

等差数列

一、数列的相关概念

🗨 数列的定义与表示

按照一定顺序排列着的一列数称为**数列**。数列中的每一个数叫做这个数列的项。数列中的每一项都和它的序号有关，排在第一位的数成为这个数列的**首项**，排在第二位的数称为这个数列的第2项……排在第 n 位的数成为这个数列的第 n 项。所以，数列的一般形式可以写成

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots,$$

简记为 $\{a_n\}$ 。

🗨 数列的分类

从第2项起，每一项都大于它的前一项的数列叫做**递增数列**；从第2项起，每一项都小于它的前一项的数列叫做**递减数列**；各项相等的数列叫做**常数列**；从第2项起，有些项大于它的前一项，有些项小于它的前一项的数列叫做**摆动数列**。

🗨 数列通项公式

数列可以看成以正整数集 $\mathbf{N}^*$ （或它的有限子集 $\{1, 2, \dots, n\}$ ）为定义域的函数 $a_n = f(n)$ ，当自变量按照从小到大的顺序依次取值时，所对应的一系列函数值。反过来，对于函数 $y = f(x)$ ，如果 $f(i)$ （ $i = 1, 2, 3, \dots$ ）有意义，那么我们可以得到一个数列

$$f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$$

如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项与序号 n 之间的关系可以用一个式子来表示，那么这个公式叫做这个数列的**通项公式**。我们可以根据数列的通项公式写出数列。

🗨 递推公式

如果已知数列 $\{a_n\}$ 的第1项（或前几项），且从第2项（或某一项）开始的任一项 a_n （或前几项）间的关系可以用一个公式表示，那么这个公式就叫做这个数列的**递推公式**。

🗨 前 n 项和公式

如果数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 与 n 的关系可用一个公式表示，这个公式就叫做这个数列的**前 n 项和公式**。即 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 。

项与和的关系

由 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 可得 $S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} (n \geq 2)$ ，两式相减可以得出一个关于数列的通项公式与前 n 项和的重要关系式：

$$a_n = \begin{cases} S_1, & n = 1 \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$$

利用这个关系式，可以在已知通项与前 n 项和之间关系（或前 n 项和与项数之间关系）的情况下求出数列的通项公式。

题型总结

题型一：归纳总结通项公式；

题型二：考察对于概念的理解，例如递增数列、递减数列、摆动数列的区分或者对于通项公式的理解；

题型三：数列单调性的判断；

题型四：利用项与和的关系已知项求和或者已知和求项；

题型五：利用递推关系求某一项的值；

1. 典型例题

考察通项公式理解

1. 现在有这么一列数： $2, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \text{——}, \frac{13}{32}, \frac{17}{64}, \dots$ ，按照规律，横线中的数应为（ ）。
- A. $\frac{9}{16}$ B. $\frac{11}{16}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{11}{18}$

【答案】 B

【解析】 由题意可得：分子为连续的质数，分母为 2^{n-1} ，

故括号中的数应该为 $\frac{11}{16}$ 。

故选B。

【标注】 【素养】 逻辑推理

【知识点】 归纳推理

2019-2020学年9月提交南开区天津大学附属中学高二上学期月考第1题3分

2. 如图所示的三角形数阵叫“莱布尼兹调和三角形”，它们是由整数的倒数组成的，第 n 行有 n 个数且两端的数均为 $\frac{1}{n} (n \geq 2)$ ，每个数是它下一行左右相邻两数的和，如 $\frac{1}{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ ， $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \dots$ ，则第7行第4个数（从左往右数）为（ ）。

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & \frac{1}{1} & \\
 & & & & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\
 & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \\
 & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\
 \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & \frac{1}{5} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

A. $\frac{1}{140}$ B. $\frac{1}{105}$ C. $\frac{1}{60}$ D. $\frac{1}{42}$

【答案】 A

【解析】 列举法，易得：

第6行为： $\frac{1}{6}; \frac{1}{30}; \frac{1}{60}; \frac{1}{60}; \frac{1}{30}; \frac{1}{6};$
 第7行为： $\frac{1}{7}; \frac{1}{42}; \frac{1}{105}; \frac{1}{140}; \frac{1}{105}; \frac{1}{42}; \frac{1}{7};$
 因此，第7行第4个数为 $\frac{1}{140}$.

故选A .

【标注】【素养】数学运算

【素养】逻辑推理

【知识点】常见数列的通项公式

备注：2017-2018学年天津河西区天津市实验中学高二下学期期中文科第6题3分

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \frac{1}{n(n+2)} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，则 $\frac{1}{120}$ 这个数列的（ ） .

- A. 第8项 B. 第9项 C. 第10项 D. 第12项

【答案】 C

【解析】 由题意知 $\frac{1}{120} = \frac{1}{n(n+2)} n \in \mathbf{N}^*$ ，解得 $n = 10$ ，即 $\frac{1}{120}$ 这个数列的第10项 .

故选C .

【标注】【知识点】常见数列的通项公式

备注：2019-2020学年天津滨海新区天津开发区第一中学上学期中第1题3分

 考察数列单调性判断

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \begin{cases} a^{n-2}, n < 4 \\ (6-a)n - a, n \geq 4 \end{cases}$, 若对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 都有 $a_n < a_{n+1}$ 成立, 则实数 a 的取值范围为().
- A. (1, 4) B. (2, 5)
- C. (1, 6) D. (4, 6)

【答案】 A

【解析】 $\because$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $a_n < a_{n+1}$ 成立,

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列,

$$\therefore \begin{cases} a > 1 \\ 6 - a > 0 \\ a < 4(6 - a) - a \end{cases},$$

解得 $1 < a < 4$.

故选A.

【标注】【知识点】数列单调性问题；分段数列问题

备注：2019-2020学年10月天津津南区天津市咸水沽一中高二上学期月考第8题4分

5. 数列 $a_n = \frac{n(n+1)}{2^{n-2}}$, 记 $M = \{n | a_n \geq \lambda, n \in \mathbf{N}^*\}$, 若集合 M 的元素个数为 3, 则实数 λ 的取值范围是 _____.

【答案】 $\lambda \in (4, 5]$

【解析】 $\because M = \{n | a_n \geqslant \lambda, n \in \mathbf{N}^*\}$,

$$\therefore a_n = \frac{n(n+1)}{2^{n-2}},$$

$$\therefore a_n \geq \lambda, \text{ 即 } \frac{n(n+1)}{2^{n-2}} \geq \lambda,$$

$$f(n) = \frac{n(n+1)}{2^{n-2}},$$

$$f(1) = \frac{2(1+1)}{2^{1-2}} = 4,$$

$$f(2) = \frac{2(2+1)}{2^0} = 6,$$

$$f(3) = \frac{12^2}{2} = 6,$$

$$f(4) = 5,$$

$$f(5) = \frac{15}{4} ,$$

$$\therefore f(n+1) - f(n) = \frac{n^2 + 3n + 2}{2^{n-1}} - \frac{n^2 + n}{2^{n-1} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{-2n^2 - 2n + 2}{2^n},$$

$\therefore n$ 取任何 $\mathbf{N}^*$ 时, $\frac{-2n^2 - 2n + 2}{2^n} < 0$,

$$\text{即 } f(n+1) - f(n) < 0,$$

$$\therefore f(n+1) < f(n),$$

$\therefore f(n)$ 为单调递减函数,

$$\therefore x \leq f(n),$$

集合 M 元素个数为 3,

$$\therefore 4 < \lambda \leq 5.$$

故答案为: $\lambda \in (4, 5]$.

【标注】【知识点】数列单调性问题

备注: 2018-2019 学年 11 月天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高二上学期月考理科第 16 题 4 分

6. 设 $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 a_{n+1} 与 a_n 的大小关系是 a_{n+1} _____ a_n .

【答案】 <

【解析】 $\therefore a_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3},$
 $\therefore a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{n+1}$
 $= \frac{2n+3+2n+2-2(n+3)}{(2n+2)(2n+3)}$
 $= \frac{-1}{(2n+2)(2n+3)} < 0,$
 $\therefore a_{n+1} < a_n.$

【标注】【知识点】数列的定义

备注: 2018-2019 学年 10 月天津河西区天津市新华中学高二上学期月考第 14 题

 **考察递推公式**

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1, n = 2k \\ \frac{a_n}{n}, n = 2k-1 \end{cases} (k \in \mathbf{N}^*), a_1 = 1, a_n = \frac{2}{3}$, 则 $n =$ _____.

【答案】 4

【解析】 $\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1, n = 2k \\ \frac{a_n}{n}, n = 2k-1 \end{cases} (k \in \mathbf{N}^*), a_1 = 1, a_n = \frac{2}{3},$
 $\therefore a_2 = \frac{a_1}{1} = \frac{1}{1} = 1,$
 $a_3 = a_2 + 1 = 1 + 1 = 2,$

$$a_4 = \frac{a_3}{3} = \frac{2}{3} .$$

$$\therefore n = 4 .$$

【标注】【知识点】通项公式；分段数列问题

备注：2018-2019学年天津静海县第一中学高二上学期期中第13题5分

8. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$ ， $a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n}$ ，则 a_{2019} 的值为（ ）.

A. 2

B. -3

C. $-\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{3}$

【答案】C

【解析】数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$ ，由于 $a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n}$ ，

$$\textcircled{1} \text{当 } n=1 \text{ 时, } a_2 = \frac{1+a_1}{1-a_1} = -3, \textcircled{2} \text{当 } n=2 \text{ 时, } a_3 = \frac{1+a_2}{1-a_2} = -\frac{1}{2},$$

$$\textcircled{3} \text{当 } n=3 \text{ 时, } a_4 = \frac{1+a_3}{1-a_3} = \frac{1}{3}, \textcircled{4} \text{当 } n=4 \text{ 时, } a_5 = \frac{1+a_4}{1-a_4} = 2 \cdots \cdots,$$

所以数列的周期为4.

$$\text{故 } 2019 \div 4 = 504 \cdots 3 .$$

$$\therefore a_{2019} = a_3 = -\frac{1}{2} .$$

故选C.

【标注】【知识点】数列的周期性问题

备注：2019-2020学年天津和平区天津市耀华中学高二上学期期中第5题4分

考察项与和的关系

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = n^2 - 10n + 1$ ，则这个数列的通项公式为 _____ .

【答案】 $a_n = \begin{cases} -8, n=1 \\ 2n-11, n \geq 2 \end{cases}$

【解析】 当 $n=1$ 时， $a_1 = S_1 = 1 - 10 + 1 = -8$ ，

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_{n-1} = (n-1)^2 - 10(n-1) + 1 = n^2 - 12n + 12 ,$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 - 10n + 1) - (n^2 - 12n + 12) = 2n - 11 ,$$

$$\therefore a_1 = 2 - 11 = -9 \neq -8 ,$$

$$\therefore a_n = \begin{cases} -8, n=1 \\ 2n-11, n \geq 2 \end{cases} .$$

$$\text{故答案为: } a_n = \begin{cases} -8, n=1 \\ 2n-11, n \geq 2 \end{cases} .$$

【标注】【知识点】利用 S_n 与 a_n 的关系求通项

备注：2019-2020学年天津河北区高二上学期期末第13题4分

10. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 3a_2 + 3^2a_3 + \dots + 3^{n-1}a_n = \frac{n}{3} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，则 $a_n =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{3^n}$

【解析】 $\because$ 令 $a_1 + 3a_2 + 3^2a_3 + \dots + 3^{n-1}a_n = \frac{n}{3}$ ，
 $b_{n-1} = a_1 + 3a_2 + 3^2a_3 + \dots + 3^{n-2}a_{n-1} = \frac{n-1}{3}$ $\therefore$
 $b_n - b_{n-1} = 3^{n-1} \cdot a_{n-1} = \frac{n}{3} - \frac{n-1}{3}$ ， $\therefore 3^{n-1} \cdot a_n = \frac{1}{3}$ ， $\therefore a_n = \frac{1}{3^n}$.

【标注】【知识点】利用 S_n 与 a_n 的关系求通项

备注：2017-2018学年3月天津河西区天津市新华中学高一下学期月考特长班第16题4分

2. 巩固练习

 考察通项公式理解

11. 数列 $1, -3, 5, -7, 9, \dots$ 的一个通项公式为() .

A. $a_n = 2n - 1$

B. $a_n = (-1)^n(2n - 1)$

C. $a_n = (-1)^n(1 - 2n)$

D. $a_n = (-1)^n(2n + 1)$

【答案】 C

【解析】 由数列 $\{a_n\}$ 中 $1, -3, 5, -7, 9, \dots$ 可以看出：

符号正负相间，通项的绝对值为 $1, 3, 5, 7, 9, \dots$ 为等差数列 $\{b_n\}$ ，其通项公式

$$b_n = 2n - 1,$$

$\therefore$ 数列 $1, -3, 5, -7, 9, \dots$ 的一个通项公式为

$$a_n = (-1)^{n+1}(2n - 1) = (-1)^n(1 - 2n).$$

故选C.

【标注】【知识点】等差数列求通项问题；常见数列的通项公式

备注：2019-2020学年天津河西区高二上学期期中第2题4分

备注：2017-2018学年天津和平区天津市耀华中学高二下学期期中理科第16题4分

12. 已知数列 $\{a_n\}$, $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n^2 + 1}{2n + 1}$, 那么这个数列中的第5项是().
- A. $\frac{26}{11}$ B. $-\frac{26}{11}$ C. $\frac{24}{11}$ D. $-\frac{24}{11}$

【答案】 A

【解析】 $\because a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n^2 + 1}{2n + 1}$,
当 $n = 5$ 时,
 $a_5 = (-1)^6 \cdot \frac{5^2 + 1}{2 \times 5 + 1} = \frac{26}{11}$.
故选A.

【标注】【知识点】常见数列的通项公式

13. 将全体正整数排成一个三角形数阵：

		1		
	2		3	
	4		5	
	7	8	9	10
11	12	13	14	15
...				

根据以上规律，数阵中第 $n(n \geq 3)$ 行的从左至右的第3个数是 _____ .

【答案】 $\frac{n^2 + n + 6}{2}$

【解析】 由排列规律可得，
第 $n - 1$ 行结束时排了 $1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) = \frac{(n - 1)n}{2}$ 个数，
 $\therefore n$ 行从左向右第3个数 $\frac{(n - 1)n}{2} + 3 = \frac{n^2 - n + 6}{2}$.
故答案为 $\frac{n^2 + n + 6}{2}$.

【标注】【知识点】等差数列求和问题

【知识点】通项公式

【素养】数学运算

【素养】逻辑推理

备注：2019-2020学年10月天津河西区天津市海河中学高二上学期月考第1题

 考察数列单调性判断

14. 设函数 $f(x) = \begin{cases} (3-a)x-3, & x \leq 7 \\ a^{x-6}, & x > 7 \end{cases}$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = f(n)$, $n \in \mathbf{N}_+$, 且数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 则实数 a 的取值范围是 ().

- A. $(1, 3)$ B. $(2, 3)$
C. $(\frac{9}{4}, 3)$ D. $(1, 2)$

【答案】 B

【解析】 由题意得 $a_n = \begin{cases} (3-a)n-3, & n \leq 7 \\ a^{n-6}, & n \geq 8 \end{cases}$, $\therefore \begin{cases} 3-a > 0 \\ a > 1 \\ 7(3-a)-3 < a^{8-6} \end{cases}$
解得 $\begin{cases} a > 1 \\ a < 3 \\ a > 2 \text{ 或 } a < -9 \end{cases}$, 即 $2 < a < 3$.
故选 B.

【标注】 【素养】数学运算

【素养】逻辑推理

【知识点】数列单调性问题

【知识点】分段函数

备注：2019-2020学年天津河西区高二上学期期中第9题4分

15. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = (n+1)\left(\frac{7}{8}\right)^n$, 则数列 $\{a_n\}$ 中的最大项是第 ____ 项.

【答案】 6或7

【解析】 假设 a_n 最大, 则有 $\begin{cases} a_n \geq a_{n+1} \\ a_n \geq a_{n-1} \end{cases}$,
 $\therefore \begin{cases} (n+1) \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^n \geq (n+2) \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{n+1} \\ (n+1) \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^n \geq n \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1} \end{cases}$,
 $\therefore \begin{cases} n+1 \geq (n+2) \cdot \frac{7}{8} \\ \frac{7}{8}(n+1) \geq n \end{cases}$,
解得: $6 \leq n \leq 7$,
 $\therefore$ 最大值为 6 或 7.

【标注】 【知识点】数列中最大项与最小项的求解问题

备注：2018-2019学年10月天津和平区天津市第二十中学高二上学期月考理科第14题4分

16. 已知不等式 $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \frac{1}{12} \log_a(a-1) + \frac{2}{3}$ 对一切大于1的正整数 n 都成立，则实数 a 的取值范围是 _____ .

【答案】 $\left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

【解析】 设 $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} (n \geq 2)$,
 则 $S_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$,
 $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$,
 $\therefore S_n$ 随 n 的增大而增大 .
 故当 $n=2$ 时, S_n 取得最小值, $S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$,
 $\therefore \frac{7}{12} > \frac{1}{12} \log_a(a-1) + \frac{2}{3}$ 恒成立 .
 化简整理得 $\log_a(a-1) < -1$.
 由对数的真数大于0可知 $\begin{cases} a-1 > 0 \\ a-1 < \frac{1}{a} \end{cases}$,
 解得 $1 < a < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
 故 a 的取值范围为 $\left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

【标注】 【知识点】对数方程和对数不等式

考察递推公式

17. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -2$, $a_{n+1}a_n - a_{n+1} + a_n + 1 = 0$, 则 $a_{2018} =$ _____ .

【答案】 $-\frac{1}{3}$

【解析】 $a_{n+1}a_n - a_{n+1} + a_n + 1 = 0$,
 整理得 $a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n}$, $a_2 = \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3$,
 $a_5 = \frac{1+3}{1-3} = -2 = a_1$, $a_6 = \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3} = a_2 \cdots$,
 $\therefore \{a_n\}$ 是 $T=4$ 的周期数列 ,
 $\therefore a_{2018} = a_{504 \times 4 + 2} = a_2 = -\frac{1}{3}$.
 故答案为: $-\frac{1}{3}$.

【标注】【知识点】数列的周期性问题

备注：2018-2019学年天津南开区高二上学期期末第14题5分

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n, 0 \leq a_n \leq \frac{1}{2} \\ 2a_n - 1, \frac{1}{2} < a_n \leq 1 \end{cases}$, 若 $a_1 = \frac{6}{7}$, 则 $a_{2018} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{5}{7}$

【解析】 $\because a_1 = \frac{6}{7}$, $a_2 = 2 \cdot \frac{6}{7} - 1 = \frac{5}{7}$, $a_3 = 2 \cdot \frac{5}{7} - 1 = \frac{3}{7}$, $a_4 = 2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$. $\therefore$ 可知这是一个周期为3的规律, $\therefore a_{2018} = a_2 = \frac{5}{7}$.

【标注】【知识点】数列的周期性问题

【素养】数学运算

备注：2017-2018学年3月天津河西区天津市新华中学高一下学期月考特长班第15题4分



考察项与和的关系

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{n+1}{n+2}$, 则 $a_4 = (\quad)$.

A. $\frac{1}{20}$ B. $\frac{1}{30}$ C. 1 D. $\frac{7}{30}$

【答案】B

【解析】 $a_4 = S_4 - S_3$
 $= \frac{5}{6} - \frac{4}{5}$
 $= \frac{1}{30}$.

【标注】【知识点】利用 S_n 与 a_n 的关系求通项

备注：2018-2019学年10月天津和平区天津市第二十一中学高二上学期月考第4题3分

20. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 12$, $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = n^2 a_n$, 则 $a_{2017} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{12}{2017}$

【解析】由 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1} + na_n = n^2 a_n$ ①,
则当 $n \geq 2$ 时 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1} = (n-1)^2 a_{n-1}$ ②,

由①-②得 $na_n = n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1}$,

整理得 $(n^2 - n)a_n = (n-1)^2 a_{n-1}$, 即 $n(n-1)a_n = (n-1)^2 a_{n-1}$,

那么 $na_n = (n-1)a_{n-1}$, 且 $n \geq 2$,

故 $na_n = (n-1)a_{n-1} = \dots = 3a_3 = 2a_2 = a_1$, 且 $n \geq 2$,

则 $a_n = \frac{a_1}{n} = \frac{12}{n} (n \geq 2)$, 当 $n=1$ 时 $a_1 = \frac{12}{1} = 12$,

故 $a_n = \frac{12}{n} (n \in \mathbf{N}^*)$,

那么 $a_{2017} = \frac{12}{2017}$,

故答案为: $\frac{12}{2017}$.

【标注】【方法】累乘法

【素养】数学运算; 逻辑推理

【知识点】利用 S_n 与 a_n 的关系求通项; 利用累乘法求数列通项公式问题

备注: 2019-2020 学年 10 月天津河东区天津市第四十五中学高二上学期月考第 12 题 5 分

二、等差数列的定义与通项公式

🔗 等差数列定义

一般地, 如果一个数列从第 2 项起, 每一项与它的前一项的差等于同一个常数, 那么这个数列就叫做等差数列, 这个常数叫做等差数列的公差, 公差通常用小写字母 d 表示.

由三个数 a, A, b 组成的等差数列可以看成最简单的等差数列. 这时, A 叫做 a 与 b 的等差中项. 利用等差数列的定义可得: $A - a = b - A$, 进而计算得到: $A = \frac{a+b}{2}$.

🔗 等差数列通项公式

一般地, 如果等差数列 $\{a_n\}$ 的首项是 a_1 , 公差是 d , 我们根据等差数列的定义, 可以得到

$$a_2 - a_1 = d,$$

$$a_3 - a_2 = d,$$

$$a_4 - a_3 = d,$$

.....

$$a_n - a_{n-1} = d.$$

将上面 $n-1$ 个等式累加, 得到:

$$(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_2 - a_1) = (n-1)d$$

整理得到:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

上式就成为等差数列的通项公式.

等差数列通项性质

若数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1 , 公差为 d 的等差数列, 则 $\{a_n\}$ 具有如下性质:

1. $d > 0$, 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列; $d < 0$, 数列 $\{a_n\}$ 是递减数列; $d = 0$, 数列 $\{a_n\}$ 是常数列;
2. $d = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{a_m - a_k}{m - k} (m, n, k \in \mathbf{N}^*)$, 变形为 $a_n = a_m + (n - m)d (m, n \in \mathbf{N}^*)$;
3. 若 $m + n = p + q$, 则 $a_m + a_n = a_p + a_q (m, n, p, q \in \mathbf{N}^*)$; 更特殊的情况, 若 k 是 m, n 的等差中项, 则 a_k 是 a_m 和 a_n 的等差中项;
4. 数列 $\{\lambda a_n + b\}$ 是公差为 λd 的等差数列, 以此推广, 若 $\{b_n\}$ 是公差为 d_0 等差数列, 则 $\{\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n\}$ 是公差为 $\lambda_1 d + \lambda_2 d_0$ 的等差数列;
5. 下标成等差数列且公差为 m 的项 $a_k, a_{k+m}, a_{k+2m}, \dots (k, m \in \mathbf{N}^*)$ 组成公差为 md 的等差数列.

等差数列的判断

方法一: 如果一个数列满足 $a_{n+1} - a_n = d (n \in \mathbf{N}^*)$ 或者 $a_n - a_{n-1} = d (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$, 那么这个数列是等差数列;

方法二: 如果一个数列满足

$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2} (n \in \mathbf{N}^*)$ 或者 $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$, 那么这个数列是等差数列;

题型总结

题型一: 考察等差数列的定义;

题型二: 考察等差数列通项公式的求法;

题型三: 考察等差数列通项的性质;

题型四: 考察等差数列的判断方法和通项公式的综合;

1. 典型例题

考察等差数列定义

21. 《九章算术》是我国古代的优秀数学著作, 在人类历史上第一次提出负数的概念, 内容涉及方程、几何、数列、面积、体积的计算等多方面. 书的第6卷19题, “今有竹九节, 下三节容量四升, 上四节容量三升.” 如果竹由下往上均匀变细 (各节容量可视为等差数列), 则中间剩下的两节容量是多少升 ().

A. $2\frac{23}{66}$

B. $2\frac{3}{22}$

C. $2\frac{61}{66}$

D. $1\frac{10}{11}$

【答案】 B**【解析】** 由题意, 设九节竹自下而上分别为 $a_1, a_2, \dots, a_9$,

$$\text{则} \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 4 \\ a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 3 \end{cases}, \text{解得} a_1 = 1\frac{29}{66}, d = -\frac{7}{66},$$

$$\therefore a_4 + a_5 = a_1(3d + 4d) = 2\frac{3}{22}.$$

故选: B.

【标注】【素养】数学运算**【知识点】**等差数列求和问题; 等差数列求通项问题**【思想】**方程思想

备注: 2019-2020学年10月天津南开区天津市南开中学高二上学期周测B卷第7题6分

22. 已知三个数成等差数列并且数列是递增的, 它们的和为18, 它们的平方和为116, 则这三个数是 _____.

【答案】 4, 6, 8**【解析】** 设三个数为 $a-d, a, a+d$.

$$\text{则} \begin{cases} a-d+a+a+d=18 \\ (a-d)^2+a^2+(a+d)^2=116 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ d=2 \end{cases}.$$

$$\therefore \text{三数为} 4, 6, 8.$$

【标注】【知识点】等差数列求通项问题

备注: 2018-2019学年9月天津河东区天津市第五十四中学高二上学期月考第16题4分

**考察等差数列通项公式求法**23. 已知数列 $\{a_n\}$ 为递增的等差数列, 且 $a_1 = 1, a_3 = a_2^2 - 4$, 则 $a_4 =$ _____; $a_n =$ _____.**【答案】** 7; $2n - 1$ **【解析】** 由于等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_3 = a_2^2 - 4$, 设公差为 d ,

$$\text{得} 1 + 2d = (1 + d)^2 - 4, \text{解得} d = \pm 2.$$

又递增的等差数列 $\{a_n\}$, 可得 $d = 2$.

$$\therefore a_4 = 1 + 3d = 7,$$

$$\therefore a_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1 .$$

故答案为：7； $2n - 1$.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】等差数列求通项问题

【知识点】通项公式

备注：2019-2020学年10月天津南开区天津市南开中学高二上学期周测B卷第12题5分

24. 等差数列 $\{a_n\}$ 中的 $a_{15} = 33$ ， $a_{45} = 153$ ，则213是这个数列的第（ ）项 .

A. 60

B. 61

C. 62

D. 不在数列中

【答案】A

【解析】 $a_{45} = a_{15} + (45 - 15)d$ ，

$$\therefore d = 4 .$$

$$\therefore a_{15} = a_1 + 14d = 33 .$$

$$\therefore a_1 = -23 .$$

$$a_n = -23 + (n - 1) \times 4$$

$$= 4n - 27 .$$

$$\text{令 } 213 = 4n - 27 ,$$

$$\text{得 } n = 60 .$$

【标注】【知识点】等差数列求通项问题

备注：2018-2019学年9月天津河东区天津市第五十四中学高二上学期月考第2题4分

25. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 15$ ，且 $3a_{n+1} = 3a_n - 2$ ，若 $a_k a_{k+1} < 0$ ，则正整数 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】23

【解析】 $\because 3a_{n+1} = 3a_n - 2$ ，

$$\therefore a_{n+1} - a_n = -\frac{2}{3} ,$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，首项 $a_1 = 15$ ，公差为 $-\frac{2}{3}$ ，

$$\therefore a_n = 15 - \frac{2}{3}(n-1) = \frac{47-2n}{3} ,$$

$$\because a_k \cdot a_{k+1} < 0 ,$$

$$\therefore \frac{47-2k}{3} \times \frac{47-2(k+1)}{3} < 0 , \text{ 化为 } (2k-45)(2k-47) < 0 ,$$

$$\text{解得 } \frac{45}{2} < k < \frac{47}{2},$$

∴ 正整数 $k = 23$.

故答案为：23.

【标注】【知识点】等差数列的判定与证明问题；等差数列求通项问题

备注：2019-2020学年天津和平区天津市第一中学高二上学期期中第13题4分

26. 等差数列的首项为 $\frac{1}{25}$ ，且从第10项开始为比1大的项，则公差 d 的取值范围是 () .

A. $d > \frac{8}{75}$

B. $d < \frac{3}{25}$

C. $\frac{8}{75} < d < \frac{3}{25}$

D. $\frac{8}{75} < d \leq \frac{3}{25}$

【答案】 D

【解析】 ∵ 等差数列 $\{a_n\}$ 中，

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

$$\therefore a_{10} = \frac{1}{25} + 9d > 1 \text{ ①},$$

$$\text{且 } a_9 = \frac{1}{25} + 8d \leq 1 \text{ ②},$$

$$\text{联合①②解得：} \frac{8}{75} < d \leq \frac{3}{25},$$

故选D.

【标注】【知识点】等差数列求通项问题

备注：2018-2019学年10月天津和平区天津市第二十中学高二上学期月考理科第2题4分



考察等差数列的判断和通项公式求法

27. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, 且 $2na_n = (n-1)a_{n-1} + (n+1)a_{n+1}$ ($n \geq 2$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$), 则

$$a_{18} = () .$$

A. $\frac{25}{9}$

B. $\frac{26}{9}$

C. 3

D. $\frac{28}{9}$

【答案】 B

【解析】 ∵ 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$,

$$\text{且 } 2na_n = (n-1)a_{n-1} + (n+1)a_{n+1} (n \geq 2 \text{ 且 } n \in \mathbf{N}^*),$$

$$\therefore \text{令 } b_n = na_n, \text{ 则由 } 2na_n = (n-1)a_{n-1} + (n+1)a_{n+1},$$

$$\text{得 } 2b_n = b_{n-1} + b_{n+1},$$

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 构成以 1 为首项，
 以 $2a_2 - a_1 = 3$ 为公差的等差数列，
 则 $b_n = 1 + 3(n-1) = 3n - 2$ ，
 即 $na_n = 3n - 2$ ，
 $\therefore a_n = \frac{3n-2}{n}$ ，
 $\therefore a_{18} = \frac{3 \times 18 - 2}{18} = \frac{26}{9}$ 。
 故选 B。

【标注】【知识点】构造等差数列求通项

备注：2018-2019 学年天津和平区天津市第一中学高二上学期期中第 5 题

考察等差数列通项的性质

28. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中， a_1, a_{2015} 为方程 $x^2 - 10x + 16 = 0$ 的两根，则 $a_2 + a_{1008} + a_{2014} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】15

【解析】 $\therefore$ 在等差数列 $\{a_n\}$ 中， a_1, a_{2015} 为方程 $x^2 - 10x + 16 = 0$ 的两根，

$$\begin{aligned}
 \therefore a_1 + a_{2015} &= 2a_{1008} = 10, \\
 \therefore a_{1008} &= 5, \\
 \therefore a_2 + a_{1008} + a_{2014} &= 3a_{1008} = 3 \times 5 = 15.
 \end{aligned}$$

故答案为：15。

【标注】【知识点】等差数列的性质及应用

备注：2018-2019 学年天津南开区南开大学附属中学高二上学期期中第 13 题 5 分

2. 巩固练习

考察等差数列定义

29. “中国剩余定理”又称“孙子定理”，1852 年英国来华传教伟烈亚利将《孙子算经》中“物不知数”问题的接法传至欧洲，1874 年，英国数学家马西森指出此法符合 1801 年由高斯得出的关于同余式接法的一般性定理，因而西方称之为“中国剩余定理”，“中国剩余定理”讲的是一个关于整数的问题，现有这样一个整数问题：将 2 至 2018 这 2017 个整数中能被 2 除余 1 且被 3 除 1 的数按由小到大的顺序排成一列，构成数列 $\{a_n\}$ ，则此数列的项数为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 336

【解析】 方法一： $a_n = 6n + 1$ ， $2 \leq 6n + 1 \leq 2018$ ， $\frac{1}{6} \leq n \leq \frac{2017}{6}$ ，

$\because n \in \mathbf{N}^+$ ，

$\therefore 1 \leq n \leq 336$ 。

方法二：能被2除余1且被3除余1的数，就是被6整除余1的数，

在将2至2018这2017个整除中，满足题意的数是7，13，19，25， $\dots$ ，2017，

可得数列的通项公式为： $6n + 1$ ，

所以 $6n + 1 = 2017$ ，解得 $n = 336$ 。

故答案为：336。

【标注】【知识点】等差数列求通项问题

备注：2018-2019学年10月天津和平区天津市第二十一中学高二上学期月考第9题5分

30. 在1与25之间插入五个数，使其组成等差数列，则这五个数为（ ）。

A. 3，8，13，18，23

B. 4，8，12，16，20

C. 5，9，13，17，21

D. 6，10，14，18，22

【答案】 C

【解析】 由等差数列定义可知，C正确。

故选C。

【标注】【知识点】等差数列求通项问题

备注：2018-2019学年10月天津南开区天津市育红中学高二上学期月考第1题4分



考察等差数列通项公式求法

31. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ， $a_5 = 4a_3$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 _____。

【答案】 $a_n = -\frac{3}{4}n + \frac{7}{4}$ ($n \in \mathbf{N}^*$)

【解析】 等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ，公差为 d ，

$\because a_5 = 4a_3$ ，

$$\therefore a_1 + 4d = 4(a_1 + 2d),$$

$$\text{则 } 1 + 4d = 4 + 8d,$$

$$d = -\frac{3}{4},$$

$$\therefore a_n = 1 - \frac{3}{4}(n-1) = -\frac{3}{4}n + \frac{7}{4} \quad (n \in \mathbf{N}^*).$$

【标注】【知识点】等差数列求通项问题

备注：2019-2020学年天津和平区天津市耀华中学高二上学期期末第13题5分

32. $\{a_n\}$ 是首项为1，公差为3的等差数列，如果 $a_n = 2014$ ，则序号 n 等于（ ）.

A. 667

B. 668

C. 669

D. 672

【答案】 D

【解析】 $\because \{a_n\}$ 是首项为1，公差为3的等差数列，

$$\therefore a_n = 1 + (n-1) \times 3 = 3n - 2,$$

$$\therefore a_n = 2014,$$

$$\therefore 3n - 2 = 2014, \text{ 解得 } n = 672.$$

故选D.

【标注】【知识点】等差数列求通项问题

备注：2018-2019学年9月天津滨海新区天津开发区第二中学高二上学期月考第2题

33. 在数列 $\{a_n\}$ 中，若 $\sqrt{a_{n+1}} = \sqrt{a_n} + \sqrt{2}$ ， $a_1 = 8$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为（ ）.

A. $a_n = 2(n+1)^2$

B. $a_n = (n+1)$

C. $a_n = 8n^2$

D. $a_n = 4n(n+1)$

【答案】 A

【解析】 $\because \sqrt{a_{n+1}} = \sqrt{a_n} + \sqrt{2},$

$$\therefore \{\sqrt{a_n}\} \text{ 为等差数列,}$$

$$\therefore \sqrt{a_n} = \sqrt{a_1} + (n-1)d,$$

$$\therefore \sqrt{a_n} = 2\sqrt{2} + (n-1)\sqrt{2} = (n+1)\sqrt{2},$$

$$\therefore a_n = 2(n+1)^2.$$

故选A.

【标注】【知识点】等差数列求通项问题

 考察等差数列通项的性质

36. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $2(a_1 + a_3 + a_5) + 3(a_8 + a_{10}) = 36$, 则 $a_6 = (\quad)$.

A. 8

B. 6

C. 4

D. 3

【答案】 D

【解析】 方法一：设等差数列 $\{a\}$ 的公差为 d ,

因为 $2(a_1 + a_3 + a_5) + 3(a_8 + a_{10}) = 36$, 所以 $12a_1 + 60d = 36$, 即 $a_1 + 5d = 3$,

所以 $a_6 = 3$, 故选D.

方法二：因为 $a_1 + a_5 = 2a_3$, $a_8 + a_{10} = 2a_9$,

所以 $2(a_1 + a_3 + a_5) + 3(a_8 + a_{10}) = 6a_3 + 6a_9 = 36$,

所以 $a_3 + a_9 = 6$,

所以 $2a_6 = a_3 + a_9 = 6$,

所以 $a_6 = 3$, 故选D.

【标注】【知识点】等差数列的性质及应用

备注：2019-2020学年10月天津南开区天津市南开中学高二上学期周测B卷第6题6分