

等差数列

一、数列的相关概念

🗨 数列的定义与表示

按照一定顺序排列着的一列数称为**数列**。数列中的每一个数叫做这个数列的项。数列中的每一项都和它的序号有关，排在第一位的数成为这个数列的**首项**，排在第二位的数称为这个数列的第2项……排在第 n 位的数成为这个数列的第 n 项。所以，数列的一般形式可以写成

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots,$$

简记为 $\{a_n\}$ 。

🗨 数列的分类

从第2项起，每一项都大于它的前一项的数列叫做**递增数列**；从第2项起，每一项都小于它的前一项的数列叫做**递减数列**；各项相等的数列叫做**常数列**；从第2项起，有些项大于它的前一项，有些项小于它的前一项的数列叫做**摆动数列**。

🗨 数列通项公式

数列可以看成以正整数集 $\mathbf{N}^*$ （或它的有限子集 $\{1, 2, \dots, n\}$ ）为定义域的函数 $a_n = f(n)$ ，当自变量按照从小到大的顺序依次取值时，所对应的一系列函数值。反过来，对于函数 $y = f(x)$ ，如果 $f(i)$ （ $i = 1, 2, 3, \dots$ ）有意义，那么我们可以得到一个数列

$$f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$$

如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项与序号 n 之间的关系可以用一个式子来表示，那么这个公式叫做这个数列的**通项公式**。我们可以根据数列的通项公式写出数列。

🗨 递推公式

如果已知数列 $\{a_n\}$ 的第1项（或前几项），且从第2项（或某一项）开始的任一项 a_n （或前几项）间的关系可以用一个公式表示，那么这个公式就叫做这个数列的**递推公式**。

🗨 前 n 项和公式

如果数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 与 n 的关系可用一个公式表示，这个公式就叫做这个数列的**前 n 项和公式**。即 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 。

项与和的关系

由 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 可得 $S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} (n \geq 2)$, 两式相减可以得出一个关于数列的通项公式与前 n 项和的重要关系式:

$$a_n = \begin{cases} S_1, & n = 1 \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$$

利用这个关系式, 可以在已知通项与前 n 项和之间关系 (或前 n 项和与项数之间关系) 的情况下求出数列的通项公式.

题型总结

题型一: 归纳总结通项公式;

题型二: 考察对于概念的理解, 例如递增数列、递减数列、摆动数列的区分或者对于通项公式的理解;

题型三: 数列单调性的判断;

题型四: 利用项与和的关系已知项求和或者已知和求项;

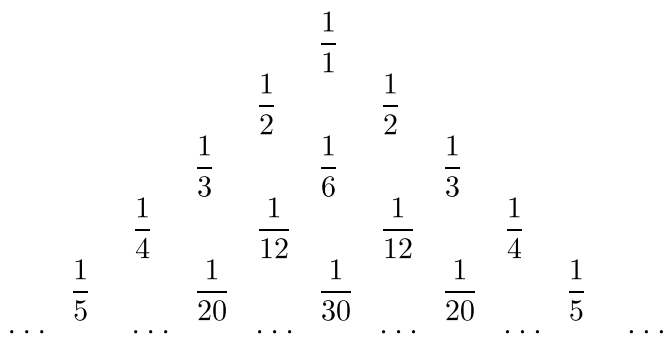
题型五: 利用递推关系求某一项的值;

1. 典型例题

考察通项公式理解

1. 现在有这么一列数: $2, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \text{——}, \frac{13}{32}, \frac{17}{64}, \dots$, 按照规律, 横线中的数应为 ().
- A. $\frac{9}{16}$ B. $\frac{11}{16}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{11}{18}$

2. 如图所示的三角形数阵叫“莱布尼兹调和三角形”, 它们是由整数的倒数组成的, 第 n 行有 n 个数且两端的数均为 $\frac{1}{n} (n \geq 2)$, 每个数是它下一行左右相邻两数的和, 如 $\frac{1}{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$..., 则第7行第4个数 (从左往右数) 为 ().



- A. $\frac{1}{140}$ B. $\frac{1}{105}$ C. $\frac{1}{60}$ D. $\frac{1}{42}$
3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \frac{1}{n(n+2)} (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $\frac{1}{120}$ 这个数列的 ().
- A. 第8项 B. 第9项 C. 第10项 D. 第12项

考察数列单调性判断

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \begin{cases} a^{n-2}, n < 4 \\ (6-a)n - a, n \geq 4 \end{cases}$, 若对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 都有 $a_n < a_{n+1}$ 成立, 则实数 a 的取值范围为 () .
- A. (1, 4) B. (2, 5)
C. (1, 6) D. (4, 6)
5. 数列 $a_n = \frac{n(n+1)}{2^{n-2}}$, 记 $M = \{n | a_n \geq \lambda, n \in \mathbf{N}^*\}$, 若集合 M 的元素个数为3, 则实数 λ 的取值范围是 _____ .
6. 设 $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 a_{n+1} 与 a_n 的大小关系是 a_{n+1} _____ a_n .

考察递推公式

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1, n = 2k \\ \frac{a_n}{n}, n = 2k-1 \end{cases} (k \in \mathbf{N}^*)$, $a_1 = 1$, $a_n = \frac{2}{3}$, 则 $n =$ _____ .
8. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n}$, 则 a_{2019} 的值为 () .
- A. 2 B. -3 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

考察项与和的关系

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = n^2 - 10n + 1$, 则这个数列的通项公式为 _____ .
10. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 3a_2 + 3^2a_3 + \cdots + 3^{n-1}a_n = \frac{n}{3} (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $a_n =$ _____ .

2. 巩固练习

考察通项公式理解

11. 数列1, -3, 5, -7, 9,的一个通项公式为 () .
- A. $a_n = 2n - 1$ B. $a_n = (-1)^n(2n - 1)$
C. $a_n = (-1)^n(1 - 2n)$ D. $a_n = (-1)^n(2n + 1)$
12. 已知数列 $\{a_n\}$, $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n^2 + 1}{2n + 1}$, 那么这个数列中的第5项是 () .
- A. $\frac{26}{11}$ B. $-\frac{26}{11}$ C. $\frac{24}{11}$ D. $-\frac{24}{11}$
13. 将全体正整数排成一个三角形数阵:

1
2 3

由三个数 a, A, b 组成的等差数列可以看成最简单的等差数列. 这时, A 叫做 a 与 b 的等差中项. 利用等差数列的定义可得: $A - a = b - A$, 进而计算得到: $A = \frac{a+b}{2}$.

等差数列通项公式

一般地, 如果等差数列 $\{a_n\}$ 的首项是 a_1 , 公差是 d , 我们根据等差数列的定义, 可以得到

$$a_2 - a_1 = d,$$

$$a_3 - a_2 = d,$$

$$a_4 - a_3 = d,$$

.....

$$a_n - a_{n-1} = d.$$

将上面 $n-1$ 个等式累加, 得到:

$$(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) = (n-1)d$$

整理得到:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

上式就成为等差数列的通项公式.

等差数列通项性质

若数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1 , 公差为 d 的等差数列, 则 $\{a_n\}$ 具有如下性质:

1. $d > 0$, 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列; $d < 0$, 数列 $\{a_n\}$ 是递减数列; $d = 0$, 数列 $\{a_n\}$ 是常数列;
2. $d = \frac{a_n - a_1}{n-1} = \frac{a_m - a_k}{m-k} (m, n, k \in \mathbf{N}^*)$, 变形为 $a_n = a_m + (n-m)d (m, n \in \mathbf{N}^*)$;
3. 若 $m+n=p+q$, 则 $a_m + a_n = a_p + a_q (m, n, p, q \in \mathbf{N}^*)$; 更特殊的情况, 若 k 是 m, n 的等差中项, 则 a_k 是 a_m 和 a_n 的等差中项;
4. 数列 $\{\lambda a_n + b\}$ 是公差为 λd 的等差数列, 以此推广, 若 $\{b_n\}$ 是公差为 d_0 等差数列, 则 $\{\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n\}$ 是公差为 $\lambda_1 d + \lambda_2 d_0$ 的等差数列;
5. 下标成等差数列且公差为 m 的项 $a_k, a_{k+m}, a_{k+2m}, \dots (k, m \in \mathbf{N}^*)$ 组成公差为 md 的等差数列.

等差数列的判断

方法一: 如果一个数列满足 $a_{n+1} - a_n = d (n \in \mathbf{N}^*)$ 或者 $a_n - a_{n-1} = d (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$, 那么这个数列是等差数列;

方法二: 如果一个数列满足

$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2} (n \in \mathbf{N}^*)$ 或者 $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$, 那么这个数列是等差数列;

题型总结

题型一：考察等差数列的定义；

题型二：考察等差数列通项公式的求法；

题型三：考察等差数列通项的性质；

题型四：考察等差数列的判断方法和通项公式的综合；

1. 典型例题

考察等差数列定义

21. 《九章算术》是我国古代的优秀数学著作，在人类历史上第一次提出负数的概念，内容涉及方程、几何、数列、面积、体积的计算等多方面．书的第6卷19题，“今有竹九节，下三节容量四升，上四节容量三升．”如果竹由下往上均匀变细（各节容量可视为等差数列），则中间剩下的两节容量是多少升（ ）．

A. $2\frac{23}{66}$
C. $2\frac{61}{66}$

B. $2\frac{3}{22}$
D. $1\frac{11}{11}$

22. 已知三个数成等差数列并且数列是递增的，它们的和为18，它们的平方和为116，则这三个数是_____．

考察等差数列通项公式求法

23. 已知数列 $\{a_n\}$ 为递增的等差数列，且 $a_1 = 1$ ， $a_3 = a_2^2 - 4$ ，则 $a_4 =$ _____； $a_n =$ _____．

24. 等差数列 $\{a_n\}$ 中的 $a_{15} = 33$ ， $a_{45} = 153$ ，则213是这个数列的第（ ）项．

A. 60

B. 61

C. 62

D. 不在数列中

25. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 15$ ，且 $3a_{n+1} = 3a_n - 2$ ，若 $a_k a_{k+1} < 0$ ，则正整数 $k =$ _____．

26. 等差数列的首项为 $\frac{1}{25}$ ，且从第10项开始为比1大的项，则公差 d 的取值范围是（ ）．

A. $d > \frac{8}{75}$

B. $d < \frac{3}{25}$

C. $\frac{8}{75} < d < \frac{3}{25}$

D. $\frac{8}{75} < d \leq \frac{3}{25}$

考察等差数列的判断和通项公式求法

27. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ， $a_2 = 2$ ，且 $2na_n = (n-1)a_{n-1} + (n+1)a_{n+1}$ ($n \geq 2$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$)，则 $a_{18} =$ （ ）．

A. $\frac{25}{9}$

B. $\frac{26}{9}$

C. 3

D. $\frac{28}{9}$

考察等差数列通项的性质

28. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, a_1, a_{2015} 为方程 $x^2 - 10x + 16 = 0$ 的两根, 则 $a_2 + a_{1008} + a_{2014} =$ _____.

2. 巩固练习

考察等差数列定义

29. “中国剩余定理”又称“孙子定理”, 1852年英国来华传教伟烈亚利将《孙子算经》中“物不知数”问题的接法传至欧洲, 1874年, 英国数学家马西森指出此法符合1801年由高斯得出的关于同余式接法的一般性定理, 因而西方称之为“中国剩余定理”, “中国剩余定理”讲的是一个关于整数的问题, 现有这样一个整数问题: 将2至2018这2017个整数中能被2除余1且被3除1的数按由小到大的顺序排成一列, 构成数列 $\{a_n\}$, 则此数列的项数为_____.

30. 在1与25之间插入五个数, 使其组成等差数列, 则这五个数为().

- A. 3, 8, 13, 18, 23
- B. 4, 8, 12, 16, 20
- C. 5, 9, 13, 17, 21
- D. 6, 10, 14, 18, 22

考察等差数列通项公式求法

31. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_5 = 4a_3$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____.

32. $\{a_n\}$ 是首项为1, 公差为3的等差数列, 如果 $a_n = 2014$, 则序号 n 等于().

- A. 667
- B. 668
- C. 669
- D. 672

33. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $\sqrt{a_{n+1}} = \sqrt{a_n} + \sqrt{2}, a_1 = 8$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为().

- A. $a_n = 2(n+1)^2$
- B. $a_n = (n+1)$
- C. $a_n = 8n^2$
- D. $a_n = 4n(n+1)$

34. 已知在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 首项为23, 公差是整数, 从第7项开始为负项, 则公差为_____.

考察等差数列判断和通项公式求法

35. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, \frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}} (n \in \mathbf{N}^*)$, 则该数列的通项为().

- A. $a_n = \frac{1}{n}$
- B. $a_n = \frac{2}{n+1}$
- C. $a_n = \frac{2}{n+2}$
- D. $a_n = \frac{3}{n}$

考察等差数列通项的性质

36. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $2(a_1 + a_3 + a_5) + 3(a_8 + a_{10}) = 36$, 则 $a_6 =$ ().

A. 8

B. 6

C. 4

D. 3