

等差数列练习题

1. 观察数列前几项，求出下列数列的一个通项公式

- ① $-1, 1, , -1, 1, \dots$ ② $0, 1, 0, 1, \dots$;
③ $1, 11, 111, 1111, \dots$; ④ $-1, \frac{4}{3}, -\frac{9}{5}, \frac{16}{7}, \dots$;

【答案】 $a_n = (-1)^n$ 或 $a_n = \cos n\pi$ (可以不讲) 或 $a_n \begin{cases} -1, n \text{ 为奇数} \\ 1, n \text{ 为偶数} \end{cases}$

② $a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$ 或 $a_n \begin{cases} 0, n \text{ 为奇数} \\ 1, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ③ $\frac{1}{9}(10^n - 1)$

【解析】 略

【标注】 【知识点】常见数列的通项公式

【素养】 逻辑推理

2. 数列 $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \dots$ 的第10项为 () .

A. $\frac{16}{17}$

B. $\frac{18}{19}$

C. $\frac{20}{21}$

D. $\frac{22}{23}$

【答案】 C

【解析】 由 $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}$ 可知，

分子为偶数 $2n$ ，分母为 $2n + 1$ ，

$$\therefore \text{通项公式 } a_n = \frac{2n}{2n+1},$$

$$\therefore \text{第10项 } a_{10} = \frac{20}{21}.$$

故选C.

【标注】 【知识点】常见数列的通项公式

3. 将全体正整数排成一个三角形数阵：

```
      1
     2 3
    4 5 6
   7 8 9 10
  11 12 13 14 15
 ... ..
```

根据以上规律，数阵中第 n ($n \geq 3$) 行的从左至右的第3个数是 _____ .

【答案】 $\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 3$

【解析】 $n-1$ 行结束时，共有

$$S = (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{1}{2}(n^2 - n) \text{ 个数,}$$

$$\therefore \text{第} n \text{行第} 3 \text{个数为} \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 3.$$

$$\text{故答案为} \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 3.$$

【标注】【素养】逻辑推理

【素养】数学运算

【知识点】常见数列的通项公式

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足递推关系： $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$ ， $a_1 = \frac{1}{2}$ ，则 $a_{2017} = ()$.

A. $\frac{1}{2016}$

B. $\frac{1}{2017}$

C. $\frac{1}{2018}$

D. $\frac{1}{2019}$

【答案】 C

【解析】 $\because a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$ ， $a_1 = \frac{1}{2}$ ，

$$\text{故} \frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}}} - \frac{1}{\frac{1}{a_n}} = 1,$$

$$\therefore \left\{ \frac{1}{a_n} \right\} \text{ 是一个以} 2 \text{ 为首项, } 1 \text{ 为公差的等差数列,}$$

$$\text{故} \frac{1}{a_{2017}} = 2 + 2016 = 2018,$$

$$\therefore a_{2017} = \frac{1}{2018}.$$

故选C.

【标注】【知识点】构造等差数列求通项

5. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_1 = 2$ ， $a_n = \frac{1 + a_{n-1}}{1 - a_{n-1}} (n \geq 2)$ ，则 $S_{2017} = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案】 -586

【解析】 $a_1 = 2$ ， $a_2 = -3$ ， $a_3 = -\frac{1}{2}$ ， $a_4 = \frac{1}{3}$ ，

$$a_5 = 2$$
， $a_6 = -3$ ， $a_7 = -\frac{1}{2}$ ， $a_8 = \frac{1}{3}$ ，

易得 $\{a_n\}$ 是周期为4的数列，

$$\therefore S_{2017} = S_{4 \times 504 + 1}$$

$$= a_1 + 504 \times (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

$$= 2 + 504 \times \left(2 - 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \\ = -586 .$$

【标注】【素养】数学运算

6. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = 1 - \frac{1}{a_{n-1}} (n \geq 2)$, 则 a_{2019} 的值为 ().
 A. -1 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2

【答案】D

【解析】 本题主要考查数列的概念与表示.

由题意知, $a_n = 1 - \frac{1}{a_{n-1}}, n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$.

而 $a_1 = \frac{1}{2}$, 则 $a_2 = 1 - \frac{1}{a_1} = 1 - 2 = -1$,

$a_3 = 1 - \frac{1}{a_2} = 1 - (-1) = 2$,

$a_4 = 1 - \frac{1}{a_3} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = a_1$,

$a_5 = 1 - \frac{1}{a_4} = 1 - 2 = -1 = a_2$,

$a_6 = 1 - \frac{1}{a_5} = 1 - (-1) = 2 = a_3$,

故对数列 $\{a_n\}$, $a_{n+3} = a_n, n \in \mathbf{N}^*$,

故 $a_{2019} = a_{3 \times 673} = a_3 = 2$.

故选D.

【标注】【知识点】数列的周期性问题

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{3} - a\right)n + 2, & n > 8 \\ a^{n-7}, & n \leq 8 \end{cases} (n \in \mathbf{N}^*)$, 若对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 都有 $a_n > a_{n+1}$, 则实数 a 的取值范围是 ().
 A. $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ B. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ C. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ D. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

【答案】C

【解析】 $\because$ 对于任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $a_n > a_{n+1}$,

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 单调递减,

① 当 $n \leq 8$ 时, $a_n = a^{n-7}$, 可知 $0 < a < 1$;

② 当 $n > 8$ 时, $a_n = \left(\frac{1}{3} - a\right)n + 2$,

由 $\{a_n\}$ 单调递减知, $-\frac{1}{3} - a < 0$, 即 $a > \frac{1}{3}$,

又 $\because a_8 = a^{8-7} = a$,

$$a_9 = \left(\frac{1}{3} - a\right) \times 9 + 2 = 5 - 9a,$$

由数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 得 $a_9 < a_8$,

$$5 - 9a < a,$$

$$a > \frac{1}{2},$$

综上所述, a 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

故选C.

【标注】【知识点】数列单调性问题; 分段数列问题

8. 填空题.

(1) 若 $a_n = 2n^2 + \lambda n + 3$ (其中 λ 为常数), 且数列 $\{a_n\}$ 为递增数列, 则 λ 的取值范围为_____.

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 为单调递增数列, 通项公式为 $a_n = n + \frac{\lambda}{n}$, 则 λ 的取值范围为_____.

【答案】 (1) 3

(2) $\lambda > -6$

【解析】 (1) 略

(2) 略

【标注】【素养】数学运算

9. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = (n+2)\left(\frac{9}{10}\right)^n$, 那么在此数列中().

A. $a_7 = a_8$ 最大

B. $a_8 = a_9$ 最大

C. 有唯一项 a_8 最大

D. 有唯一项 a_7 最大

【答案】 A

【解析】 解法一:

$$a_n = (n+2)\left(\frac{9}{10}\right)^n,$$

$$a_{n+1} = (n+3)\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+3}{n+2} \cdot \frac{9}{10},$$

$$\text{令 } \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Rightarrow \frac{n+3}{n+2} \cdot \frac{9}{10} \geq 1,$$

解得 $n \leq 7$,

即 $n \leq 7$ 时递增, $n > 7$ 递减,

$\therefore a_7 = a_8$ 最大.

故选 A.

解法二:

由 $a_n = (n+2) \times \left(\frac{9}{10}\right)^n$ 知 $n \geq 2$ 时,

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= (n+2) \times \left(\frac{9}{10}\right)^n - (n+1) \times \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{9}{10}\right)^n \cdot \left[(n+2) - \frac{10}{9}(n+1)\right] \\ &= \frac{1}{9} \times \left(\frac{9}{10}\right)^n \times (8-n). \end{aligned}$$

故 $n \leq 7$ 时, $a_n - a_{n-1} > 0$, $n = 8$ 时, $a_8 - a_7 = 0$.

$n \geq 9$ 时, $a_n - a_{n-1} < 0$.

$\therefore \{a_n\}$ 在 $1 \leq n \leq 7$ 时单调递增, $n \geq 8$ 时单调递减.

$\therefore$ 最大项为 a_7 与 a_8 , 故选 A.

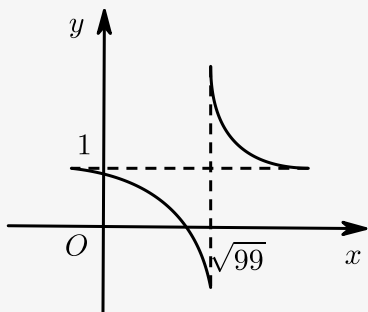
【标注】【知识点】数列中最大项与最小项的求解问题

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = \frac{n - \sqrt{98}}{n - \sqrt{99}}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 求数列 $\{a_n\}$ 的前 30 项中的最大项与最小项.

【答案】 当 $n = 9$, a_n 最小; 当 $n = 10$, a_n 最大.

【解析】 $\because a_n = \frac{n - \sqrt{98}}{n - \sqrt{99}} = \frac{n - \sqrt{99} + \sqrt{99} - \sqrt{98}}{n - \sqrt{99}} = 1 + \frac{\sqrt{99} - \sqrt{98}}{n - \sqrt{99}}$.
 $\therefore$ 设 $f(x) = 1 + \frac{\sqrt{99} - \sqrt{98}}{x - \sqrt{99}}$.

作出 $f(x)$ 的图象如图, 如图易知 $n = 9$, a_n 最小; 当 $n = 10$, a_n 最大.



故答案为: 当 $n = 9$, a_n 最小; 当 $n = 10$, a_n 最大.

【标注】【素养】数学运算

11. 已知 $n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$, 求证 $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$.

【答案】证明见解析.

【解析】构造数列函数 $f(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$, 则
 $f(n+1) = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$,
 因此 $f(n+1) - f(n) = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$, 可知
 $f(n)$ 在 $n \geq 2$ 时单调递增.
 故 $f(n) > f(2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} > \frac{13}{24}$, 证毕.

【标注】【知识点】数列的前 n 项和

12. 完成下列各题:

(1) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 + n - 2$, 求 a_n .

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2^n$, 求 a_n .

【答案】(1) $a_n = \begin{cases} 0, n=1 \\ 2n, n \geq 2 \end{cases}$.
 (2) $a_n = \begin{cases} 2, n=1 \\ 2^{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$.

【解析】(1) 当 $n=1$, $a_1 = S_1 = 0$,

$$n \geq 2, a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + n - 2 - (n-1)^2 - (n-1) + 2 = 2n.$$

$$\therefore a_n = \begin{cases} 0, n=1 \\ 2n, n \geq 2 \end{cases}.$$

(2) $a_1 = S_1 = 2$;

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1},$$

$$\text{故 } a_n = \begin{cases} 2, n=1 \\ 2^{n-1}, n \geq 2 \end{cases}.$$

【标注】【知识点】利用 S_n 与 a_n 的关系求通项

13. 等差数列 $1, -1, -3, \cdots, -89$ 的项数是 ().

A. 92

B. 47

C. 46

D. 45

【答案】C

【解析】由已知 $a_1 = 1, d = (-1) - 1 = -2$.

$$\therefore a_n = 1 + (n-1) \times (-2) = -2n + 3.$$

令 $-2n+3=-89$, 得 $n=46$.

【标注】【知识点】等差数列求通项问题

14. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_2=1$, $a_8=2a_6+a_4$, 则 a_5 的值是()

- A. -5 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{2}$

【答案】B

【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $\because a_2=1$, $a_8=2a_6+a_4$,

$$\therefore a_1+d=1, \quad a_1+7d=2(a_1+5d)+a_1+3d \text{ 联立解得 } a_1=\frac{3}{2}, \quad d=-\frac{1}{2},$$

$$\therefore a_5=a_1+4d=\frac{3}{2}+4(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2} \therefore \text{故选: B}$$

【标注】【知识点】等差数列求通项问题

15. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{m+n}=\alpha$, $a_{m-n}=\beta$, 则其公差 d 的值为() .

- A. $\frac{\alpha+\beta}{2n}$ B. $\frac{\alpha-\beta}{2n}$ C. $\frac{\alpha+\beta}{2m}$ D. $\frac{\alpha-\beta}{2m}$

【答案】B

【解析】 $a_{m+n}-a_{m-n}$

$$=a_1+(m+n-1)d-a_1-(m-n-1)d$$

$$=2nd$$

$$=\alpha-\beta,$$

$$\therefore d=\frac{\alpha-\beta}{2n}.$$

故选B.

【标注】【知识点】等差数列求通项问题

16. 已知 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $\sqrt{\frac{1}{a_n^2}+2}=\frac{1}{a_{n+1}} (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $a_n^2=$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2n-1}$

【解析】 $\frac{1}{a_n^2}+2=\frac{1}{a_{n+1}^2}$,

故 $\left\{\frac{1}{a_n^2}\right\}$ 是以 $\frac{1}{a_1^2}$ 为首项, 2为公差的等差数列,

$$\frac{1}{a_n^2} = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n-1.$$

$$\therefore a_n^2 = \frac{1}{2n-1}$$

故答案为: $\frac{1}{2n-1}$.

【标注】【知识点】等差数列的判定与证明问题；等差数列求通项问题；通项公式

17. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $2a_n^2 = a_{n+1}^2 + a_{n-1}^2 (n \geq 2)$, 则 a_6 等于().

A. 16

B. 8

C. $2\sqrt{2}$

D. 4

【答案】 D

【解析】 $\because 2a_n^2 = a_{n+1}^2 + a_{n-1}^2 (n \geq 2)$,

$$\therefore a_{n+1}^2 - a_n^2 = a_n^2 - a_{n-1}^2,$$

$\therefore \{a_n^2\}$ 为首项为1, $d = a_2^2 - a_1^2 = 3$ 的等差数列,

$$\therefore a_n^2 = a_1^2 + (n-1)d = 3n-2, a_6^2 = 16,$$

$$\because a_n > 0,$$

$$\therefore a_6 = 4.$$

故选D.

【标注】【知识点】等差数列求通项问题

【知识点】等差数列的性质及应用

【素养】数学运算

18. 在数列 $\{x_n\}$ 中, $\frac{2}{x_n} = \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_{n+1}} (n \geq 2)$, 且 $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_6 = \frac{2}{5}$, 则 $x_{10} =$ _____.

【答案】 $\frac{2}{7}$

【解析】 $\because \frac{2}{x_n} = \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_{n+1}},$

$$\therefore \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}}, n \geq 2,$$

$\therefore \left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$ 是等差数列, 设公差为 d , 又 $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_6 = \frac{2}{5}$,

$$\therefore \frac{1}{x_2} = \frac{3}{2}, \frac{1}{x_6} = \frac{5}{2}, \frac{1}{x_6} = \frac{1}{x_2} + 4d,$$

$$\text{故 } d = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \frac{1}{x_{10}} = \frac{1}{x_2} + 8d = \frac{3}{2} + \frac{8}{4} = \frac{7}{2},$$

$$\therefore x_{10} = \frac{2}{7}.$$

【标注】【知识点】构造等差数列求通项

19. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_5 + a_7 = 16$, 则 $a_6 = (\quad)$.

A. 4

B. 6

C. 8

D. 10

【答案】C

【解析】设 $a_n = a_1 + (n - 1)d$,

$$\because a_5 + a_7 = 16,$$

$$\therefore a_1 + 4d + a_1 + 6d = 16,$$

$$2a_1 + 10d = 16,$$

$$\therefore a_1 + 5d = 8 \text{ 故 } a_6 = 8.$$

故选C.

【标注】【知识点】等差数列求通项问题

20. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_4 + a_8 = 16$, 则 $a_2 + a_6 + a_{10} = (\quad)$.

A. 12

B. 16

C. 20

D. 24

【答案】D

【解析】 $\because a_4 + a_8 = (a_1 + 3d) + (a_1 + 7d) = 2a_1 + 10d$,

$$a_2 + a_{10} = (a_1 + d) + (a_1 + 9d) = 2a_1 + 10d, \quad a_6 = a_1 + 5d,$$

$$\therefore a_2 + a_6 + a_{10} = 2a_1 + 10d + a_1 + 5d = 16 + 8 = 24.$$

故选: D.

【标注】【知识点】等差数列的性质及应用; 等差数列前n项和的性质