\sqrt{2}$ ，则圆 $C$ 的标准方程为\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $x^2 + y^2 - 3 = 0$

**【解析】** 设圆心为 $C(a, 0) (a > 0)$ ，则可设圆 $C$ 的方程为 $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ ，

$\therefore$  圆 $C$ 过点 $(1, 0)$ ， $\therefore (a-1)^2 = r^2$ ， $C$ 到直线 $l: y = x - 1$ 的距离为 $d = \frac{|a-1|}{\sqrt{2}}$ ，则由题

意得 $r^2 - \left(\frac{|a-1|}{\sqrt{2}}\right)^2 = (\sqrt{2})^2$ ，即 $(a-1)^2 - \left(\frac{|a-1|}{\sqrt{2}}\right)^2 = (\sqrt{2})^2$ ， $\therefore (a-1)^2 = 4$

，再由 $a > 0$ 得 $a = 3$ ， $\therefore$  圆心为 $(3, 0)$ 。于是过圆心且与直线 $l$ 垂直的直线的方程为

$y = -(x-3)$ ，即 $x + y - 3 = 0$ 。

**【标注】**【知识点】圆的弦长的相关问题

10. 过点 $P(0, 1)$ 的直线 $l$ 与圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 相交于 $A, B$ 两点，若 $|AB| = \sqrt{2}$ ，则该直线的斜率为( )。

A.  $\pm 1$

B.  $\pm\sqrt{2}$

C.  $\pm\sqrt{3}$

D.  $\pm 2$

**【答案】** A

**【解析】** 由题意设直线 $l$ 的方程为 $y = kx + 1$ ，

因为圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 的圆心为 $(1, 1)$ ，

半径为 $r = 1$ ，又弦长 $|AB| = \sqrt{2}$ ，

所以圆心到直线的距离为 $d = \sqrt{r^2 - \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

所以有 $\frac{|k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，解得 $k = \pm 1$ ，

故选A。

**【标注】**【知识点】点到直线的距离公式；圆的弦长的相关问题

11. 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ ，直线 $l: 3x - y - 6 = 0$ 。

(1) 求圆 $C$ 的圆心及半径。

(2) 求直线 $l$ 被圆 $C$ 截得的弦 $AB$ 的长度。

**【答案】**(1) 圆心 $(1, 2)$ ，半径 $\sqrt{5}$ 。

(2)  $AB = \sqrt{10}$ 。

**【解析】**(1) 将圆 $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ 化成标准方程为 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$ ，半径 $\sqrt{5}$ 。

$$\begin{aligned} (2) \text{ 圆心到 } AB \text{ 的距离 } d &= \frac{|3 - 2 - 6|}{\sqrt{9 + 1}} = \frac{\sqrt{10}}{2}, \\ \therefore AB &= 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{5 - \frac{10}{4}} = \sqrt{10}. \end{aligned}$$

**【标注】**【知识点】圆的弦长的相关问题

12. 已知圆 $C$ 的方程为 $x^2 + y^2 = 4$ 。

直线 $l$ 过点 $P(1, 2)$ ，且与圆 $C$ 交于 $A$ 、 $B$ 两点，若 $|AB| = 2\sqrt{3}$ ，求直线 $l$ 的方程。

**【答案】**(1)  $3x - 4y + 5 = 0$ 或 $x = 1$ 。

**【解析】**(1) 当直线 $l$ 垂直于 $x$ 轴时，

此时直线方程为 $x = 1$ ，

$l$ 与圆的两个交点坐标为 $(1, \sqrt{3})$ 和 $(1, -\sqrt{3})$ ，

这两点的距离为 $2\sqrt{3}$ ，

满足题意；

当直线 $l$ 不垂直于 $x$ 轴时，

设其方程为： $y - 2 = k(x - 1)$ ，

即 $kx - y - k + 2 = 0$ ，

设圆心到此直线的距离为 $d$ ，

$$\therefore d = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1,$$

$$\text{即 } \frac{|2 - k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1,$$

$$\text{解得：} k = \frac{3}{4},$$

此时直线方程为 $3x - 4y + 5 = 0$ ，

综上所述，所求直线方程为 $3x - 4y + 5 = 0$ 或 $x = 1$ 。

【标注】【知识点】圆的切线的相关问题；圆的弦长的相关问题

最短弦长

13. 已知直线  $y = k(x - 1) + 1$  与圆  $C: x^2 - 4x + y^2 + 1 = 0$  交于  $A, B$  两点, 则  $|AB|$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

【答案】2

【解析】圆  $C: x^2 - 4x + y^2 + 1 = 0$  的圆心  $C(2, 0)$ ,

$$\text{半径 } r = \frac{1}{2}\sqrt{16 - 4} = \sqrt{3},$$

$$\text{圆心 } C(2, 0) \text{ 到直线 } y = k(x - 1) + 1 \text{ 的距离 } d = \frac{|2k - k + 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|k + 1|}{\sqrt{k^2 + 1}},$$

$$\begin{aligned} |AB| &= 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{3 - \frac{(k+1)^2}{k^2+1}} \\ &= 2\sqrt{3 - \frac{k^2+1+2k}{k^2+1}} = 2\sqrt{2 - \frac{2k}{k^2+1}} \geq 2. \end{aligned}$$

当且仅当  $k = 1$  时取等号,

$\therefore |AB|$  的最小值为 2.

故答案为: 2.

【标注】【知识点】圆的弦长的相关问题

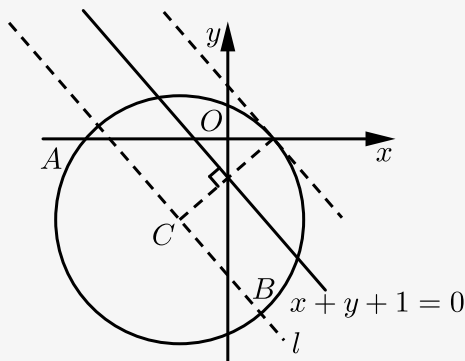
点到直线距离为定值的点个数问题

14. 圆  $x^2 + 2x + y^2 + 4y - 3 = 0$  上到直线  $x + y + 1 = 0$  的距离为  $\sqrt{2}$  的点共有 ( ).  
A. 1个                      B. 2个                      C. 3个                      D. 4个

【答案】C

【解析】圆  $x^2 + 2x + y^2 + 4y - 3 = 0$  的圆心  $C$  的坐标为  $(-1, -2)$ ,

半径  $r = 2\sqrt{2}$ , 如图所示,



圆心 $C$ 到直线 $x + y + 1 = 0$ 的距离为 $\sqrt{2}$ ，  
 故过圆心 $C$ 与直线 $x + y + 1 = 0$ 平行的直线 $l$ 与圆的两个交点 $A$ 、 $B$   
 到直线 $x + y + 1 = 0$ 的距离为 $\sqrt{2}$ ．又圆的半径 $r = 2\sqrt{2}$ ，  
 故过圆心 $C$ 作直线 $x + y + 1 = 0$ 的垂线段，  
 并延长与圆的交点 $C'$ 到直线 $x + y + 1 = 0$ 的距离为 $\sqrt{2}$ ，故选 $C$ ．

【标注】【知识点】直线与圆的位置关系

## 4. 直线与圆相切时的重点题型

### 🔔 求切线方程

15. 在平面直角坐标系 $xOy$ 中，已知圆 $C_1: (x-4)^2 + (y-5)^2 = 4$ 和圆 $C_2: (x+3)^2 + (y-1)^2 = 4$ ．  
 若直线 $l_1$ 过点 $A(2, 0)$ ，且与圆 $C_1$ 相切，求直线 $l_1$ 的方程．

【答案】(1)  $y = \frac{21}{20}(x-2)$ 或 $x = 2$ ．

【解析】(1) 直线 $x = 2$ 满足题意，

直线斜率存在时，设直线方程为 $y = k(x-2)$ ，

即 $kx - y - 2k = 0$ ，

$\therefore$  圆心到直线的距离  $\frac{|2k-5|}{\sqrt{k^2+1}} = 2$ ，

$\therefore k = \frac{21}{20}$ ，

$\therefore$  直线方程为 $y = \frac{21}{20}(x-2)$ ，

综上所述，直线方程为 $y = \frac{21}{20}(x-2)$ 或 $x = 2$ ．

【标注】【知识点】圆的弦长的相关问题；圆的切线的相关问题

### 🔔 根据相切关系求解

16. 已知圆 $C$ 与直线 $2x + y = 4$ 相切于点 $A(1, 2)$ ，并且圆心在直线 $y = -x$ 上，求圆 $C$ 的方程．

【答案】 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$ ．

【解析】依题意，过圆心和点 $A(1, 2)$ 的直线与直线 $2x + y = 4$ 垂直，

故这条直线的斜率为 $\frac{1}{2}$ ，

所以这条直线的方程是 $x - 2y + 3 = 0$ ．

由已知，所求圆的圆心 $C$ 在直线 $y = -x$ 上．

解方程组  $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ y = -x \end{cases}$ ，

可得 $x = -1$ ,  $y = 1$ . 所以圆心 $C$ 的坐标为 $(-1, 1)$ .

半径为 $|AC| = \sqrt{5}$ ,

所求圆 $C$ 的方程为 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$ .

**【标注】**【知识点】圆的标准方程问题

17. 以点 $(-2, 3)$ 为圆心且与 $y$ 轴相切的圆的方程是 \_\_\_\_\_.

**【答案】**  $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$

**【解析】** 圆心 $C$ 的坐标为 $(-2, 3)$ , 且所求圆与 $y$ 轴相切,

$\therefore$  圆的半径 $r = |-2| = 2$ ,

则所求圆的方程为 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$ .

故答案为:  $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$ .

**【标注】**【知识点】圆的标准方程问题

18. 已知圆 $C$ 的方程为 $x^2 + y^2 = 4$ .

求过点 $P(2, 1)$ 且与圆 $C$ 相切的直线 $l$ 的方程.

**【答案】** (1)  $x = 2$  或  $3x + 4y - 10 = 0$ .

**【解析】** (1) 当 $k$ 不存在时,

$x = 2$  满足题意,

当 $k$ 存在时,

设切线方程为 $y - 1 = k(x - 2)$ ,

由  $\frac{|1 - 2k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2$  得,

$k = -\frac{3}{4}$ ,

则所求的切线方程为 $x = 2$  或  $3x + 4y - 10 = 0$ .

**【标注】**【知识点】圆的切线的相关问题; 圆的弦长的相关问题