

等比数列

一、等差数列求和公式

🔔 等差数列求和公式

对于公差为 d 的等差数列，我们用两种方式表示 S_n ：

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (n-1)d] \text{①}$$

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + [a_n - (n-1)d] \text{②}$$

①+②得：

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) = n(a_1 + a_n)$$

由此可得等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和的公式：

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

如果带入等差数列的通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$ ， S_n 也可以用首项 a_1 与公差 d 表示，即：

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}.$$

🔔 等差数列和的性质

已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，前 n 项和公式为 S_n ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n 则有

(1) $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$ 也成等差数列，公差为 n^2d 。

(2) 若 $S_p = S_q (p \neq q)$ ，则 $S_{p+q} = 0$ 。

(3) 若 $S_p = q, S_q = p (p \neq q)$ ，则 $S_{p+q} = -(p+q)$ 。

(4) 若项数为奇数，则有 $S_n = na_{\frac{n+1}{2}}$ 或者可以写成 $S_{2n-1} = (2n-1)a_n$ 。

(5) 数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 仍为等差数列，且公差为 $\{a_n\}$ 公差的一半。

$$(6) \frac{a_n}{b_n} = \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}.$$

(7) 数列 $\{a_n\}$ 总共有 $2n+1$ 项，则有 $\frac{S_{\text{偶}}}{S_{\text{奇}}} = \frac{n}{n+1}$ 。

🔔 等差数列和的最值

🔔 方法一

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2} = \frac{d}{2} \left[n - \left(\frac{1}{2} - \frac{a_1}{d} \right) \right]^2 - \frac{d}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{a_1}{d} \right)^2$$

🔔 方法二

我们就等差数列的两个基本量，分四种情况去讨论一下：

(1) $a_1 > 0, d \geq 0$. 此时通过通项公式分析可知, $a_n > 0$ 恒成立, 故 S_n 单调递增, 当且仅当 $n = 1$ 时, $S_n = S_1 = a_1$ 最小, 无最大值.

(2) $a_1 < 0, d \leq 0$. 此时通过通项公式分析可知, $a_n < 0$ 恒成立, 故 S_n 单调递减, 当且仅当 $n = 1$ 时, $S_n = S_1 = a_1$ 最大, 无最小值.

(3) $a_1 > 0, d < 0$. 此时通过通项公式分析可知 a_n 单调递减, 故当找到正整数 m 满足 $\begin{cases} a_m \geq 0 \\ a_{m+1} \leq 0 \end{cases}$ 时, S_m 是最大值, 而 m 的数值通过不等式组确定.

(4) $a_1 < 0, d > 0$. 此时通过通项公式分析可知 a_n 单调递增, 故当找到正整数 m 满足 $\begin{cases} a_m \leq 0 \\ a_{m+1} \geq 0 \end{cases}$ 时, S_m 是最小值, 而 m 的数值通过不等式组确定.

1. 典型例题

考察求和公式

1. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_7 = 14$, $S_{10} = 13$, 则 $S_{17} = (\quad)$.

A. 27

B. 0

C. $\frac{32}{3}$

D. $-\frac{17}{3}$

【答案】 D

【解析】 设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公差为 d ,

$$\text{由已知可得 } \begin{cases} 7a_1 + \frac{7 \times 6d}{2} = 14 \\ 10a_1 + \frac{10 \times 9d}{2} = 13 \end{cases}, \text{ 解得 } a_1 = \frac{51}{15}, d = -\frac{7}{15}.$$

$$\therefore S_{17} = 17a_1 + \frac{17 \times 16d}{2} = 17 \times \frac{51}{15} + 17 \times 8 \times \left(-\frac{7}{15}\right) = -\frac{17}{3}.$$

故选 D.

【标注】【知识点】等差数列求和问题

【素养】数学运算

备注：2019-2020 学年 10 月天津南开区天津市南开中学高二上学期周测 D 卷第 7 题

2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_{m-1} = -3$, $S_m = 0$, $S_{m+1} = 4$, $m = (\quad)$.

A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

【答案】 C

【解析】 $\because S_{m-1} = -3, S_m = 0, S_{m+1} = 4,$

$$S_m - S_{m-1} = a_m = 3,$$

$$S_{m+1} - S_m = a_{m+1} = 4 ,$$

$$\therefore d = a_{m+1} - a_m = 1 ,$$

$$\begin{cases} S_m = ma_1 + \frac{m(m-1)}{2} \cdot 1 = 0 \\ S_{m+1} = (m+1)a_1 + \frac{m(m+1)}{2} \cdot 1 = 5 \end{cases} ,$$

$$\therefore m = 7 .$$

故选C .

【标注】【知识点】等差数列的性质及应用

备注：2018-2019学年10月天津河西区天津市新华中学高二上学期月考第8题

3. 递减的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 $a_3 \cdot a_5 = 63$, $a_2 + a_6 = 16$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

(2) 求 $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|$.

【答案】 (1) $a_n = 12 - n$.

$$(2) \quad |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| = \begin{cases} -\frac{1}{2}n^2 + \frac{23}{2}n (n \leq 12) \\ \frac{1}{2}n^2 - \frac{23}{2}n + 132 (n > 12) \end{cases} .$$

【解析】 (1) $a_2 + a_6 = a_3 + a_5 = 16$,

$$\text{又 } a_3 \cdot a_5 = 63 ,$$

所以 a_3 与 a_5 是方程 $x^2 - 16x + 63 = 0$ 的两根 ,

$$\text{解得 } \begin{cases} a_3 = 7 \\ a_5 = 9 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a_3 = 9 \\ a_5 = 7 \end{cases} ,$$

$$\text{又该等差数列递减, 所以 } \begin{cases} a_3 = 9 \\ a_5 = 7 \end{cases} ,$$

$$\text{则公差 } d = \frac{a_5 - a_3}{2} = -1 , a_1 = 11 ,$$

$$\text{所以 } a_n = 11 + (n-1)(-1) = 12 - n .$$

(2) 由 (2) 知 , 当 $n \leq 12$ 时 , $a_n \geq 0$, 当 $n > 12$ 时 , $a_n < 0$,

①当 $n \leq 12$ 时 ,

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|$$

$$= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$$= S_n$$

$$= \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$= \frac{n(11 + 12 - n)}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}n^2 + \frac{23}{2}n ;$$

②当 $n > 12$ 时,

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{12}) - (a_{13} + a_{14} + \cdots + a_n)$$

$$= -S_n + 2S_{12}$$

$$= \frac{1}{2}n^2 - \frac{23}{2}n + 2 \times 66$$

$$= \frac{1}{2}n^2 - \frac{23}{2}n + 132,$$

$$\text{所以 } |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| = \begin{cases} -\frac{1}{2}n^2 + \frac{23}{2}n & (n \leq 12) \\ \frac{1}{2}n^2 - \frac{23}{2}n + 132 & (n > 12) \end{cases}.$$

【标注】【知识点】等差数列求和问题；求等差数列前 n 项和的最值；等差数列的性质及应用；等差数列求通项问题；数列的前 n 项和

备注：2019-2020学年10月天津和平区天津市第二南开中学高二上学期月考第19题

考察求和的性质

4. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，公差 $d = \frac{1}{2}$ ，前100项的和 $S_{100} = 45$ ，则 $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 10

【解析】 $\because$ 等差数列中 $(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99}) = 50d = 25$,

$$\text{又 } \because S_{100} = (a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}) + (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99})$$

$$= 25 + 2(a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99}) = 45,$$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99} = 10.$$

【标注】【素养】数学运算

【知识点】等差数列的性质及应用

【知识点】等差数列求和问题

【知识点】等差数列前 n 项和的性质

备注：2018-2019学年10月天津南开区天津市育红中学高二上学期月考第12题5分

5. 设等差数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， T_n ，若对任意自然数 n 都有 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{2n-3}{4n-3}$ ，则

$$\frac{a_9}{b_5 + b_7} + \frac{a_3}{b_8 + b_4} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\frac{19}{41}$

【解析】由等差数列的性质和求和公式可得：

$$\begin{aligned}\frac{a_9}{b_5 + b_7} + \frac{a_3}{b_8 + b_4} &= \frac{a_9}{b_1 + b_{11}} + \frac{a_3}{b_1 + b_{11}} \\&= \frac{a_3 + a_9}{b_1 + b_{11}} = \frac{a_1 + a_{11}}{b_1 + b_{11}} = \frac{\frac{11(a_1 + a_{11})}{2}}{\frac{11(b_1 + b_{11})}{2}} \\&= \frac{S_{11}}{T_{11}} = \frac{2 \times 11 - 3}{4 \times 11 - 3} = \frac{19}{41}.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】等差数列的性质及应用

备注：2017-2018学年3月天津河西区天津市新华中学高一下学期月考特长班第14题4分

6. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $\frac{S_3}{S_6} = \frac{1}{3}$ ，则 $\frac{S_6}{S_{12}} = ()$.

A. $\frac{2}{7}$

B. $\frac{6}{11}$

C. $\frac{3}{10}$

D. $\frac{27}{77}$

【答案】C

【标注】【知识点】等差数列的性质及应用

7. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = -2015$ ，其前 n 项的和为 S_n ，若 $\frac{S_{2007}}{2007} - \frac{S_{2005}}{2005} = 2$ ，则 $S_{2015} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】-2015

【解析】 $\frac{S_{2007}}{2007} - \frac{S_{2005}}{2005} = A_{1004} - A_{1003} = d = 2$ ，故 $S_{2015} = 2015a_{1008} = -2015$.

【标注】【知识点】等差数列的性质及应用

【素养】数学运算

8. 等差数列共有 $2n + 1$ 项，所有奇数项之和为132，所有偶数项之和为120，则 $n = ()$.

A. 9

B. 10

C. 11

D. 12

【答案】B

【解析】设 $\{a_n\}$ 公差为 d ，

$$\therefore a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} + a_{2n+1} = 132 ,$$

$$a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} = 120 ,$$

$$\therefore nd - a_{2n+1} = -12 ,$$

$$\therefore -a_1 - nd = -12 , a_{n+1} = 12 ,$$

$$\text{又} \therefore \frac{(n+1)(a_1 + a_{2n+1})}{2} = (n+1) \cdot a_{n+1} = 132 ,$$

$$\therefore n + 1 = 11 ,$$

$$\therefore n = 10 .$$

故选B .

【标注】【知识点】等差数列前n项和的性质

备注：2017-2018学年天津河西区天津市新华中学高一下学期期中理科第6题

考察和的最值

9. 设数列 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列， $a_1 + a_3 + a_5 = 105$ ， $a_2 + a_4 + a_6 = 99$. 则 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ ；数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 取得最大值时， $n = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $41 - 2n$; 20

【解析】 $\because a_1 + a_3 + a_5 = 105$, $a_2 + a_4 + a_6 = 99$.

$$\therefore 3a_1 + 6d = 105 , 3a_1 + 9d = 99 ,$$

$$\text{解得 } a_1 = 39 , d = -2 ,$$

$$\text{则 } a_n = 39 - 2(n - 1) = 41 - 2n ;$$

$$\text{令 } a_n \geq 0 , \text{ 解得 } n \leq \frac{41}{2} = 20 + \frac{1}{2} .$$

$$\therefore \text{数列 } \{a_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } S_n \text{ 取得最大值时 , } n = 20 .$$

【标注】【知识点】等差数列的概念与通项公式

【知识点】求等差数列前n项和的最值

【知识点】数列的函数特性

【素养】逻辑推理

【素养】数学运算

备注：2019-2020学年10月天津河西区天津市海河中学高二上学期月考第9题

10. 设等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $3a_8 = 5a_{13}$ ，且 $a_1 > 0$ ， S_n 为其前 n 项和，则 S_n 中最大的是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 S_{20}

【解析】 $\because a_{13} = a_8 + 5d$ ， d 即为公差 .

$$\text{又 } 3a_8 = 5a_{13} = 5(a_8 + 5d) .$$

$$\therefore a_8 = -\frac{25}{2}d > 0 .$$

$$\therefore d < 0 .$$

$$\therefore a_8 = a_1 + 7d ,$$

$$\therefore a_1 = -\frac{39}{2}d .$$

$$\therefore S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

$$= \frac{1}{2}dn^2 - 20dn .$$

$$\therefore n = 20 \text{ 为对称轴 .}$$

即 $n = 20$ 时, S_n 有最大值 .

【标注】【知识点】数列中最大项与最小项的求解问题

备注：2018-2019学年天津河西区天津市第四十二中学高二下学期开学考试第15题5分

11. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 25$, $S_{17} = S_9$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的最大值为 _____ .

【答案】 169

【解析】 $\therefore S_{17} = S_9$,

$$\therefore S_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} + a_{17} = S_9 ,$$

$$\therefore a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} + a_{17} = 0 ,$$

又 $\therefore \{a_n\}$ 为等差数列 ,

$$\therefore 4(a_{13} + a_{14}) = 0 ,$$

$$\therefore a_{13} > 0 , a_{14} < 0 ,$$

$\therefore S_{13}$ 为最大值 ,

$$\text{又} \therefore S_{17} = S_9 ,$$

$$\therefore \frac{17(a_1 + a_{17})}{2} = \frac{9(a_1 + a_9)}{2} ,$$

$$\therefore a_1 + 25d = -25 ,$$

$$\therefore d = -2 ,$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{13} &= \frac{13(a_1 + a_{13})}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d , \\ &= 13a_1 + \frac{13 \times 12}{2} \times (-2) = 169 . \end{aligned}$$

【标注】【知识点】求等差数列前 n 项和的最值

备注：2018-2019学年11月天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高二上学期月考理科第15题4分

12. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其公差 $d < 0$, 其前 n 项和记为 S_n , 且 $S_{16} > 0$, $S_{17} < 0$, 则当 S_n 取最大值时的 $n =$ _____ .

【答案】 8

【解析】 $\because S_{16} > 0, S_{17} < 0,$
 $\therefore 16a_1 + \frac{16 \times 15}{2}d > 0, 17a_1 + \frac{17 \times 16}{2}d < 0,$
化为 $2a_1 + 15d > 0, a_1 + 8d < 0,$
即 $a_8 + a_9 > 0, a_9 < 0,$
 $\therefore a_8 > 0, a_9 < 0,$
又公差 $d < 0,$
 $\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是单调递减数列,
 $\therefore$ 当 S_n 取最大值时的 $n = 8.$
故答案为: 8.

【标注】 【知识点】 求等差数列前n项和的最值

备注: 2019-2020学年10月天津和平区天津市第二南开中学高二上学期月考第13题4分

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 若 $\frac{a_{11}}{a_{10}} < -1$, 且它们的前 n 项和 S_n 有最大值, 则使得 $S_n > 0$ 的 n 的最大值为 ().
- A. 11 B. 19 C. 20 D. 21

【答案】 B

【解析】 由 $\frac{a_{11}}{a_{10}} < -1$ 可得 $\frac{a_{11} + a_{10}}{a_{10}} < 0,$
由它们的前 n 项和 S_n 有最大值, 可得数列的 $d < 0,$
 $\therefore a_{10} > 0, a_{11} + a_{10} < 0, a_{11} < 0,$
 $\therefore a_1 + a_{19} = 2a_{10} > 0, a_1 + a_{20} = a_{11} + a_{10} < 0,$
使得 $S_n > 0$ 的 n 的最大值 $n = 19.$
故选 B.

【标注】 【知识点】 等差数列的概念与通项公式

备注: 2018-2019学年10月天津和平区天津市第二十中学高二上学期月考理科第9题4分

14. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 < 0$ 且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = 0$, 设 $b_n = a_n a_{n+1} a_{n+2} (n \in \mathbf{N}^*)$, 当 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 取最小值时, n 的值为 ().
- A. 48 B. 50 C. 48或50 D. 48或49

【答案】 C

【解析】 $\because$ 等差数列 $\{a_n\}$ 中 ,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = 0 ,$$

$$\therefore 50(a_1 + a_{100}) = 50(a_{50} + a_{51}) = 0 ,$$

$$\therefore a_{50} + a_{51} = 0 , a_1 + a_{100} = 0 ,$$

$$\text{又} \because a_1 < 0 ,$$

$$\therefore a_{100} > 0 ,$$

$\therefore \{a_n\}$ 为等差数列递增 ,

$$\therefore a_{50} < 0 , a_{51} > 0 ,$$

$$\text{又} \because b_n = a_n a_{n+1} a_{n+2} ,$$

$$\therefore b_{48} = a_{48} a_{49} a_{50} < 0 ,$$

$$b_{49} = a_{49} a_{50} a_{51} > 0 ,$$

$$b_{50} = a_{50} a_{51} a_{52} < 0 ,$$

设 $\{b_n\}$ 前 n 项和为 S_n ,

$$S_{50} = S_{48} + b_{49} + b_{50} = S_{48} + a_{50} a_{51} (a_{49} + a_{52}) = S_{48} + 0 ,$$

$$\therefore S_{50} = S_{48} ,$$

$\therefore$ 当 $\{b_n\}$ 前 n 项和 S_n 取最小值时 , n 的取值为 48 或 50 .

故选 C .

【标注】 【知识点】 数列中最大项与最小项的求解问题

备注 : 2018-2019 学年 10 月天津和平区天津市第二十中学高二上学期月考理科第 8 题 4 分

教法备注 :

此类问题主要需要我们首先明确 a_1 和 d 的正负 , 然后根据题目给的条件确定 a_1 和 d 的等量关系 , 然后可以根据 a_1 和 d 的等量关系确定数列通项由正变负或者由负变正的临界项数 , 最后即可确定取得最值时的项数以及最大或最小的前 n 项和。

2. 巩固练习

 考察求和公式

15. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , 若 $a_2 + a_5 = 7$, $\frac{a_3}{3} + a_8 = 9$, 则 $S_{100} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 5050

【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$,

$$\therefore a_2 + a_5 = 7, \frac{a_3}{3} + a_8 = 9,$$

由题意可得:

$$\begin{cases} a_1 + d + a_1 + 4d = 7 \\ \frac{a_1 + 2d}{3} + a_1 + 7d = 9 \end{cases} \text{解得: } \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 1 \end{cases},$$

$$\therefore S_{100} = 100a_1 + \frac{100 \times 99}{2}d,$$

$$= 100 \times 1 + \frac{100 \times 99}{2} \times 1$$

$$= 5050.$$

故答案为: 5050.

【标注】【知识点】等差数列的概念与通项公式; 等差数列求和问题

备注: 2019-2020学年10月天津河西天津市海河中学高二上学期月考第7题

16. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_5 = 50$, $S_n = 210$, $a_{n-2} = 20$, 则 $n = ()$.

A. 12

B. 14

C. 16

D. 18

【答案】B

【解析】由题意得: $S_5 = \frac{5 \times (a_1 + a_5)}{2} = 50$, $a_1 + a_5 = 20$.

$$a_1 + a_1 + 4d = 20, a_1 + 2d = 10. \text{ ①}$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = 210. a_1 + a_n = 2a_1 + (n-1)d = \frac{420}{n}. \text{ ②}$$

$$\text{②}-\text{①}, \text{得: } a_1 + (n-3)d = \frac{420}{n} - 10.$$

$$\text{即 } a_{n-2} = \frac{420}{n} - 10 = 20,$$

$$\text{解得: } n = 14,$$

故答案选: B.

【标注】【知识点】等差数列求和问题

备注: 2019-2020学年9月天津河北区天津市第二中学高二上学期月考第10题5分

17. 已知在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -60$, $a_{17} = -12$.

(1) 该数列第几项起为正?

(2) 求 $T_n = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|$.

【答案】(1) 该数列第22项起为正.

$$(2) \quad T_n = \begin{cases} \frac{1}{2}n(123 - 3n), 1 \leq n \leq 21 \\ \frac{1}{2}(3n^2 - 123n + 2520), n \geq 22 \end{cases}.$$

【解析】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$a_1 = -60, a_{17} = -12,$$

$$\text{可得 } -60 + 16d = -12,$$

$$\text{解得 } d = 3,$$

$$\text{则 } a_n = -60 + 3(n-1) = 3n - 63, n \in \mathbf{N}^+,$$

$$\text{由 } a_n > 0, \text{ 可得 } n > 21,$$

$$\text{由于公差 } d > 0,$$

$\therefore$ 等差数列 $\{a_n\}$ 为递增数列.

则该数列第22项起为正.

$$(2) \quad \text{由 } S_n = \frac{1}{2}n(-60 + 3n - 63) \\ = \frac{1}{2}n(3n - 123).$$

$$\text{当 } n \leq 21 \text{ 时},$$

$$T_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

$$= -S_n$$

$$= \frac{1}{2}n(123 - 3n).$$

$$\text{当 } n \geq 22 \text{ 时},$$

$$T_n = S_n - S_{21} - S_{21}$$

$$= \frac{1}{2}n(3n - 123) - 2 \times (-630)$$

$$= \frac{3n^2 - 123n + 2520}{2}.$$

$$\text{既有: } T_n = \begin{cases} \frac{1}{2}n(123 - 3n), 1 \leq n \leq 21 \\ \frac{1}{2}(3n^2 - 123n + 2520), n \geq 22 \end{cases}.$$

【标注】【知识点】绝对值型数列求和；求等差数列前 n 项和的最值

备注：2018-2019学年天津滨海新区南开中学滨海生态城学校高二上学期期中第16题12分

考察求和的性质

18. 等差数列 $\{a_n\}$ 中，公差 $d = 2$ ，且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = 200$ ，则 $a_5 + a_{10} + a_{15} + \cdots + a_{100} =$ _____.

【答案】 120

【解析】 设 $A = a_1 + a_6 + a_{11} + \cdots + a_{96}$,

$$B = a_2 + a_7 + a_{12} + \cdots + a_{97} ,$$

$$C = a_3 + a_8 + a_{13} + \cdots + a_{98} ,$$

$$D = a_4 + a_9 + a_{14} + \cdots + a_{99} ,$$

$$E = a_5 + a_{10} + a_{15} + \cdots + a_{100} ,$$

$$\therefore B = A + 20d ,$$

$$C = B + 20d ,$$

$$D = C + 20d ,$$

$$E = D + 20d ,$$

$$A + B + C + D + E = a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = 200 ,$$

$$\therefore E - 80d + E - 60d + E - 40d + E - 20d + E = 200 ,$$

$$\therefore 5E = 200 + 200d ,$$

$$\therefore E = 40 + 40d = 120 .$$

【标注】 【知识点】 等差数列求和问题

备注：2019-2020学年9月天津南开区天津市南开中学高二上学期周测C卷第16题5分

19. 设 S_n, T_n 分别为等差数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 若 $\frac{a_n}{b_n} = \frac{4n+2}{2n-5}$, 则 $\frac{S_{19}}{T_{19}} = (\quad)$.
- A. $\frac{26}{11}$ B. $\frac{38}{13}$ C. $\frac{46}{17}$ D. $\frac{14}{5}$

【答案】 D

【解析】 令 $n = 10$, 得到 $\frac{a_{10}}{b_{10}} = \frac{42}{15} = \frac{14}{5}$,

$$\text{则 } \frac{S_{19}}{T_{19}} = \frac{\frac{19(a_1 + a_{19})}{2}}{\frac{19(b_1 + b_{19})}{2}} = \frac{a_{10}}{b_{10}} = \frac{14}{5} .$$

故选D .

【标注】 【知识点】 等差数列求和问题；等差数列前 n 项和的性质；等差数列的性质及应用

备注：2019-2020学年天津南开区天津市南开中学高二上学期期中第6题4分

20. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_{10} = 20$, $S_{20} = 15$, 则 $S_{30} = (\quad)$.
- A. 10 B. -30 C. -15 D. 25

【答案】 C

【解析】 由等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和的性质可得：

$S_{10}, S_{20} - S_{10}, S_{30} - S_{20}$ 也成等差数列，

所以 $2(S_{20} - S_{10}) = S_{10} + (S_{30} - S_{20})$ ，

即 $2 \times (15 - 20) = 20 + S_{30} - 15$ ，

解得 $S_{30} = -15$ 。

故选C。

【标注】【知识点】等差数列前 n 项和的性质；等差数列的性质及应用

备注：2019-2020学年10月天津河东区天津市第四十五中学高二上学期月考第6题5分

21. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列， $\{S_n\}$ 是前 n 项和， $a_1 = -2010$ ， $\frac{S_{2014}}{2014} - \frac{S_{2011}}{2011} = 3$ ，则 $a_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 -2008

【解析】 $S_n = \frac{d}{2}n^2 + n\left(a_1 - \frac{d}{2}\right)$ ，

$\therefore \left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列，

$\therefore \frac{S_n}{n} = \frac{d}{2}n + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)$ ，

$\therefore \frac{S_{2014}}{2014} - \frac{S_{2011}}{2011}$

$= \frac{d}{2} \cdot 2014 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right) - \frac{d}{2} \cdot 2011 - \left(a_1 - \frac{d}{2}\right) = 3d = 3$ ，

$\therefore d = 1$ ，

$\therefore \frac{S_2}{2} = \frac{S_1}{1} + 1$ ，

$\therefore a_2 = -2008$ 。

【标注】【知识点】等差数列求和问题

22. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为377，项数 n 为奇数，且前 n 项和中奇数项和与偶数项和之比为7:6，求中间项 。

【答案】 29

【解析】 记 $n = 2k - 1, k \in \mathbf{N}^*$ ，

则有 $a_1 + a_3 + \cdots + a_{2k-1} = ka_k$ ，

$a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k-2} = (k-1)a_k$ ，

于是有 $k : (k-1) = 7 : 6 \Rightarrow k = 7$ ；

$$S_{2k-1} = S_{13} = 377 = 13a_7 \Rightarrow a_7 = 29 .$$

【标注】【知识点】等差数列求通项问题；等差数列的前 n 项和

考察和的最值

23. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $-1 < \frac{a_7}{a_6} < 0$, 若它的前 n 项和 S_n 有最大值, 则当 $S_n > 0$ 时, n 的最大值为 () .
- A. 11 B. 12 C. 13 D. 14

【答案】 B

【解析】 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且它的前 n 项和 S_n 有最大值, 可得 $d < 0$.

$$\text{由 } \frac{a_7}{a_6} < 0, \text{ 得 } a_6 > 0, a_7 < 0,$$

$$\text{由 } \frac{a_7}{a_6} > -1, \text{ 得 } \frac{a_6 + a_7}{a_6} > 0,$$

$$\therefore a_6 + a_7 > 0,$$

$$\therefore a_1 + a_{12} > 0,$$

$$\therefore S_{12} > 0,$$

$$\text{又 } S_{13} = 13a_7 < 0,$$

$$\therefore \text{当 } S_n > 0 \text{ 时, } n \text{ 的最大值为 } 12.$$

故选B.

【标注】【知识点】求等差数列前 n 项和的最值

备注：2018-2019学年天津和平区天津市第一中学高二上学期期中第3题

24. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_2 = -3$, $S_5 = -10$, 则 S_n 的最小值为 ____ .

【答案】 -10

【解析】 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,

设首项为 a_1 , 公差为 d ,

$$\therefore a_2 = -3, S_5 = -10,$$

$$\text{解方程组 } \begin{cases} a_1 + d = -3 \\ \frac{5(a_1 + a_1 + 4d)}{2} = -10 \end{cases},$$

$$\text{得 } a_1 = -4, d = 1,$$

$$a_n = -4 + n - 1 = n - 5 (n \in \mathbf{N}^*)$$

$$a_n = n - 5 \leq 0 \text{ 时, } n \leq 5,$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 从第6项开始 $a_n > 0$,

$\therefore$ 前5项的和最小, 即 $S_5 = \frac{5(a_1 + a_5)}{2} = -10$.

所以 S_n 的最小值为 -10 .

【标注】【知识点】等差数列求和问题；等差数列的性质及应用

备注：2019-2020学年天津南开区天津市南开翔宇学校高二上学期期中第11题5分

二、等比数列的定义与通项公式

等比数列定义

一般地, 如果一个数列从第2项起, 每一项与它的前一项的比值等于同一非零常数, 那么这个数列叫做**等比数列**, 这个常数叫做等比数列的**公比**, 公比通常用字母 $q (q \neq 0)$ 表示.

等比中项概念

与等差中项的概念类似, 如果在 a 与 b 中间插入一个数 G , 使 a, G, b 成等比数列, 那么 G 叫做 a 与 b 的**等比中项**.

等比数列通项公式

因为在一个等比数列 $\{a_n\}$ 中, 从第2项起, 每一项与它的前一项的比都等于公比 q . 也就是说, 从第2项起, 每一项都等于它的前一项乘以公比 q . 于是有:

$$a_1 = a_1,$$

$$a_2 = a_1 q,$$

$$a_3 = a_2 q = a_1 q^2,$$

$$a_4 = a_3 q = a_1 q^3,$$

.....

由此得到等比数列的通项公式

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

其中, a_1 与 q 均不为0.

等比数列的性质

$$1. a_n = a_m q^{n-m}.$$

2. $\{a_n\}$ 的单调性如下:

(1) 当 $q > 0$ 时,

①若 $a_1(q-1) > 0$, 则 $\{a_n\}$ 是递增数列;

②若 $a_1(q-1) < 0$, 则 $\{a_n\}$ 是递减数列;

③若 $a_1(q-1) = 0$, 即 $q = 1$, 则 $\{a_n\}$ 是常数列, 即 $a_n = a_1$.

(2) 当 $q < 0$ 时, $\{a_n\}$ 不单调, 此时 $\{a_n\}$ 的各项数值在正负之间徘徊, 我们称 $\{a_n\}$ 为摆动数列(或震荡数列), 它的所有奇数项和偶数项(排列顺序不变)保持同号, 但是彼此异号.

3. 当 $m+n=p+q(m, n, p, q \in \mathbf{N}^*)$ 时, 有 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$; 特别地, 若 n 是 m 和 p 的等差中项时, a_n 是 a_m 和 a_p 的等比中项.

4. 对于非零常数 λ 和公比为 q' 的等比数列 $\{b_n\}$, 有如下结论:

(1) $\{\lambda a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, $\{\lambda b_n\}$ 是公比为 q' 的等比数列;

(2) $\{a_n b_n\}$ 是公比为 qq' 的等比数列, $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 是公比为 $\frac{q}{q'}$ 的等比数列.

(3) $\{|a_n|\}$ 是公比为 $|q|$ 的等比数列.

5. 每隔 $k(k \in \mathbf{N}^*)$ 项取出一项, 按照原来的顺序排列所得的数列仍然是等比数列, 且公比为 q^{k+1} .

6. 连续 k 项的和仍然构成等比数列, 且公比为 q^k .

7. 若 $a_n > 0$, 则 $\{\log_a a_n\}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)是等差数列, 且公差为 $\log_a q$.

1. 典型例题

考察等比数列定义

25. 若 $x, 2x+2, 3x+3$ 是一个等比数列的连续三项, 则 x 的值为().

A. -4

B. -1

C. 1或4

D. -1或-4

【答案】 A

【解析】

$$\text{联立方程组: } \begin{cases} (2x+2)^2 = x(3x+3) \\ x \neq 0 \\ 2x+2 \neq 0 \\ 3x+3 \neq 0 \end{cases},$$

解得 $x = -4$.

故选A.

【标注】【知识点】等比中项

备注: 2018-2019学年10月天津南开区天津市育红中学高二上学期月考第2题4分

26.

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = ka_n - 1 (n \in \mathbf{N}^*, k \in \mathbf{R}^*)$ ，若数列 $\{a_n - 1\}$ 是等比数列，则 k 值等于 () .

A. 1

B. -1

C. -2

D. 2

【答案】 D

【解析】 由 $a_{n+1} = ka_n - 1$ ，得 $a_{n+1} - 1 = ka_n - 2 = k\left(a_n - \frac{2}{k}\right)$ ，

$\therefore$ 数列 $\{a_n - 1\}$ 是等比数列，

$\therefore \frac{2}{k} = 1$ ，即 $k = 2$.

故选D .

【标注】 【知识点】 等比数列的判定与证明

备注：2019-2020学年天津和平区天津市第一中学高二上学期期中第3题3分

考察等比数列通项公式

27. 已知等比数列 $\{a_n\}$ ，其前 n 项和为 S_n ， $a_2 + a_6 = 36$ ， $a_4 + a_7 = 18$.

求 a_n .

【答案】 (1) $a_n = 2^{8-n}$.

【解析】 (1) 设首项为 a_1 ，公比为 q ，

$\therefore$ 等比数列 $\{a_n\}$ ，其前 n 项和为 S_n ， $a_2 + a_6 = 36$ ， $a_4 + a_7 = 18$ ，

$$\therefore \begin{cases} a_1 q^2 + a_1 q^6 = 36 \\ a_1 q^3 + a_1 q^6 = 18 \end{cases} ,$$

解得 $a_1 = 128$ ， $q = \frac{1}{2}$ ，

$$\therefore a_n = 128 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^{8-n} .$$

【标注】 【知识点】 等比数列求和问题；等比数列求通项问题

备注：2018-2019学年天津蓟县高二上学期期中第16题8分

考察等比数列性质

28. 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，若 $a_1 + a_2 = 1$ ， $a_3 + a_4 = 2$ ，则

$$\log_2 \frac{a_{2011} + a_{2012} + a_{2013} + a_{2014}}{3} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

【答案】 1005

【解析】 由题意设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , $q > 0$.

$$\because a_1 + a_2 = 1, a_3 + a_4 = 2.$$

$$\therefore q^2 = \frac{a_3 + a_4}{a_1 + a_2} = 2.$$

$$\therefore a_{2011} + a_{2012} + a_{2013} + a_{2014}$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)q^{2010}$$

$$= 3 \times 2^{1005}.$$

$$\therefore \log_2 \frac{a_{2011} + a_{2012} + a_{2013} + a_{2014}}{3}$$

$$= \log_2 2^{1005}$$

$$= 1005.$$

【标注】 【知识点】 等比数列求通项问题

备注：2018-2019学年天津河西区天津市第四十二中学高二下学期开学考试第16题5分

29. 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 且 $a_5a_6 + a_4a_7 = 18$, 则 $\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \cdots + \log_3 a_{10} =$

_____ .

【答案】 10

【解析】 方法一： $\because$ 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 且

$$a_5a_6 + a_4a_7 = 18,$$

$$\therefore a_5a_6 + a_4a_7 = 2a_5a_6 = 18,$$

$$\therefore a_5a_6 = 9,$$

$$\therefore \log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \cdots + \log_3 a_{10}$$

$$= \log_3 (a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_{10})$$

$$= \log_3 9^5$$

$$= 5 \times 2 = 10.$$

故答案为10.

方法二：不妨取 $\{a_n\}$ 为常数列,

$$a_5a_6 + a_4a_7 = 18 \Rightarrow 2a_n^2 = 18 \Rightarrow a_n = 3,$$

$$\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \cdots + \log_3 a_{10}$$

$$= \log_3 (a_1 \cdot a_2 \cdots a_{10})$$

$$= \log_3 a_{10}^{10}$$

$$= \log_3 3^{10}$$

$= 10$.

【标注】【知识点】对数的概念及其运算

【知识点】等比数列的性质及应用

【知识点】等比数列的概念与通项公式

【素养】数学运算

备注：2018-2019学年天津蓟县高二上学期期中第15题4分

2. 巩固练习

考察等比数列定义

30. 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，若 $a_1 + 1$ ， $a_3 + 3$ ， $a_5 + 5$ 构成公比为 q 的等比数列，则 $q =$ _____ .

【答案】1

【解析】方法一：设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ， $a_3 = a_1 + 2d$ ， $a_5 = a_1 + 4d$ ，

因此 $(a_1 + 2d + 3)^2 = (a_1 + 1)(a_1 + 4d + 5)$ ，

展开解得： $d = -1$ ，此时 $q = \frac{a_3 + 3}{a_1 + 1} = 1$.

方法二：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，

由 $a_1 + 1$ ， $a_3 + 3$ ， $a_5 + 5$ 构成等比数列，

得： $(a_3 + 3)^2 = (a_1 + 1)(a_5 + 5)$ ，

整理得： $a_3^2 + 6a_3 + 4 = a_1a_5 + 5a_1 + a_5$ ，

即 $(a_1 + 2d)^2 + 6(a_1 + 2d) + 4 = a_1(a_1 + 4d) + 5a_1 + a_1 + 4d$.

化简得： $(d + 1)^2 = 0$ ，即 $d = -1$.

$\therefore q = \frac{a_3 + 3}{a_1 + 1} = \frac{a_1 + 2d + 3}{a_1 + 1} = \frac{a_1 + 2 \times (-1) + 3}{a_1 + 1} = \frac{a_1 + 1}{a_1 + 1} = 1$.

故答案为：1 .

【标注】【知识点】等差数列的概念与通项公式

备注：2017-2018学年3月天津河西区天津市新华中学高一下学期月考特长班第13题4分

31. 数列 $\{a_n\}$ 中，“ $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2} (n \in \mathbf{N}^*)$ ”是“数列 $\{a_n\}$ 为等比数列”的（ ） .

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，根据等比数列的性质得：

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2},$$

$$\text{反之，若“}\forall n \in \mathbf{N}^*, a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}\text{”，}$$

当 $a_n = 0$ ，此式也成立，但数列 $\{a_n\}$ 不是等比数列，

$\therefore \forall n \in \mathbf{N}^*, a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 是“数列 $\{a_n\}$ 是等比数列”的必要不充分条件。

故选B。

【标注】【知识点】充要条件与数列结合；等比数列的判定与证明

备注：2019-2020学年天津南开区天津市南开中学高二上学期期中第2题4分



考察等比数列通项公式

32. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数， $2a_4, a_3, 4a_5$ 成等差数列，且 $a_3 = 2a_2^2$ ，那么数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n =$ _____。

【答案】 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

【解析】 $2a_3 = 2a_4 + 4a_5 \Rightarrow 1 = q + 2q = \frac{1}{2},$

$$a_3 = 2a_2^2 \Rightarrow 1 = 2a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

【标注】【知识点】等差数列的性质及应用；等比数列求通项问题

备注：2018-2019学年天津南开区天津市育红中学高二上学期期中第12题5分



考察等比数列性质

33. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项都是正数，且 $3a_1, \frac{1}{2}a_3, 2a_2$ 成等差数列，则 $\frac{a_{19} + a_{20}}{a_{17} + a_{18}} = ()$ 。

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

【答案】D

【解析】 $\because \{a_n\}$ 为等比数列且各项都为正数，且 $3a_1, \frac{1}{2}a_3, 2a_2$ 成等比数列，

$$\therefore 2 \cdot \frac{1}{2}a_3 = 3a_1 + 2a_2,$$

$$a_3 = 3a_1 + 2a_2,$$

$$\begin{aligned}
 a_1 \cdot q^2 &= 3a_1 + 2a_1 \cdot q, \\
 q^2 - 2q - 3 &= 0, \\
 (q-3)(q+1) &= 0, \\
 q &= 3 \text{ 或 } q = -1 \text{ (舍去)}, \\
 \therefore \frac{a_{19} + a_{20}}{a_{17} + a_{18}} &= \frac{q^2(a_{17} + a_{18})}{a_{17} + a_{18}} = q^2 = 3^2 = 9.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】等比数列求通项问题；等差数列的性质及应用

备注：2019-2020学年10月天津津南区天津市咸水沽一中高二上学期月考第7题4分

34. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{4}$ ， $a_3 a_5 = 4(a_4 - 1)$ ，则 $a_2 = (\quad)$.
- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

【答案】 B

【解析】 等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{4}$ ，
 $a_3 a_5 = 4(a_4 - 1)$.
 $\therefore a_4^2 = 4(a_4 - 1)$.
 则 $a_4^2 - 4a_4 + 4 = 0$,
 $(a_4 - 2)^2 = 0$.
 $\therefore a_4 = 2$.
 由 $a_4 = a_1 q^3 = \frac{1}{4} q^3 = 2$,
 则 $q^3 = 8$, $q = 2$.
 所以 $a_2 = a_1 q = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$.
 故B正确 .

【标注】【知识点】等比数列的性质及应用；等比数列的概念与通项公式

备注：2019-2020学年天津南开区高二上学期期末第4题5分