

数列通项求法

一、构造等差数列

🔔 题型总结

此类问题一般的考察形式是，题干给出数列的递推关系，题目一般会让我们证明相关数列为等差数列，我们需要首先完成证明，然后在证明出来的等差数列的基础上求解出通项公式。

1. 典型例题

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 = 6, a_{n-1} \cdot a_n - 6a_{n-1} + 9 = 0, n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n \geq 2$ 。

(1) 求证：数列 $\left\{\frac{1}{a_n - 3}\right\}$ 为等差数列。

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

【答案】(1) 证明见解析。

$$(2) a_n = \frac{3(n+1)}{n}.$$

【解析】(1) 由 $a_{n-1} \cdot a_n - 6a_{n-1} + 9 = 0$, 得 $a_n = 6 - \frac{9}{a_{n-1}}$,

$$\therefore a_{n+1} = 6 - \frac{9}{a_n},$$

$$\text{则 } \frac{1}{a_{n+1} - 3} - \frac{1}{a_n - 3} = \frac{1}{6 - \frac{9}{a_n} - 3} - \frac{1}{a_n - 3} = \frac{a_n - 3}{3(a_n - 3)} = \frac{1}{3},$$

$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{1}{a_n - 3}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列。

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } \frac{1}{a_n - 3} = \frac{1}{a_1 - 3} + \frac{1}{3}(n-1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(n-1) = \frac{n}{3},$$

$$\therefore a_n = \frac{3(n+1)}{n}.$$

【标注】【知识点】裂项相消法求和

备注：2019-2020学年天津滨海新区天津开发区第一中学高二上学期期中第22题15分

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = 1 - \frac{1}{4a_n}$, 其中 $n \in \mathbf{N}^*$ 。

设 $b_n = \frac{2}{2a_n - 1}$, 求证：数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，并求出 $\{a_n\}$ 的通项公式。

【答案】(1) 证明见解析； $a_n = \frac{n+1}{2n}$ 。

【解析】(1) $\because b_{n+1} - b_n = \frac{2}{2a_{n+1} - 1} - \frac{2}{2a_n - 1}$
 $= \frac{2}{2\left(1 - \frac{1}{4a_n}\right) - 1} - \frac{2}{2a_n - 1}$
 $= \frac{4a_n}{2a_n - 1} - \frac{2}{2a_n - 1}$
 $= 2,$

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是公差为 2 的等差数列,

又 $b_1 = \frac{2}{2a_1 - 1} = 2,$

$\therefore b_n = 2 + (n - 1) \times 2 = 2n.$

$\therefore 2n = \frac{2}{2a_n - 1},$ 解得 $a_n = \frac{n + 1}{2n}.$

【标注】【知识点】裂项相消法求和；等差数列的判定与证明问题；数列与不等式综合

备注：2018-2019 学年天津河西区天津市新华中学高一下学期期中（特长班）第 18 题 11 分

3. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, na_{n+1} = (n + 1)a_n + n(n + 1), n \in \mathbf{N}^*.$

证明：数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是等差数列.

【答案】(1) 证明见解析

【解析】(1) 由已知可得 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + 1$, 即 $\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = 1$,
 所以 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是以 $\frac{a_1}{1} = 1$ 为首项, 1 为公差的等差数列.

【标注】【知识点】错位相减法求和

2. 巩固练习

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{3}{4}, a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n} (n \in \mathbf{N}^*).$

求证：数列 $\left\{\frac{1}{a_n - 1}\right\}$ 是等差数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】(1) 证明见解析, $a_n = \frac{n + 2}{n + 3} (n \in \mathbf{N}^*)$

【解析】(1) 因为 $\frac{1}{a_{n+1} - 1} - \frac{1}{a_n - 1} = \frac{1}{\frac{1}{2 - a_n} - 1} - \frac{1}{a_n - 1}$
 $= \frac{2 - a_n}{1 - (2 - a_n)} - \frac{1}{a_n - 1} = -1, \frac{1}{a_1 - 1} = -4,$ 故数列 $\left\{\frac{1}{a_n - 1}\right\}$ 是首项为
 -4 , 公差为 -1 的等差数列, 所以 $\frac{1}{a_n - 1} = -4 - (n - 1) = -n - 3,$ 即
 $a_n = \frac{n + 2}{n + 3} (n \in \mathbf{N}^*).$

二、构造等比数列

模型一

$$a_{n+1} = pa_n + q \quad (p, q \in \mathbf{R} \text{ 且满足 } pq(p-1) \neq 0)$$

若数列 $\{a_n\}$ 满足递推公式 $a_{n+1} = pa_n + q$ ，利用待定系数法，将递推公式变形为 $a_{n+1} + \lambda = p(a_n + \lambda)$ ，设 $b_n = a_n + \lambda$ ，则递推公式等价于 $b_{n+1} = pb_n$ ，因此数列 $\{b_n\}$ 是公比为 p 的等比数列，可根据等比数列的通项公式求出数列 $\{b_n\}$ 的通项公式，进而 $\{a_n\}$ 的通项公式可求。

模型二

$$a_{n+1} = pa_n + qn + c \quad (pq(p-1) \neq 0)$$

则可以构造 $a_{n+1} + x(n+1) + y = p(a_n + xn + y)$ 的形式，对比 $a_{n+1} = pa_n + qn + c$ 可得
$$\begin{cases} px - x = q \\ py - y - x = c \end{cases}$$
，根据这个方程可解出 x, y ，这样数列 $\{a_n + xn + y\}$ 是以 p 为公比的等比数列，这样可以先求出数列 $\{a_n + xn + y\}$ 的通项公式，然后求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

模型三

$$a_{n+1} = pa_n + r \cdot q^n \quad (p, q, r \in \mathbf{R} \text{ 且满足 } pqr(p-1) \neq 0)$$

当 $p \neq q$ 时，则可以构造 $a_{n+1} + x \cdot q^{n+1} = p(a_n + x \cdot q^n)$ 的形式，对比 $a_{n+1} = pa_n + r \cdot q^n$ 可得 $px - qx = r$ ，根据这个方程可解出 x ，这样数列 $\{a_n + x \cdot q^n\}$ 是以 p 为公比的等比数列，这样可以先求出数列 $\{a_n + x \cdot q^n\}$ 的通项公式，然后求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

当 $p = q$ ，即为 $a_{n+1} = pa_n + r \cdot p^n$ ，两边同除 p^{n+1} ，可得 $\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{a_n}{p^n} + \frac{r}{p}$ ，则数列 $\left\{\frac{a_n}{p^n}\right\}$ 为等差数列。

模型四

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \quad (p, q \in \mathbf{R} \text{ 且满足 } pq \neq 0)$$

若数列 $\{a_n\}$ 满足递推公式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ ，可变形为 $a_{n+2} - xa_{n+1} = y(a_{n+1} - xa_n)$ ，与原递推公式比较可得方程组
$$\begin{cases} x + y = p \\ xy = -q \end{cases}$$
，

1. 若方程组有实数解，则 $\{a_{n+1} - xa_n\}$ 是公比为 y 的等比数列，通项公式可求，进而转化为模型三。
2. 若方程组无实数解，则 $\{a_n\}$ 为周期数列，利用题目给出条件 a_1, a_2 循环以此求出后续项可发现 $\{a_n\}$ 陷入循环。

模型五

$$a_{n+1} = \frac{pa_n}{qa_n + r} \quad (p, q, r \in \mathbf{R} \text{ 且满足 } pqr \neq 0)$$

若数列 $\{a_n\}$ 满足递推公式 $a_{n+1} = \frac{pa_n}{qa_n + r}$ ，两边取倒数得： $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{qa_n + r}{pa_n} = \frac{r}{p} \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{q}{p}$ ，设 $b_n = \frac{1}{a_n}$ ，则递推公式变为 $b_{n+1} = \frac{r}{p}b_n + \frac{q}{p}$ ：

- ①若 $r = p$ ，则 $\frac{r}{p} = 1$ ，此时 $\{b_n\}$ 为等差数列，通项公式可求，进而求得 $\{a_n\}$ 的通项公式。
②若 $r \neq p$ ，则 $\frac{r}{p} \neq 1$ ，此时 $\{b_n\}$ 符合类型一，以下略。

模型六

$$a_{n+1}^p = a_n^q \quad (a_n > 0 \text{ 且 } a_n \neq 1, pq \neq 0)$$

若数列 $\{a_n\}$ 满足递推公式 $a_{n+1}^p = a_n^q$ ，在 $a_n > 0$ 的前提下，两边取对数（如取常用对数），则有 $p \lg a_{n+1} = q \lg a_n$ ，设 $b_n = \lg a_n$ ，则有 $b_{n+1} = \frac{q}{p}b_n$ ，故 $\{b_n\}$ 为等比数列，以下略。

1. 典型例题

考察模型一

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ， $a_n = 3a_{n-1} + 4$ （ $n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n \geq 2$ ），则数列 $\{a_n\}$ 通项公式 a_n 为（ ）。
- A. 3^{n-1} B. $3^{n+1} - 4$ C. $3^n - 2$ D. 3^n

【答案】C

【解析】 $\because a_1 = 1, a_n = 3a_{n-1} + 4 (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2)$ 变形为 $a_n + 2 = 3(a_{n-1} + 2)$ ，
 $\therefore$ 数列 $\{a_n + 2\}$ 是等比数列，首项为3，公比为3，
 $\therefore a_n + 2 = 3^n$ ，
 $\therefore a_n = 3^n - 2$ 。
故选C。

【标注】【知识点】构造数列求通项

备注：2018-2019学年10月天津滨海新区南开中学滨海生态城学校高二上学期月考第7题5分

考察模型二

6. 在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 3$ ， $a_n = 2a_{n-1} + n - 2$ （ $n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$ ）。
- 证明：数列 $\{a_n + n\}$ 是等比数列，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式。

【答案】(1) $a_n = 2^{n+1} - n$.

【解析】(1) $a_n = 2a_{n-1} + n - 2 (n \geq 2)$,

$$a_n + n = 2(a_{n-1} + n - 1),$$

故数列 $\{a_n + n\}$ 是以 $a_1 + 1$ 即以4为首项, 2为公比的等比数列,

$$a_n + n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1},$$

$$\therefore a_n = 2^{n+1} - n (n \geq 2),$$

$$\text{当 } n = 1 \text{ 时, } a_1 = 3,$$

$$\text{故 } a_n = 2^{n+1} - n.$$

【标注】【知识点】等比数列求通项问题; 分组法求和; 通项公式

备注: 2018-2019学年天津河西区天津市实验中学高二上学期期中第17题9分

考察模型三

7. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_n = 2a_{n-1} + 2^{n+1} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$.

令 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$, 求证 $\{b_n\}$ 是等差数列.

【答案】(1) 证明见解析.

【解析】(1) 由 $a_n = 2a_{n-1} + 2^{n+1}$, 得 $\frac{a_n}{2^n} = \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + 2$,

$$\therefore \frac{a_n}{2^n} - \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} = 2 (n \geq 2),$$

$$\text{又 } b_n = \frac{a_n}{2^n}, \therefore b_1 = 1,$$

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是首项为1, 公差为2的等差数列.

【标注】【知识点】裂项相消法求和; 等差数列的判定与证明问题

备注: 2018-2019学年12月天津和平区天津市第二十中学高三上学期月考文科第16题13分

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 5$ 且 $a_n = 2a_{n-1} + 2^n - 1 (n \geq 2 \text{ 且 } n \in \mathbf{N}^*)$.

证明: 数列 $\left\{\frac{a_n - 1}{2^n}\right\}$ 为等差数列.

【答案】(1) 证明见解析.

【解析】(1) 证明: $\because a_1 = 5$ 且 $a_n = 2a_{n-1} + 2^n - 1 (n \geq 2 \text{ 且 } n \in \mathbf{N}^*)$. $\therefore$ 设 $b_n = \frac{a_n - 1}{2^n}$,

$$\text{则 } b_1 = \frac{5-1}{2} = 2, \quad b_{n+1} - b_n = \frac{a_{n+1} - 1}{2^{n+1}} - \frac{a_n - 1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}} [(a_{n+1} - 2a_n) + 1]$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} [(2^{n+1} - 1) + 1] = 1. \therefore \text{数列} \left\{ \frac{a_n - 1}{2^n} \right\} \text{为首项是2、公差是1等差数列.}$$

【标注】【知识点】错位相减法求和；等差数列的判定与证明问题

备注：2018-2019学年10月天津和平区天津市第二十中学高二上学期月考理科第17题7分

考察模型四

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 2$ ， $a_2 = 4$ ， $a_{n+1} + 2a_{n-1} = 3a_n (n \geq 2)$ 。

(1) 求证：数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是等比数列。

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) $a_n = 2^n$ 。

【解析】(1) $\because a_{n+1} + 2a_{n-1} = 3a_n$ ，
 $\therefore \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}} = \frac{3a_n - 2a_{n-1} - a_n}{a_n - a_{n-1}} = 2$ ，
 $\therefore$ 数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是等比数列。

(2) $\because a_1 = 2$ ， $a_2 = 4$ ， $\therefore a_2 - a_1 = 2$ ，
 $\therefore \{a_{n+1} - a_n\}$ 是以 $a_2 - a_1 = 2$ 为首项，公比为2的等比数列，
 $\therefore a_{n+1} - a_n = 2^n$ ，
 当 $n \geq 2$ 时，
 $a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$
 $= 2 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n$ ，
 $\because n = 1$ 适合上式， $\therefore a_n = 2^n$ 。

【标注】【知识点】裂项相消法求和；数列中的恒成立问题

备注：2017-2018学年10月天津高三上学期月考文科第18题13分

考察模型五

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 3} (n \in \mathbf{N})$ 。

求证： $\left\{ \frac{1}{a_n} + \frac{1}{2} \right\}$ 是等比数列，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 。

【答案】(1) 证明见解析， $\{a_n\}$ 的通项公式为： $a_n = \frac{2}{3^n - 1}$ 。

【解析】 (1) 由 $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 3}$ 得 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 3}{a_n} = 1 + \frac{3}{a_n}$,
 即 $\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{2} = 3\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{2}\right)$,
 又 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$,
 所以 $\left\{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{2}\right\}$ 是以 $\frac{3}{2}$ 为首项,
 3 为公比的等比数列,
 所以 $\frac{1}{a_n} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times 3^{n-1} = \frac{3^n}{2}$,
 即 $a_n = \frac{2}{3^n - 1}$,
 综上所述: $\left\{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{2}\right\}$ 是等比数列,
 $\{a_n\}$ 的通项公式为: $a_n = \frac{2}{3^n - 1}$.

【标注】【知识点】错位相减法求和; 等比数列的判定与证明

备注: 2019-2020 学年天津南开区天津市南开翔宇学校高二上学期中第 20 题

考察模型六

11. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n^2 + 6a_n + 6 (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 设 $C_n = \log_5(a_n + 3)$, 求证 $\{C_n\}$ 是等比数列.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) $a_n = 5^{2^{n-1}} - 3$.

【解析】 (1) 由 $a_{n+1} = a_n^2 + 6a_n + 6$, 得 $a_{n+1} + 3 = (a_n + 3)^2$,

$\therefore \log_5(a_{n+1} + 3) = 2\log_5(a_n + 3)$, 即 $C_{n+1} = 2C_n$,

$\therefore \{C_n\}$ 是以 2 为公比的等比数列.

(2) $\because C_1 = \log_5 5 = 1$, $\therefore C_n = 2^{n-1}$, 即 $\log_5(a_n + 3) = 2^{n-1}$,

$\therefore a_n + 3 = 5^{2^{n-1}}$.

故 $a_n = 5^{2^{n-1}} - 3$.

【标注】【知识点】裂项相消法求和; 对数型递推求通项

备注: 2015-2016 学年天津高三上学期中理科六校联考第 18 题 13 分

2. 巩固练习

考察模型一

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n + 1 (n \in \mathbf{N}^*)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前项和 $S_n =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{4}(3^{n+1} - 2n - 3)$

【解析】 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n + 1 (n \in \mathbf{N}^*)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前项和 $S_n =$
由 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n + 1$, 可设 $a_{n+1} + t = 3(a_n + t)$,
即 $a_{n+1} = 3a_n + 2t$, 可得 $2t = 1$, 即 $t = \frac{1}{2}$, 则 $a_{n+1} + \frac{1}{2} = 3\left(a_n + \frac{1}{2}\right)$,
可得数列 $\left\{a_n + \frac{1}{2}\right\}$ 是首相为 $\frac{3}{2}$, 公比为3的等比数列,
既有 $a_n + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot 3^{n-1}$, 即 $a_n = \frac{3}{2} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2}$,
可得数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{3}{2}(1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}) - \frac{1}{2}n = \frac{1}{4}(3^{n+1} - 2n - 3)$,
故答案为: $\frac{1}{4}(3^{n+1} - 2n - 3)$.

【标注】【知识点】等比数列的判定与证明; 等比数列求和问题; 数列的前 n 项和; 递推数列与递推方法

备注: 2019-2020学年10月天津和平区天津市第二南开中学高二上学期月考第16题6分

考察模型二

13. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 4a_n - 3n + 1$.

证明数列 $\{a_n - n\}$ 是等比数列.

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 4a_n - 3n + 1$, $n \in \mathbf{N}^*$,
所以 $a_{n+1} - (n+1) = 4a_n - 3n + 1 - (n+1)$
 $= 4a_n - 4n = 4(a_n - n)$,
所以 $\{a_n - n\}$ 为首项 $a_1 - 1 = 1$, 公比 $q = 4$ 的等比数列,
即数列 $\{a_n - n\}$ 的通项公式 $a_n - n = 4^{n-1}$.

【标注】【知识点】等比数列的判定与证明; 分组法求和; 递推数列与递推方法

考察模型三

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n + 3 \cdot 2^n$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】 $a_n = 8 \cdot 3^{n-1} - 3 \cdot 2^n$

【解析】 $\because a_{n+1} = 3a_n + 3 \cdot 2^n$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{a_n}{2^n} + \frac{3}{2}$$

$$\text{令 } b_n = \frac{a_n}{2^n}$$

$$\therefore b_{n+1} = \frac{3}{2}b_n + \frac{3}{2}$$

$$\text{又 } \therefore b_{n+1} + 3 = \frac{3}{2}(b_n + 3)$$

$$\therefore \frac{b_{n+1} + 3}{b_n + 3} = \frac{3}{2}$$

$\{b_n + 3\}$ 为以 $b_1 + 3 = \frac{a_1}{2^1} + 3 = 4$ 为首项, 公比为 $\frac{3}{2}$ 的等比数列.

$$\therefore b_n + 3 = 4 \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 8 \cdot 3^{n-1} - 3 \cdot 2^n.$$

【标注】 **【知识点】** 利用待定系数法求数列通项公式问题

考察模型四

15. 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_{n+2} = \frac{3}{2}a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 记 $d_n = a_{n+1} - a_n$, 求证: $\{d_n\}$ 是等比数列.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】 (1) 证明见解析.

$$(2) a_n = 2 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*).$$

【解析】 (1) $\because a_{n+2} = \frac{3}{2}a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n$,

$$\therefore a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n),$$

$$\because a_1 = 1, a_2 = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} = \frac{1}{2},$$

$$\text{且 } d_n = a_{n+1} - a_n,$$

$\therefore \{d_n\}$ 是以 $d_1 = \frac{1}{2}$ 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列.

(2) 由(1)可知 $d_n = a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{2} \right)^n (n \in \mathbf{N}^*)$,

$$\text{所以 } a_2 - a_1 = \frac{1}{2},$$

$$a_3 - a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$a_4 - a_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3,$$

$$a_n - a_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (n \geq 2),$$

以上式子相加，

$$\text{所以 } a_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + a_1,$$

$$\therefore a_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1$$

$$= 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (n \geq 2),$$

经检验， $n = 1$ 时，符合，

$$\therefore a_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (n \in \mathbf{N}^*).$$

【标注】【知识点】利用累加法求数列通项公式问题；等比数列的判定与证明

考察模型五

16. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \frac{3}{2}$ ， $x_{n+1} = \frac{3x_n}{2x_n + 1}$ ， $n \in \mathbf{N}_+$ ．求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式．

【答案】 $x_n = \frac{3^n}{3^n - 1}$

【解析】 略

【标注】【素养】数学运算

三、根据项与和的关系求通项

已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 S_n ，则 $a_n = \begin{cases} S_1, & n = 1 \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$ （注意：不能忘记讨论 $n = 1$ ）．

1. 典型例题

考察已知和求通项公式

17. 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， $S_n = 2n^2 + 5n$ ．

证明：数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，并求 a_n ．

【答案】 (1) 证明见解析, $a_n = 7 + (n-1) \times 4$.

【解析】 (1) $\because S_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和且 $S_n = 2n^2 + 5n$,

$\therefore$ 当 $n \geq 2$ 时,

$$S_{n-1} = 2(n-1)^2 + 5(n-1)$$

$$= 2(n^2 + 1 - 2n) + 5n - 5$$

$$= 2n^2 + n - 3,$$

$$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 + 5n - 2n^2 - n + 3 = 4n + 3,$$

$$\text{当 } n = 1 \text{ 时, } S_1 = a_1 = 7,$$

$$\text{当 } n = 1 \text{ 时, 也满足 } a_n = 4n + 3 (n \geq 1),$$

$$\text{故 } a_n = 4n + 3,$$

$$\therefore d = a_{n+1} - a_n = 4, a_1 = 7,$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 7, 公差为 4 的等差数列.

【标注】 【知识点】裂项相消法求和; 利用 S_n 与 a_n 的关系求通项; 数列的函数特性; 等差数列的判定与证明问题; 数列与不等式综合

备注: 2019-2020 学年 10 月天津津南区天津市咸水沽一中高二上学期月考第 18 题 13 分

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{5} + \cdots + \frac{a_n}{2n-1} = n(n+2)$, $n \in \mathbf{N}^*$, 则数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和 $T_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{n}{2n+1}$

【解析】 $a_1 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{5} + \cdots + \frac{a_n}{2n-1} = n(n+2)$ ①,

当 $n \geq 2$ 时,

$$a_1 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{5} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2(n-1)-1} = (n-1)(n+1)$$
 ②,

由 ①-② 可得,

$$\frac{a_n}{2n-1} = n(n+2) - (n-1)(n+1)$$

$$= 2n + 1,$$

$$\text{故 } a_n = (2n-1)(2n+1) = 4n^2 - 1,$$

当 $n = 1$ 时,

$$a_1 = 1 \times 3 = 3 = 4 \times 1^2 - 1,$$

$$\text{满足 } a_n = 4n^2 - 1,$$

$$\text{故 } a_n = 4n^2 - 1,$$

$$\begin{aligned}
 \therefore T_n &= \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\
 &= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \\
 &= \frac{n}{2n+1},
 \end{aligned}$$

综上所述，数列 $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ 的前 n 项和 $T_n = \frac{n}{2n+1}$ 。

【标注】【知识点】利用 S_n 与 a_n 的关系求通项；裂项相消法求和

备注：2019-2020 学年天津南开区天津市南开中学高二上学期期中第 14 题 4 分

备注：本题可看成基本形式的一种变化形式，此处只需要引入数列 $\{b_n\}$ $\left(b_n = \frac{a_n}{2n-1} \right)$ ，设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，问题就变化成已知 $T_n = n(n+2)$ 求 $\{b_n\}$ 通项公式，最后求解 a_n 。

🔍 考察已知和与项的关系求通项公式

🔍 解题思路

对于已知项与和的关系求解通项公式的问题，我们有两种思路，第一种思路是直接利用项与和的关系式

$$a_n = \begin{cases} S_1; n=1 \\ S_n - S_{n-1}; n \geq 2 \end{cases} \quad \text{消掉 } S_n, \text{ 留下数列 } \{a_n\} \text{ 的递推关系式, 然后利用递推关系式求出数列通项}$$

公式；第二种思路是在利用项与和的关系式 $a_n = \begin{cases} S_1; n=1 \\ S_n - S_{n-1}; n \geq 2 \end{cases}$ 消掉 S_n 不好实现的情况下，我们可以先消掉 a_n ，留下关于 S_n 的递推关系式，利用递推关系求解出 S_n ，再用

$$a_n = \begin{cases} S_1; n=1 \\ S_n - S_{n-1}; n \geq 2 \end{cases} \quad \text{求出 } a_n.$$

🔍 考察思路一

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足 $S_n - 2a_n - n = 0 (n \in \mathbf{N}^+)$ ，则数列 $\{a_n - 1\}$ 的通项公式为 _____。

【答案】 -2^n

【解析】 $\because S_n - 2a_n - n = 0 (n \in \mathbf{N}^*)$ ①，

$$\therefore S_{n-1} - 2a_{n-1} - (n-1) = 0 (n \geq 2) \quad \text{②，}$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得: } a_n = 2a_{n-1} - 1,$$

$$\therefore a_n - 1 = 2(a_{n-1} - 1),$$

$$\therefore \frac{a_n - 1}{a_{n-1} - 1} = 2,$$

$\therefore \{a_n - 1\}$ 是以首项为 $a_1 - 1$ ，公比为 2 的等比数列。

$n = 1$ 时： $S_1 - 2a_1 - 1 = 0$ ， $\therefore a_1 = -1$ ，

$\therefore a_n - 1 = (a_1 - 1) \cdot 2^{n-1} = -2^n$ 。

【标注】【知识点】等比数列求通项问题；利用 S_n 与 a_n 的关系求通项

备注：2018-2019 学年 10 月天津和平区天津市第二十中学高二上学期月考理科第 13 题 4 分

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ， $na_{n+1} = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(n \in \mathbf{N}^*)$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 ()。

A. $a_n = n$

B. $a_n = 2n - 1$

C. $a_n = \frac{n+1}{2n}$

D. $a_n = \begin{cases} 1, & (n=1) \\ n+1, & (n \geq 2) \end{cases}$

【答案】 A

【解析】 $na_{n+1} = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(n \in \mathbf{N}^*)$ ①

$(n-1)a_n = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})$ ②

①-②，得： $na_{n+1} - (n-1)a_n = 2a_n$ ，

$na_{n+1} = (n+1)a_n$ ， $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n}$ ，

$\therefore a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{n}{n-1} = n(n \geq 2)$ ，

$\therefore a_n = n(n \in \mathbf{N}^*)$ 。

故选 A。

【标注】【知识点】利用累乘法求数列通项公式问题

备注：2018-2019 学年天津河西区天津市新华中学高一下学期期中（特长班）第 7 题 4 分

21. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且对任意的正整数 n 满足 $2\sqrt{S_n} = a_n + 1$ 。

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

【答案】 (1) $2n - 1$ 。

【解析】 (1) $\therefore$ 对任意的正整数 n ， $2\sqrt{S_n} = a_n + 1$ ，①恒成立，

当 $n = 1$ 时， $2\sqrt{a_1} = a_1 + 1$ ，即 $(\sqrt{a_1} - 1)^2 = 0$ ，

$$\therefore a_1 = 1,$$

当 $n \geq 2$ 时, 有 $2\sqrt{S_{n-1}} = a_{n-1} + 1$, ②,

$$\text{①}^2 - \text{②}^2 \text{ 得 } 4a_n = a_n^2 - a_{n-1}^2 + 2a_n - 2a_{n-1},$$

$$\text{即 } (a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1} - 2) = 0,$$

$$\because a_n > 0,$$

$$\therefore a_n + a_{n-1} > 0,$$

$$\therefore a_n - a_{n-1} = 2,$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公差为 2 的等差数列,

$$\therefore a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n-1.$$

【标注】【知识点】裂项相消法求和; 利用 S_n 与 a_n 的关系求通项

备注: 2019-2020 学年 11 月天津武清区杨村第三中学高二上学期月考第 18 题 12 分

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = -a_n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$ (n 为正整数).

令 $b_n = 2^n a_n$, 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

【答案】 (1) 证明见解析

【解析】 (1) 在 $S_n = -a_n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$ 中, 令 $n=1$, 可得 $S_1 = -a_1 - 1 + 2 = a_1$, 即

$$a_1 = \frac{1}{2}. \text{ 当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_{n-1} = -a_{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 2$$

$$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = -a_n + a_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad 2a_n = a_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \text{ 即}$$

$$2^n a_n = 2^{n-1} a_{n-1} + 1. \therefore b_n = 2^n a_n, \therefore b_n = b_{n-1} + 1, \text{ 即当 } n \geq 2 \text{ 时,}$$

$$b_n - b_{n-1} = 1. \text{ 又 } b_1 = 2a_1 = 1, \therefore \text{数列 } \{b_n\} \text{ 是首项和公差均为 1 的等差数列. 于}$$

$$\text{是 } b_n = 1 + (n-1) \cdot 1 = n = 2^n a_n, \therefore a_n = \frac{n}{2^n}.$$

【标注】【知识点】利用 S_n 与 a_n 的关系求通项; 错位相减法求和

备注: 2018-2019 学年天津河西区天津市实验中学高三下学期开学考试文科第 18 题 13 分



考察思路二

23. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$), $a_1 = 1$ 且 $S_n \cdot S_{n-1} + \frac{1}{2}a_n = 0$.

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】 (1) $a_n = \begin{cases} 1, n=1 \\ -2 \\ (2n-1)(2n-3), n \geq 2 \end{cases}$

【解析】 (1) $\because a_1 = 1, S_n \cdot S_{n-1} + \frac{1}{2}a_n = 0$,
 即 $S_n \cdot S_{n-1} + \frac{1}{2}(S_n - S_{n-1}) = 0 (n \geq 2)$,
 $2S_n \cdot S_{n-1} = S_{n-1} - S_n$, 同除 $S_n \cdot S_{n-1}$,
 $2 = \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}}$,
 $\therefore$ 数列 $\left\{ \frac{1}{S_n} \right\}$ 是以1为首项, 以2为公差的等差数列,
 $\therefore \frac{1}{S_n} = 1 + 2(n-1) = 2n-1$,
 $\therefore S_n = \frac{1}{2n-1}$,
 当 $n=1$ 时, $a_1 = 1$,
 当 $n \geq 2$ 时,
 $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(n-1)-1}$
 $= \frac{-2}{(2n-1)(2n-3)}$,
 $\therefore a_n = \begin{cases} 1, n=1 \\ -2 \\ (2n-1)(2n-3), n \geq 2 \end{cases}$

【标注】【知识点】数学归纳法；构造等差数列求通项

备注：2019年天津和平区天津市耀华中学高三二模理科第18题13分

2. 巩固练习

考察已知和求通项公式

24. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = \frac{n^2 + n}{2} (n \in \mathbf{N})$.
 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】 (1) $a_n = n$.

【解析】 (1) 当 $n \geq 2$,
 $a_n = S_n - S_{n-1} = n$,
 当 $n=1$ 时,
 $a_1 = S_1 = 1$,
 符合上式,
 综上, $a_n = n$.

【标注】【知识点】利用 S_n 与 a_n 的关系求通项；错位相减法求和

备注：2019-2020学年10月天津河东区天津市第四十五中学高二上学期月考第17题12分

25. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 3a_2 + 3^2a_3 + \cdots + 3^{n-1}a_n = \frac{n+1}{3}$ ， $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】
$$\begin{cases} \frac{2}{3}, n=1 \\ \frac{1}{3^n}, n \geq 2 \end{cases}$$

【解析】 $a_1 + 3a_2 + 3^2a_3 + \cdots + 3^{n-1}a_n = \frac{n+1}{3}$ ①，
 $n \geq 2$ ， $a_1 + 3a_2 + 3^2a_3 + \cdots + 3^{n-2}a_{n-1} = \frac{n}{3}$ ②，
①-②得： $3^{n-1}a_n = \frac{n+1}{3} - \frac{n}{3} = \frac{1}{3}$ ，
 $\therefore a_n = \frac{1}{3^n} (n \geq 2)$ ，
 $\therefore a_1 + 3a_2 + 3^2a_3 + \cdots + 3^{n-1}a_{n-1} = \frac{n+1}{3}$ ，
得 $a_1 = \frac{2}{3}$ ，
 $\therefore a_n = \begin{cases} \frac{2}{3}, n=1 \\ \frac{1}{3^n}, n \geq 2 \end{cases}$ 。
故答案为： $\begin{cases} \frac{2}{3}, n=1 \\ \frac{1}{3^n}, n \geq 2 \end{cases}$ 。

【标注】【素养】数学抽象

【知识点】利用 S_n 与 a_n 的关系求通项

备注：2018-2019学年10月天津和平区天津市第二十中学高二上学期月考理科第12题4分

 考察已知项与和的关系求通项公式

26. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$ ， $a_{n+1} = S_n + 1$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

【解析】 $\because a_{n+1} = S_n + 1$ ，
 $a_n = S_{n-1} + 1$ ，
 $\therefore a_{n+1} - a_n = S_n - S_{n-1} = a_n$ 。
 $\therefore a_{n+1} = 2a_n$ 。

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2.$$

$\therefore \{a_n\}$ 是以首项为3, 公比为2的等比数列,

$$\therefore a_n = 3 \cdot 2^{n-1}.$$

【标注】【知识点】利用 S_n 与 a_n 的关系求通项; 等比数列求通项问题

备注: 2018-2019学年11月天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高二上学期月考理科第14题4分

27. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 12$, $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = n^2 a_n$, 则 $a_{2017} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{12}{2017}$

【解析】 由 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1} + na_n = n^2 a_n$ ①,

则当 $n \geq 2$ 时 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1} = (n-1)^2 a_{n-1}$ ②,

由①-②得 $na_n = n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1}$,

整理得 $(n^2 - n)a_n = (n-1)^2 a_{n-1}$, 即 $n(n-1)a_n = (n-1)^2 a_{n-1}$,

那么 $na_n = (n-1)a_{n-1}$, 且 $n \geq 2$,

故 $na_n = (n-1)a_{n-1} = \cdots = 3a_3 = 2a_2 = a_1$, 且 $n \geq 2$,

则 $a_n = \frac{a_1}{n} = \frac{12}{n} (n \geq 2)$, 当 $n = 1$ 时 $a_1 = \frac{12}{1} = 12$,

故 $a_n = \frac{12}{n} (n \in \mathbf{N}^*)$,

那么 $a_{2017} = \frac{12}{2017}$,

故答案为: $\frac{12}{2017}$.

【标注】【方法】累乘法

【素养】数学运算; 逻辑推理

【知识点】利用 S_n 与 a_n 的关系求通项; 利用累乘法求数列通项公式问题

备注: 2019-2020学年10月天津河东区天津市第四十五中学高二上学期月考第12题5分

28. 设数列 $\{a_n\}$ 的前项和为 S_n , $2S_n = a_{n+1} - 2^{n+1} + 1$, $n \in \mathbf{N}^*$, 且 $a_1, a_2 + 5, a_3$ 成等差数列.

证明 $\left\{\frac{a_n}{2^n} + 1\right\}$ 为等比数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项.

【答案】 (1) 证明见解析, $a_n = 3^n - 2^n$.

【解析】 (1) 由题设可知, 在 $2S_n = a_{n+1} - 2^{n+1} + 1$, $n \in \mathbf{N}^*$ 中,

令 $n = 1$, 则 $2S_1 = a_2 - 2^2 + 1$, 即 $a_2 = 2a_1 + 3$ ①,

令 $n = 2$, 则 $2S_2 = a_3 - 2^3 + 1$, 即 $a_3 = 6a_1 + 13$ ②,

又由 $a_1, a_2 + 5, a_3$ 成等差数列, 则 $2(a_2 + 5) = a_1 + a_3$ ③,

则由①②③式, 可解得 $a_1 = 1, a_2 = 5$,

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } \begin{cases} 2S_n = a_{n+1} - 2^{n+1} + 1 \\ 2S_{n-1} = a_n - 2^n + 1 \end{cases},$$

$$\text{得到 } 2a_n = a_{n+1} - a_n - 2^n,$$

$$\text{则 } \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} + 1 = \frac{3}{2} \left(\frac{a_n}{2^n} + 1 \right), \text{ 又 } a_2 = 5, \text{ 则 } \frac{a_2}{2^2} + 1 = \frac{3}{2} \left(\frac{a_1}{2^1} + 1 \right),$$

$\therefore$ 数列 $\left\{ \frac{a_n}{2^n} + 1 \right\}$ 是以 $\frac{3}{2}$ 为首项, $\frac{3}{2}$ 为公比的等比数列,

$$\therefore \frac{a_n}{2^n} + 1 = \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1}, \text{ 解得: } a_n = 3^n - 2^n.$$

【标注】【知识点】数列的函数特性; 裂项相消法求和; 数列与不等式综合; 等比数列的判定与证明

29. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项为正数, 其前 n 项和 S_n 满足 $S_n = \left(\frac{a_n + 1}{2} \right)^2$.

求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】 (1) $a_n = 2n - 1$.

【解析】 (1) 当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = \left(\frac{a_1 + 1}{2} \right)^2$, 解得 $a_1 = 1$,

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = \left(\frac{a_n + 1}{2} \right)^2 - \left(\frac{a_{n-1} + 1}{2} \right)^2,$$

$$\text{化简得 } a_n - a_{n-1} = 2,$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是首项为1, 公差为2的等差数列,

$\therefore \{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n - 1$.

综上所述, $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n - 1$.

【标注】【知识点】数列与不等式综合; 裂项相消法求和; 利用 S_n 与 a_n 的关系求通项; 递推数列与递推方法

备注: 2018-2019学年4月天津静海县第一中学高二下学期月考第16题

30. 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 当 $n \geq 2$ 时, 满足 $(a_n - S_{n-1})^2 = S_n S_{n-1}$, 且 $a_1 = 1$.

求证: 数列 $\{S_n\}$ 是等比数列.

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) 由题意得, $(S_n - 2S_{n-1})^2 = S_n S_{n-1}$, 则 $S_n^2 - 5S_n S_{n-1} + 4S_{n-1}^2 = 0$,
 即 $(S_n - S_{n-1})(S_n - 4S_{n-1}) = 0$,
 $\therefore a_n(S_n - 4S_{n-1}) = 0$,
 因为数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 所以 $S_n - 4S_{n-1} = 0$, 即 $\frac{S_n}{S_{n-1}} = 4$,
 所以 $\{S_n\}$ 是以1为首项, 4为公比的等比数列.

【标注】 【知识点】 消去 a_n 构造 S_n 递推关系; 错位相减法求和

备注: 2018年天津河西区高三二模理科第18题13分

四、分奇偶求通项

🔗 题型总结

情形一: 当题目给的关系式中出现

$(-1)^n$ 或者 $(-1)^{n-1}$ 或者 $(-1)^{n+1}$ 或者 $\sin n\pi$ 或者 $\cos n\pi$ 或者 $\sin \frac{n\pi}{2}$ 之类的式子时, 我们需要讨论 n 的奇偶;

情形二: $a_n a_{n+1} = f(n)$ 或者 $a_n + a_{n+1} = f(n)$ 型, 我们可以得到

$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{f(n+1)}{f(n)}$ 或者 $a_{n+2} - a_n = f(n+1) - f(n)$ 这样的形式, 此时就需要讨论奇偶;

1. 典型例题

🔗 基础型

31. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} = \begin{cases} a_n + 2, & n \text{ 为奇数} \\ 2a_n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 且 $n \in \mathbf{N}^*$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.
 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】 (1) $a_n = \begin{cases} n, & n \text{ 为奇数} \\ 2^{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$.

【解析】 (1) 当 n 为奇数时, $a_{n+2} = a_n + 2$, $a_1 = 1$,
 $\therefore$ 奇数项为首项是1, 公差为1的等差数列,
 $\therefore a_n = n$,
 当 n 为偶数时, $a_{n+2} = 2a_n$, $a_2 = 2$,
 $\therefore$ 偶数项为等比数列,
 $\therefore a_n = 2 \cdot 2^{\frac{n}{2}-1} = 2^{\frac{n}{2}}$,

$$\therefore a_n = \begin{cases} n, & n \text{ 为奇数} \\ 2^{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}.$$

故答案为： $a_n = \begin{cases} n, & n \text{ 为奇数} \\ 2^{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}.$

【标注】【知识点】分段数列问题；错位相减法求和

情形一

32. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 = 1$ ， $a_2 = \frac{1}{2}$ ，且 $[3 + (-1)^n]a_{n+2} - 2a_n + 2[(-1)^n - 1] = 0$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ 。
求 a_3 ， a_4 ， a_5 ， a_6 的值及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

【答案】 (1) $a_3 = 3$ ， $a_4 = \frac{1}{4}$ ， $a_5 = 5$ ， $a_6 = \frac{1}{8}$ ， $a_n = \begin{cases} n, & n = 2k - 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}, & n = 2k \end{cases}.$

【解析】 (1) 由题意得：

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, \text{ 且 } [3 + (-1)^n]a_{n+2} - 2a_n + 2[(-1)^n - 1] = 0,$$

令 $n = 1$ ，得：

$$2a_3 - 2a_1 - 4 = 0, a_3 = 3,$$

令 $n = 2$ ，得：

$$4a_4 - 2a_2 = 0, a_4 = \frac{1}{4},$$

令 $n = 3$ ，得：

$$2a_5 - 2a_3 - 4 = 0, a_5 = 5,$$

令 $n = 4$ ，得：

$$4a_6 - 2a_4 = 0, a_6 = \frac{1}{8},$$

当 n 为奇数，即 $n = 2k - 1 (k \in \mathbf{N}^*)$ 时，有：

$$2a_{n+2} - 2a_n = 4,$$

即 $a_{n+2} - a_n = 2$ ，即相邻两个奇数项差恒为2，

设奇数项为 a_{2k-1} ，又因为 $a_1 = 1$ ，

$$\therefore a_{2k-1} = a_1 + (k-1) \times 2 = 2k - 1,$$

即 $a_n = n$ 。

当 n 为偶数，即 $n = 2k (k \in \mathbf{N}^*)$ 时，有：

$$4a_{n+2} = 2a_n, \text{ 即 } a_{n+2} = \frac{1}{2}a_n,$$

设偶数项为 a_{2k} ，且 $a_2 = \frac{1}{2}$ ，

$$a_{2k} = a_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

$$\text{即 } a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}},$$

$$\therefore \text{数列}\{a_n\}\text{的通项公式为: } a_n = \begin{cases} n, & n = 2k - 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}, & n = 2k \end{cases}.$$

【标注】【知识点】错位相减法求和

备注：2020年天津和平区高三三模第18题15分

情形二

33. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$ ，当 $n \geq 2$ 时， $a_{n-1} + a_n = 4n$ 。

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

【答案】(1) $a_n = 2n + 1$ 。

【解析】(1) 因为 $a_{n-1} + a_n = 4n$ ，

则 $a_1 + a_2 = 8$ ，又 $a_1 = 3$ ，则 $a_2 = 5$ ，

所以等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d = a_2 - a_1 = 2$ ，

又因为 $a_1 = 3$ ，所以 $a_n = 2n + 1$ 。

【标注】【知识点】等差数列求通项问题；利用 S_n 与 a_n 的关系求通项；错位相减法求和

2. 巩固练习

34. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1 = 1$ ， $a_2 = 3$ ，且 $a_{n+2} = (-1)^n(a_n - 1) + 2a_n + 1$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ 。

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

【答案】(1) $a_n = \begin{cases} 3^{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶数} \\ n, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$ 。

【解析】(1) ①当 n 为偶数时， $a_{n+2} = 3a_n$ 。

$$\text{即 } q^2 = 3.$$

$$q = 3^{\frac{1}{2}}.$$

$$a_n = a_2 \cdot q^{n-2} = 3^{\frac{n}{2}}.$$

②当 n 为奇数时， $a_{n+2} = a_n + 2$ 。

$$\text{即 } 2d = 2.$$

$$d = 1.$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = n.$$

$$\text{综上: } a_n = \begin{cases} 3^{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶数} \\ n, & n \text{ 为奇数} \end{cases}.$$

【标注】【知识点】数列与不等式其他问题；错位相减法求和

备注：2020年天津滨海新区大港第一中学高三下学期高考模拟（3月）第18题