

等比数列求和与通项求法练习题

1. 已知 $\{a_n\}$ 是单调递增的等比数列, 满足 $a_3 \cdot a_5 = 16$, $a_2 + a_6 = 17$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n =$ () .

A. $2^n + \frac{1}{2}$

B. $2^n - \frac{1}{2}$

C. $2^{n-1} + \frac{1}{2}$

D. $2^{n-1} - \frac{1}{2}$

【答案】 D

【解析】 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q .

$\because a_3 \cdot a_5 = 16 = a_2 a_6$, $a_2 + a_6 = 17$, 且 $\{a_n\}$ 是单调递增的等比数列 .

联立解得: $a_2 = 1$, $a_6 = 16$, $q > 0$.

$\therefore q^4 = 16$, 解得 $q = 2$.

$$\therefore a_1 = \frac{1}{2} .$$

$$\text{则数列}\{a_n\}\text{的前}n\text{项和}S_n = \frac{\frac{1}{2}(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^{n-1} - \frac{1}{2} .$$

故选: D .

【标注】 【知识点】 等比数列求和问题

2. $3 + 3^3 + 3^5 + \dots + 3^{2n+1} =$ _____ .

【答案】 $\frac{3}{8}(9^{n+1} - 1)$

【解析】 数列 $3, 3^3, 3^5, \dots, 3^{2n+1}$ 是首项为 3 , 公比为 3^2 的等比数列, 且 3^{2n+1} 是第 $n+1$ 项 .

$$\therefore 3 + 3^3 + 3^5 + \dots + 3^{2n+1} = \frac{3(1 - 3^{2n+2})}{1 - 3^2} = \frac{3}{8}(9^{n+1} - 1) .$$

【标注】 【知识点】 等比数列的概念与通项公式; 等比数列求和问题

3. 等比数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和为 S_n , $S_3 = 9$, $S_6 = 81$, 求 S_n ?

【答案】 $S_n = \frac{9}{7}(2^n - 1)$.

【解析】 $S_6 = 81$, $S_3 = 9$.

$$\frac{S_6}{S_3} = \frac{\frac{a_1(1-96)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}} = \frac{1-q^6}{1-q^3} = 9.$$

即 $1+q^3=9$ ，解得 $q=2$ 。

$$S_3 = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = \frac{a_1(1-8)}{-1} = 9.$$

$$\text{解得 } a_1 = \frac{9}{7}.$$

$$\therefore S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{9}{7}(1-2^n)}{1-2} = \frac{9}{7}(2^n-1).$$

【标注】【知识点】等比数列求和问题；等比数列的性质及应用

4. 已知递增的等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2=6$ ， a_1+1 ， a_2+2 ， a_3 成等差数列，则该数列的前6项和 $S_6=($

A. 93

B. 189

C. $\frac{189}{16}$

D. 378

【答案】 B

【解析】 设数列的公比为 q ，由题意可知： $q>1$ ，

$$\text{且：} 2(a_2+2) = a_1+1+a_3,$$

$$\text{即：} 2 \times (6+2) = \frac{6}{q} + 1 + 6q,$$

$$\text{整理可得：} 2q^2 - 5q + 2 = 0,$$

$$\text{则 } q=2, \left(q=\frac{1}{2} \text{ 舍去}\right),$$

$$\text{则：} a_1 = \frac{6}{2} = 3, \text{ 该数列的前6项和 } S_6 = \frac{3 \times (1-2^6)}{1-2} = 189.$$

故选B。

【标注】【知识点】等差中项；求等比数列的基本量；等比数列求和问题

5. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$ ，且 $4a_1$ ， $2a_2$ ， a_3 成等差数列，则数列 $\{a_n\}$ 的前10项和 $S_{10}=$ _____。

【答案】 1023

【解析】 $\because$ 等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$ ，且 $4a_1$ ， $2a_2$ ， a_3 成等差数列，

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，

$$\therefore 4, 2q, q^2 \text{ 成等差数列},$$

$$\therefore 4q = 4 + q^2, \text{ 解得 } q=2,$$

∴数列 $\{a_n\}$ 的前10项和,

$$S_{10} = \frac{1-2^{10}}{1-2} = 2^{10} - 1 = 1023.$$

故答案为: 1023.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】等比数列求和问题; 求等比数列的基本量; 等差中项

6. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n (n \in \mathbf{N}^*)$, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_n = 126$, 则 $n =$ _____.

【答案】 6

【解析】 因为数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n$, 可得数列 $\{a_n\}$ 是以2为首项, 2为公比的等比数列,

$$\text{所以 } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{2(1-2^n)}{1-2} = 2(2^n - 1) = 126,$$

$$\text{则 } 2^n - 1 = 63, \text{ 即 } 2^n = 64,$$

$$\text{所以 } n = 6.$$

故答案为: 6.

【标注】【知识点】等比数列的判定与证明; 等比数列求和问题

7. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 + a_3 = \frac{5}{2}$, $a_2 + a_4 = \frac{5}{4}$, 则 $\frac{S_n}{a_n} =$ _____.

【答案】 $2^n - 1$

$$\text{【解析】 } \because \begin{cases} a_1 + a_3 = \frac{5}{2} \\ a_2 + a_4 = \frac{5}{4} \end{cases}, \therefore \begin{cases} a_1 + a_1q^2 = \frac{5}{2} \text{ ①} \\ a_1q + a_1q^3 = \frac{5}{4} \text{ ②} \end{cases}$$

$$\text{由①除以②可得 } \frac{1+q^2}{q+q^3} = 2, \text{ 解得 } q = \frac{1}{2}, \text{ 代入①得 } a_1 = 2,$$

$$\therefore a_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{4}{2^n}, \therefore S_n = \frac{2 \times [1 - (\frac{1}{2})^n]}{1 - \frac{1}{2}} = 4\left(1 - \frac{1}{2^n}\right),$$

$$\therefore \frac{S_n}{a_n} = \frac{4(1 - \frac{1}{2^n})}{\frac{4}{2^n}} = 2^n - 1.$$

【标注】【知识点】等比数列的性质及应用; 等比数列求和问题; 等比数列求通项问题

8. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $\{S_n\}$ 是等差数列, 则 $q =$ _____.

【答案】 1

【解析】 设首项为 a ，则 $S_1 = a_1$ ， $S_2 = a_1 + a_1q$ ， $S_3 = a_1 + a_1q + a_1q^2$ ，

由于 $\{S_n\}$ 是等差数列，

$$\text{故 } 2(a_1 + a_1q) = a_1 + a_1 + a_1q + a_1q^2,$$

$$\therefore q^2 - q = 0,$$

解得 $q = 1$ 。

【标注】 【知识点】 等比数列求和问题

9. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_1 + a_n = 66$ ， $a_2 a_{n-1} = 128$ ， $S_n = 126$ ，则公比 q 的值为（ ）。
- A. 2 B. 6 C. 2或 $\frac{1}{2}$ D. 6或 $\frac{1}{2}$

【答案】 C

【解析】 由 $a_2 \cdot a_{n-1} = a_1 \cdot a_n = 128$ ，又 $a_1 + a_n = 66$ ，

$$\text{得： } a_1 = 2, a_n = 64 \text{ 或 } a_1 = 64, a_n = 2,$$

$$\text{由 } S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q},$$

$$\text{得： } q = 2 \text{ 或 } q = \frac{1}{2}.$$

【标注】 【知识点】 等比数列的性质及应用

10. 各项均为实数的等比数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和记为 S_n ，若 $S_{10} = 10$ ， $S_{30} = 70$ ，则 $S_{40} =$ （ ）。
- A. 150 B. -200 C. 150或-200 D. 400或-50

【答案】 A

【解析】 根据等比数列的前 n 项和的公式化简 $S_{10} = 10$ ， $S_{30} = 70$ 得：

$$S_{10} = \frac{a(1 - q^{10})}{1 - q} = 10,$$

$$S_{30} = \frac{a(1 - q^{30})}{1 - q} = 70,$$

$$\text{则 } \frac{S_{30}}{S_{10}} = \frac{1 - q^{30}}{1 - q^{10}} = \frac{(1 - q^{10})(1 + q^{10} + q^{20})}{1 - q^{10}} = 7,$$

$$\text{得到 } 1 + q^{10} + q^{20} = 7,$$

$$\text{即 } (q^{10})^2 + q^{10} - 6 = 0,$$

$$\text{解得 } q^{10} = -3 \text{ (舍去)},$$

$$q^{10} = 2,$$

$$\text{则 } \frac{S_{40}}{S_{10}} = \frac{\frac{a(1-q^{40})}{1-q}}{\frac{a(1-q^{10})}{1-q}} = \frac{1-(q^{10})^4}{1-q^{10}} = \frac{1-2^4}{1-2} = 15,$$

所以 $S_{40} = 15S_{10} = 150$.

故选A .

【标注】【知识点】等比数列求和问题

11. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $S_{10} = 10$, $S_{30} = 130$, 则 $S_{40} = (\quad)$.

A. -510

B. 400

C. 400或-510

D. 30或40

【答案】 B

【解析】 根据题意, 等比数列 $\{a_n\}$ 中, 设其公比为 q ,

若 $S_{10} = 10$, $S_{30} = 130$, 其公比 $q \neq 1$,

$$\text{则 } S_{10} = \frac{a_1(1-q^{10})}{1-q} = 10, S_{30} = \frac{a_1(1-q^{30})}{1-q} = 130,$$

$$\text{则有 } \frac{S_{30}}{S_{10}} = \frac{1-q^{30}}{1-q^{10}} = 1+q^{10}+q^{20} = 13,$$

解可得: $q^{10} = 3$ 或 $q^{10} = -4$ (舍);

$$\text{则 } \frac{S_{40}}{S_{10}} = \frac{1-q^{40}}{1-q^{10}} = (1+q^{20})(1+q^{10}) = 40,$$

又由 $S_{10} = 10$,

则 $S_{40} = 10 \times 40 = 400$.

故选B .

【标注】【知识点】等比数列求和问题

12. 已知 $\{a_n\}$ 是首项为32的等比数列, S_n 是其前 n 项和, 且 $\frac{S_6}{S_3} = \frac{65}{64}$, 则数列 $\{|\log_2 a_n|\}$ 的前10项和为 _____ .

【答案】 58

【解析】 $\because \{a_n\}$ 是首项为32的等比数列, S_n 是其前 n 项和, 且 $\frac{S_6}{S_3} = \frac{65}{64}$,

$$\therefore \frac{\frac{32(1-q^6)}{1-q}}{\frac{32(1-q^3)}{1-q}} = \frac{65}{64},$$

$$\therefore 1+q^3 = \frac{65}{64},$$

$$\therefore q = \frac{1}{4},$$

$$\therefore a_n = 32 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 2^{7-2n},$$

$$\therefore |\log_2 a_n| = |7 - 2n|,$$

$$\therefore \text{数列}\{|\log_2 a_n|\}\text{前10项和为} 5 + 3 + 1 + 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 58.$$

故答案是：58.

【标注】【知识点】等比数列的性质及应用

【知识点】对数的概念及其运算

【素养】逻辑推理

【素养】数学运算

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 3n - 2 (n \geq 2)$, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式为 ()

- A. $a_n = 3n^2$ B. $a_n = 3n^2 + n$ C. $a_n = \frac{3n^2 - n}{2}$ D. $a_n = \frac{3n^2 + n}{2}$

【答案】C

【解析】由 $a_n = a_{n-1} + 3n - 2$ 得 $a_n - a_{n-1} = 3n - 2 (n \geq 2)$,

$$\therefore a_n - a_1 = 4 + 7 + \cdots + 3n - 2 = \frac{(n-1)(4+3n-2)}{2} = \frac{3n^2 - n - 2}{2},$$

$$\therefore a_n = \frac{3n^2 - n}{2}, \text{当} n = 1 \text{时也符合},$$

$$\therefore \text{数列的通项公式为} a_n = \frac{3n^2 - n}{2}.$$

故选：C.

【标注】【知识点】递推数列与递推方法；利用累加法求数列通项公式问题

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 33$, $a_{n+1} - a_n = 2n$, 则 $\frac{a_n}{n}$ 的最小值为 _____.

【答案】 $\frac{21}{2}$

【解析】方法一：当 $n \geq 2$ 时

$$\begin{cases} a_n - a_{n-1} = 2(n-1) \\ a_{n-1} - a_{n-2} = 2(n-2) \\ \vdots \\ a_2 - a_1 = 2 \cdot 1 \end{cases}$$

相加得：

$$\begin{aligned} a_n - a_1 &= 2[1 + 2 + \cdots + (n-1)] \\ &= 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n^2 - n \end{aligned}$$

$$\because a_1 = 33,$$

$$\therefore a_n = n^2 - n + 33 (n \geq 2),$$

$$\text{当 } n = 1 \text{ 时, } a_1 = 33,$$

$$\therefore a_n = n^2 - n + 33 (n \in \mathbf{N}^*).$$

$$\therefore \frac{a_n}{n} = \frac{n^2 - n + 33}{n} = n + \frac{33}{n} - 1,$$

当且仅当 $n = \frac{33}{n}$ 即 $n = \sqrt{33}$ 时, 取最小值,

$$\because n \in \mathbf{N}^*, \text{ 当 } n = 5 \text{ 时, } \frac{a_n}{n} = \frac{53}{5},$$

$$\text{当 } n = 6 \text{ 时, } \frac{a_n}{n} = \frac{21}{2} < \frac{53}{5},$$

$$\therefore \frac{a_n}{n} \text{ 的最小值为 } \frac{21}{2}.$$

$$\text{方法二: } \because a_{n+1} - a_n = 2n,$$

$$\therefore a_n - a_{n-1} = 2(n-1),$$

$$\therefore a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1$$

$$= (2n-2) + (2n-4) + \cdots + 2 + 33$$

$$= n^2 - 2n + 33 (n \geq 2),$$

又 $a_1 = 33$ 适合上式,

$$\therefore a_n = n^2 - n + 33,$$

$$\therefore \frac{a_n}{n} = n + \frac{33}{n} - 1.$$

$$\text{令 } f(x) = x + \frac{33}{x} - 1 (x > 0), \text{ 则 } f'(x) = 1 - \frac{33}{x^2},$$

$$\text{令 } f'(x) = 0 \text{ 得 } x = \sqrt{33},$$

$$\therefore \text{当 } 0 < x < \sqrt{33} \text{ 时, } f'(x) < 0, \text{ 当 } x > \sqrt{33} \text{ 时, } f'(x) > 0,$$

即 $f(x)$ 在区间 $(0, \sqrt{33})$ 上递减; 在区间 $(\sqrt{33}, +\infty)$ 上递增, 又 $5 < \sqrt{33} < 6$,

$$\text{且 } f(5) = 5 + \frac{33}{5} - 1 = \frac{53}{5}, f(6) = 6 + \frac{33}{6} - 1 = \frac{21}{2},$$

$$\therefore f(5) > f(6),$$

$$\therefore \text{当 } n = 6 \text{ 时, } \frac{a_n}{n} \text{ 有最小值 } \frac{21}{2}.$$

【标注】【知识点】利用累加法求数列通项公式问题; 递推数列与递推方法

15. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 6, a_2 = 4, a_3 = 3$, 且数列 $\{a_{n+1} - a_n\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 是等差数列, $\{a_n\}$ 的通项公式为 _____.

【答案】 $a_n = \frac{n^2 - 7n + 18}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$

【解析】 $a_2 - a_1 = 4 - 6 = -2,$

$$a_3 - a_2 = 3 - 4 = -1,$$

$$\therefore d = (a_3 - a_2) - (a_2 - a_1) = -1 - (-2) = 1,$$

$\therefore$ 数列 $a_{n+1} - a_n (n \in \mathbf{N}^*)$ 是等差数列,

$\therefore$ 数列 $a_{n+1} - a_n$ 的首项为 -2 , 公差为 1 的等差数列,

则 $a_{n+1} - a_n = n - 3$, 则 $a_2 - a_1 = 4 - 6 = -2$,

$a_3 - a_2 = 3 - 4 = -1, \dots, a_n - a_{n-1} = n - 4$ 相加得

$$a_n = 6 + (-2) + (-1) + \dots + (n - 4) = \frac{n^2 - 7n + 18}{2}.$$

故答案为 $a_n = \frac{n^2 - 7n + 18}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$.

【标注】【素养】数学运算

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $a_n =$ _____.

【答案】 2^n

【解析】 $a_n - a_{n-1} = 2^{n-1}, a_{n-1} - a_{n-2} = 2^{n-2}, \dots, a_2 - a_1 = 2^1.$

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_2 - a_1) + a_1 \\ &= 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} + 2 = \frac{2(1 - 2^{n-1})}{1 - 2} + 2 = 2^n (n \geq 2) \end{aligned}$$

此式对 $n = 1$ 也成立, $\therefore a_n = 2^n$.

【标注】【素养】数学运算

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n^2 + n}$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】 $a_n = 2 - \frac{1}{n}.$

【标注】【素养】逻辑推理

【素养】数学运算

【方法】累加法

【知识点】利用累加法求数列通项公式问题

【知识点】数列的前 n 项和

【思想】转化化归思想

18. 已知在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, na_{n+1} = (n+1)a_n$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 ().

A. $a_n = \frac{1}{n}$

B. $a_n = 2^n - 1$

C. $a_n = n$

D. $a_n = \frac{n+1}{2n}$

【答案】 C

【解析】 由 $na_{n+1} = (n+1)a_n$,

$$\text{可得: } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n},$$

$$\text{又} \because a_1 = 1,$$

$$\therefore a_n = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot a_1 = \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \cdots \times \frac{n}{n-1} \times 1 = n,$$

$$\therefore a_n = n.$$

所以C选项是正确的.

【标注】 【知识点】 利用累乘法求数列通项公式问题

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, $a_{n+1} = \frac{n+2}{n}a_n$, 则 $\frac{a_n+8}{n}$ 的最小值为 _____.

【答案】 $\frac{9}{2}$

【解析】 $\because a_{n+1} = \frac{n+2}{n}a_n$,

$$\therefore a_2 = \frac{3}{1}a_1, a_3 = \frac{4}{2}a_2, a_4 = \frac{5}{3}a_3, \cdots, a_n = \frac{n+1}{n-1}a_{n-1},$$

左边乘左边, 右边乘右边, 得

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdots a_n = \frac{3 \times 4 \times \cdots \times (n+1)}{1 \times 2 \times 3 \cdots \times (n-1)} a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{n-1},$$

左右同时约去 $a_2 a_3 a_4 \cdots a_{n-1}$, 得

$$a_n = \frac{n(n+1)}{1 \times 2} a_1 = \frac{n(n+1)}{2} (n \geq 2),$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } a_1 = \frac{1 \times 2}{2} = 1 \text{ 符合通式,}$$

$$\text{故 } a_n = \frac{n(n+1)}{2} (n \in \mathbf{N}^*).$$

$$\therefore \frac{a_n+8}{n},$$

$$= \frac{\frac{n(n+1)}{2} + 8}{n},$$

$$= \frac{n}{2} + \frac{8}{n} + \frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{n}{2} \cdot \frac{8}{n}} + \frac{1}{2},$$

$$= 2 \times 2 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}.$$

$$\text{当且仅当 } \frac{n}{2} = \frac{8}{n}, \text{ 即 } n=4 \text{ 时, 等号成立.}$$

$$\text{故 } \frac{a_n+8}{n} \text{ 的最小值为 } \frac{9}{2}.$$

【标注】 【知识点】 数列中最大项与最小项的求解问题; 利用累乘法求数列通项公式问题

设 $\{a_n\}$ 是首项为1的正项数列，且 $(n+1)a_{n+1}^2 - na_n^2 + a_{n+1} \cdot a_n = 0 (n=1, 2, 3, \dots)$ ，则它的通项公式 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $\frac{1}{n}$

【解析】 方法一：累乘法

$$\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdot \frac{a_5}{a_4} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{n-1}{n}, \therefore a_n = \frac{1}{n}.$$

方法二：迭代法

$$\therefore a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n.$$

$$\therefore a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-1} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} a_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2} a_{n-3} = \cdots = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} a_1, \therefore a_n = \frac{1}{n}.$$

方法三：特殊数列法

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}, \therefore \frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n} = 1.$$

$\therefore$ 数列 $\{(n+1)a_{n+1}\}$ 是一个以 a_1 为首项，1为公比的等比数列。

$$\therefore na_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot 1 = 1.$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{n}.$$

【标注】【知识点】利用累乘法求数列通项公式问题