

数列求和

一、倒序相加法

🔗 模型总结

如果一个数列 $\{a_n\}$ ，与首末两端等“距离”的两项的和相等或等于同一常数，那么求这个数列的前 n 项和即可用倒序相加法，如等差数列的前 n 项和即是用此法推导的。

🔗 计算过程

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots = a_k + a_{n+1-k} = \cdots = t$ (t 为常数)，下面我们利用倒序相加法求其前 n 项和：

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n,$$

将 S_n 各项倒序重新排列，得：

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1,$$

将上面两式相加得到：

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = nt$$

进而得：

$$S_n = \frac{nt}{2}.$$

1. 典型例题

1. 已知 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ ，则 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(k) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{k}\right) =$
_____.

【答案】 $k - \frac{1}{2}$

【解析】 易证 $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ ，

故

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(k) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{k}\right) = f(1) + k - 1 = k - \frac{1}{2}.$$

【标注】 【方法】分组求和法

【知识点】 分组法求和

【素养】数学运算

【素养】逻辑推理

【思想】转化化归思想

2. 巩固练习

2. 已知 $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$, 求 $f\left(\frac{1}{1001}\right) + f\left(\frac{2}{1001}\right) + \cdots + f\left(\frac{1000}{1001}\right)$.

【答案】500.

【解析】 $\because f\left(\frac{k}{1001}\right) + f\left(\frac{1001-k}{1001}\right) = \frac{4^{\frac{k}{1001}}}{4^{\frac{k}{1001}} + 2} + \frac{4^{\frac{1001-k}{1001}}}{4^{\frac{1001-k}{1001}} + 2} = \frac{4^{\frac{k}{1001}}}{4^{\frac{k}{1001}} + 2} + \frac{4}{4 + 2 \cdot 4^{\frac{k}{1001}}} = 1$

$$\begin{aligned} & \text{故 } f\left(\frac{1}{1001}\right) + f\left(\frac{2}{1001}\right) + \cdots + f\left(\frac{1000}{1001}\right) \\ &= \left[f\left(\frac{1}{1001}\right) + f\left(\frac{1000}{1001}\right) \right] + \left[f\left(\frac{2}{1001}\right) + f\left(\frac{999}{1001}\right) \right] + \cdots + \left[f\left(\frac{500}{1001}\right) + f\left(\frac{501}{1001}\right) \right] = 500 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】倒序相加法求和

二、错位相减法

模型总结

如果一个数列的各项是由一个等差数列和一个等比数列的对应项之积构成的, 那么这个数列的前 n 项和即可用此法来求, 如等比数列的前 n 项和就是用此法推导的.

计算过程

$$\text{记 } S = \sum_{i=1}^n nq^n = q + 2q^2 + 3q^3 + \cdots + nq^n,$$

【步骤一】: 乘公比

将上式两边同时乘以等比数列的公比 q , 得到:

$$qS = q^2 + 2q^3 + 3q^4 \cdots + nq^{n+1}.$$

【步骤二】: 错位

比较两式中的元素 $q^k (k \in \mathbf{N}^*)$, 将其幂指数对齐, 得到:

$$\begin{aligned} S &= q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + \cdots + nq^n \\ qS &= q^2 + 2q^3 + 3q^4 \cdots (n-1)q^n + nq^{n+1} \end{aligned}$$

【步骤三】：相减

将调整后的两式相减得到：

$$(q-1)S_n = nq^{n+1} - q - q^2 - q^3 - \cdots - q^n = nq^{n+1} - (q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n),$$

括号内的部分是等比数列的前 n 项和，进一步计算得到：

$$S_n = \frac{nq^{n+1}}{q-1} - \frac{q^{n+1}-q}{(q-1)^2}, \text{ 将其代入(*) 就可以得到结果.}$$

1. 典型例题

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_{n+1} = S_n + \frac{n+1}{3n} \cdot a_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ，且 $a_1 = 1$ 。

(1) 证明：数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是等比数列。

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 。

【答案】(1) 证明见解析。

$$(2) S_n = \frac{9}{4} - \left(\frac{9}{4} + \frac{3n}{2}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

【解析】(1) 根据题意可得， $S_{n+1} - S_n = \frac{n+1}{3n} \cdot a_n$ ，

$$\therefore a_{n+1} = \frac{n+1}{3n} \cdot a_n,$$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a_n}{n},$$

$$\therefore a_1 = 1,$$

$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是以1为首项，以 $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列。

(2) 由(1)可得 $\frac{a_n}{n} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ，

$$\therefore a_n = n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1},$$

$$\therefore S_n = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1},$$

$$\therefore \frac{1}{3} S_n = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n,$$

$\therefore$

$$\frac{2}{3} S_n = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} - n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2} + n\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n,$$

$$\therefore S_n = \frac{9}{4} - \left(\frac{9}{4} + \frac{3n}{2}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

【标注】【知识点】错位相减法求和

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n + \frac{n+1}{2^n}n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 设 $b_n = \frac{a_n}{n}$ ，求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式 .

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

【答案】 (1) $a_n = 2n - \frac{n}{2^{n-1}}$.

(2) $S_n = n(n+1) - 4 + \frac{n+2}{2^{n-1}}$.

【解析】 (1) 由 $a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n + \frac{n+1}{2^n}$ 可得： $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{1}{2^n}$ ，

$$\therefore b_n = \frac{a_n}{n},$$

$$\therefore b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2^n}, \text{ 由 } a_1 = 1, \text{ 得 } b_1 = 1,$$

累加法，得：

$$(b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \cdots + (b_n - b_{n-1})$$

$$= \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} \times \frac{1}{2},$$

$$\text{化简并代入 } b_1 = 1, \text{ 得 } b_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}},$$

$$\therefore \frac{a_n}{n} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}, \text{ 即 } a_n = 2n - \frac{n}{2^{n-1}}.$$

(2) 由(1)可知 $a_n = 2n - \frac{n}{2^{n-1}}$ ，设数列 $\left\{\frac{n}{2^{n-1}}\right\}$ 的前 n 项和 T_n ，

$$\text{则 } T_n = \frac{1}{2^0} + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}} \text{ ①},$$

$$\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} \text{ ②},$$

①-②可得：

$$\frac{1}{2}T_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^n}$$

$$= 2 - \frac{n+2}{2^n},$$

$$\text{则 } T_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}},$$

$$\text{前 } n \text{ 项和 } S_n = n(n+1) - 4 + \frac{n+2}{2^{n-1}}.$$

【标注】【知识点】错位相减法求和；利用累加法求数列通项公式问题

备注：2019-2020学年天津和平区天津市第一中学高二上学期期中第18题

5. 若正项等比数列 $\{a_n\}$, 已知 $a_1 = 4$, 且 $a_5^2 = 16a_2a_6$, 则 $\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{2}{\sqrt{a_2}} + \frac{3}{\sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{a_n}} =$
_____.

【答案】 $2 - \frac{n+2}{2^n}$

【解析】 设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $q > 0$,

$$\text{由 } a_1 = 4 \text{ 且 } a_5^2 = 16a_2 \cdot a_6,$$

$$\therefore (4q^4)^2 = 16(4q) \cdot (4q^5),$$

$$\text{解得 } q = 4, q = -4 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore a_n = 4^n,$$

$$\therefore \sqrt{a_n} = 2^n,$$

$$\therefore \frac{n}{\sqrt{a_n}} = \frac{n}{2^n} = n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

$\therefore$

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{2}{\sqrt{a_2}} + \frac{3}{\sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{a_n}} = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

,

$$\text{设 } S_n = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$\therefore \frac{1}{2}S_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots + (n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$

$\therefore$

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n - n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} - n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1 - \left(1 + \frac{n}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

,

$$\therefore S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

$$\text{故答案为: } 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

【标注】【知识点】错位相减法求和；等比数列的性质及应用；等比数列的概念与通项公式

2018-2019学年12月天津静海县静海第一中学高二上学期月考第12题3分

2. 巩固练习

6. 已知 $\{a_n\}$ 为正项等比数列, $a_1 = 1$, $a_5 = 256$; S_n 为等差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, $b_1 = 2$, $5S_5 = 2S_8$

.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $T_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$, 求 T_n .

【答案】(1) $a_n = 4^{n-1}$; $b_n = 3n - 1$.

$$(2) \left(n - \frac{2}{3}\right) \cdot 4^n + \frac{2}{3}.$$

【解析】(1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由 $a_5 = a_1q^4$, 得 $q = 4$,

$$\text{所以 } a_n = 4^{n-1}.$$

$$\text{设 } \{b_n\} \text{ 的公差为 } d, \text{ 由 } 5S_5 = 2S_8 \text{ 得 } d = \frac{3}{2}a_1 = \frac{3}{2} \times 2 = 3,$$

$$\text{所以 } b_n = b_1(n-1)d = 3n - 1.$$

$$(2) T_n = 1 \times 2 + 4 \times 5 + 4 \times 8 \cdots + 4^{n-1}(3n-1) \text{ ①},$$

$$4T_n = 4 \times 2 + 4^2 \times 5 + \cdots + 4^n(3n-1) \text{ ②},$$

$$\text{②}-\text{①} \text{ 得: } 3T_n = -2 - 3(4 + 4^2 + \cdots + 4^{n-1}) + 4^n(3n-1) = 2 + (3n-2) \cdot 4^n$$

$$\text{所以 } T_n = \left(n - \frac{2}{3}\right) \cdot 4^n + \frac{2}{3}.$$

【标注】【方法】错位相减法

【知识点】错位相减法求和；等差数列求通项问题；等比数列求通项问题

备注：2019-2020学年天津和平区天津市耀华中学高二上学期期中第19题9分

7. 若数列 $1, \frac{3}{2^2}, \frac{4}{2^3}, \frac{5}{2^4}, \frac{6}{2^5}, \cdots, \frac{n+1}{2^n}, \cdots$ 的前 n 项之和为 S_n , 则 S_n 的值等于 ().

A. $3 - \frac{n}{2^n}$

B. $3 - \frac{n+1}{2^{n-1}}$

C. $3 - \frac{n+3}{2^n}$

D. $3 - \frac{n+4}{2^n}$

【答案】C

【解析】设 $a_n = n + 1$, $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$,

$$\text{则 } S_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n,$$

$$\text{即 } S_n = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \cdots + \frac{n+1}{2^n} \text{ ①},$$

$$\text{故 } \frac{1}{2}S_n = \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \text{ ②},$$

由①-②得

$$\frac{1}{2}S_n = 1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) - \frac{n+1}{2^{n+1}},$$

$$\therefore \frac{1}{2}S_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}},$$

$$\therefore S_n = 3 - \frac{2}{2^n} - \frac{n+1}{2^n},$$

$$\therefore S_n = 3 - \frac{n+3}{2^n},$$

故选C.

【标注】【知识点】错位相减法求和

【素养】数学运算

备注：2019-2020学年10月天津南开区天津市南开中学高二上学期周测D卷第6题

三、裂项相消法

模型总结

把数列的通项拆成两项之差，在求和时中间的一些项可以相互抵消，从而求得其和。

常见的拆项公式有：

$$\begin{aligned}\frac{1}{n(n+1)} &= \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}; \\ \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right); \\ \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]; \\ \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n}; \\ n \cdot n! &= (n+1)! - n!; \\ \frac{n}{(n+1)!} &= \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

1. 典型例题

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 - \frac{1}{4a_n}$, 其中 $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 设 $b_n = \frac{2}{2a_n - 1}$, 求证：数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，并求出 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n .

(2) 设 $C_n = \frac{4a_n}{n+1}$, 数列 $\{C_n C_{n+2}\}$ 的前 n 项和为 T_n , 是否存在正整数 m , 使得 $T_n < \frac{1}{C_m C_{m+1}}$ 对于 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立，若存在，求出 m 的最小值，若不存在，请说明理由.

【答案】(1) 证明见解析； $a_n = \frac{n+1}{2n}$.

(2) 存在，最小值为3.

【解析】(1) $\because b_{n+1} - b_n = \frac{2}{2a_{n+1} - 1} - \frac{2}{2a_n - 1}$

$$= \frac{2}{2\left(1 - \frac{1}{4a_n}\right) - 1} - \frac{2}{2a_n - 1}$$

$$= \frac{4a_n}{2a_n - 1} - \frac{2}{2a_n - 1} = 2,$$

∴ 数列 $\{b_n\}$ 是公差为 2 的等差数列,

$$\text{又 } b_1 = \frac{2}{2a_1 - 1} = 2,$$

$$\therefore b_n = 2 + (n-1) \times 2 = 2n.$$

$$\therefore 2n = \frac{2}{2a_n - 1}, \text{ 解得 } a_n = \frac{n+1}{2n}.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可得 } c_n = \frac{4 \times \frac{n+1}{2n}}{n+1} = \frac{2}{n},$$

$$\therefore c_n c_{n+2} = \frac{2}{n} \times \frac{2}{n+2} = 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right),$$

∴ 数列 $\{c_n c_{n+2}\}$ 的前 n 项和为

$$\begin{aligned} T_n &= 2 \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right] \\ &= 2 \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) < 3. \end{aligned}$$

要使得 $T_n < \frac{1}{C_m C_{m+1}}$ 对于 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立,

$$\text{只要 } 3 \leq \frac{1}{C_m C_{m+1}}, \text{ 即 } \frac{m(m+1)}{4} \geq 3,$$

$$\text{解得 } m \geq 3 \text{ 或 } m \leq -4,$$

而 $m > 0$, 故最小值为 3.

【标注】【知识点】数列与不等式综合；数列的函数特性；裂项相消法求和

备注：2018-2019 学年天津高二上学期期末六校联考第 18 题 13 分

9. 已知 $a_n = \frac{(n+1)^2 + 1}{(n+1)^2 - 1}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

【答案】 $S_n = n + \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$

【解析】 $a_n = \frac{(n+1)^2 + 1}{(n+1)^2 - 1} = 1 + \frac{2}{(n+1)^2 - 1} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$; 求和即得.

【标注】【素养】数学运算

【素养】逻辑推理

【知识点】裂项相消法求和

【思想】转化化归思想

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} - a_n = 4n + 3$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 且 $a_1 = 3$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 若 $b_n = (-1)^n \frac{4n(n+1)^2}{a_n a_{n+1}} (n \in \mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n} .

【答案】(1) $a_n = 2n^2 + n (n \in \mathbf{N}^*)$.

$$(2) \frac{-4n}{12n+9}.$$

【解析】(1) $\because a_{n+1} - a_n = 4n + 3 (n \in \mathbf{N}^*)$,

$$\therefore a_n - a_{n-1} = 4(n-1) + 3 = 4n - 1,$$

$$\text{且 } a_1 = 3,$$

$$a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1$$

$$= (4n-1) + (4n-5) + \cdots + (4 \times 2 - 1) + 3$$

$$= \frac{n(3+4n-1)}{2}$$

$$= 2n^2 + n,$$

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为: $a_n = 2n^2 + n (n \in \mathbf{N}^*)$.

$$(2) \because b_n = (-1)^n \frac{4n(n+1)^2}{a_n a_{n+1}},$$

由(1)得,

$$a_n = 2n^2 + n, \text{ 则}$$

$$b_n = (-1)^n \cdot \frac{4n(n+1)^2}{(2n^2+n)[2(n+1)^2+n+1]}$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{4n(n+1)^2}{n \cdot (2n+1) \cdot (n+1)(2n+3)}$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{4(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} \right),$$

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和,

$$S_{2n} = -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1}\right) + \left(\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3}\right)$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{7} - \cdots - \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3}$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{4n+3}$$

$$= \frac{-4n}{12n+9},$$

故数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和为 $\frac{-4n}{12n+9}$.

【标注】【知识点】裂项相消法求和; 利用累加法求数列通项公式问题; 等差数列的前 n 项和

备注: 2019-2020 学年天津高二上学期期中六校联考第 17 题 13 分

11. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$, 则该数列的前 8 项之和等于 ____.

【答案】 2

【解析】 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,

则该数列的前8项之和为:

$$\begin{aligned} S_8 &= \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + 2 - \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{9} - \sqrt{8} \\ &= -1 + \sqrt{9} \\ &= 2. \end{aligned}$$

故答案为: 2.

【标注】 【知识点】 裂项相消法求和

备注: 2019-2020学年10月天津和平区天津市第二南开中学高二上学期月考第14题6分

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \lambda S_n + 1 (n \in \mathbf{N}^*, \lambda > 0)$, 且 $a_1, a_2 + 2, a_3 + 3$ 成等差数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \frac{a_{n+1}}{(1+a_n)(1+a_{n+1})}$, R_n 是数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和, 若对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 均有 $R_n < \lambda$ 恒成立, 求 λ 的最小值.

【答案】 (1) $a_n = 2^{n-1}$.

(2) 1.

【解析】 (1) $a_{n+1} = \lambda S_n + 1$ ①,

$$a_n = \lambda S_{n-1} + 1$$
 ②,

$$\text{故 } a_{n+1} = (1 + \lambda)a_n,$$

故 $\{a_n\}$ 为以 a_1 为首项 $(1 + \lambda)$ 为公比的等比数列,

$$a_n = a_1(1 + \lambda)^{n-1} = (1 + \lambda)^{n-1},$$

$$\text{又 } 2(a_2 + 2) = a_1 + a_3 + 3$$

$$2(1 + \lambda + 2) = 1 + (1 + \lambda)^2 + 3,$$

$$\therefore \lambda = 1 \text{ 或 } (-1) \text{ (舍)},$$

$$\text{故 } a_n = (1 + \lambda)^{n-1} = 2^{n-1}.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad c_n &= \frac{2^n}{(1 + 2^{n-1})(1 + 2^n)} \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{1 + 2^{n-1}} - \frac{1}{2^n + 1} \right), \\ R_n &= C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left[\frac{1}{1+2^0} - \frac{1}{1+2^1} + \frac{1}{1+2^1} - \frac{1}{1+2^2} + \cdots \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{1+2^{n-1}} - \frac{1}{1+2^n} \right] \\
&= 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+2^n} \right), \\
R_n &= 1 - \frac{2}{1+2^n} < \lambda \text{ 恒成立,} \\
R_n &\text{ 无限趋于 } 1, \\
\text{故 } \lambda &\geq 1, \lambda \text{ 最小值为 } 1.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】等差数列的判定与证明问题；数列的函数特性；利用 S_n 与 a_n 的关系求通项；裂项相消法求和；错位相减法求和

备注：2018-2019学年天津河西区天津市实验中学高二上学期中第19题12分

13. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_n = 2a_n - 2$ ．数列 $\{b_n\}$ 满足： $b_{n+1} = b_n + 1$ ，且 $b_2 = 2$ ．其中 $n \in \mathbf{N}^*$ ．
- (1) 求 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式．
- (2) 记数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \frac{b_{n+2}}{a_{n+1} \cdot b_n \cdot b_{n+1}} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，证明： $c_1 + c_2 + \cdots + c_n < \frac{1}{2}$ ．

【答案】(1) $a_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$ ， $b_n = n (n \in \mathbf{N}^*)$ ．

(2) 证明见解析．

【解析】(1) 由 $S_n = 2a_n - 2 (n \in \mathbf{N}^*)$ ①，

可得 $S_{n+1} = 2a_{n+1} - 2$ ②，

②-①得 $a_{n+1} = 2a_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ，

所以数列 $\{a_n\}$ 是公比为2的等比数列，式中令 $n = 1$ ，可得 $a_1 = 2$ ，

所以 $a_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$ ，

由 $b_{n+1} - b_n = 1$ 易知数列 $\{b_n\}$ 是公差为1的等差数列，

又 $b_2 = b_1 + 1 = 2$ ，

所以 $b_1 = 1$ ，

所以 $b_n = n (n \in \mathbf{N}^*)$ ．

$$\begin{aligned}
(2) \quad c_n &= \frac{b_{n+2}}{a_{n+1} \cdot b_n \cdot b_{n+1}} = \frac{n+2}{n(n+1)2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{n2^n} - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} (n \in \mathbf{N}^*),
\end{aligned}$$

所以 $c_1 + c_2 + \cdots + c_n$

$$= \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 2^2} \right) + \left(\frac{1}{2 \times 2^2} - \frac{1}{3 \times 2^3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n2^n} - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \right)$$

【标注】【知识点】等差数列求通项问题；利用 S_n 与 a_n 的关系求通项；裂项相消法求和

2. 巩固练习

- 【答案】 B

故选B.

【标注】 **【知识点】** 等差数列求和问题；裂项相消法求和

15. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $2S_n = 2^{n+1} + m(m \in \mathbf{R})$.

- (2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{1}{(2n+1)\log_2(a_n \cdot a_{n+1})}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

$$(2) T_n = \frac{n}{2n+1}.$$

②-①得, $2a_{n+1} = 2^{n+2} - 2^{n+1} = 2 \times 2^{n+1} - 2^{n+1} = 2^{n+1}$,

所以 $a_{n+1} = 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$,

则 $a_n = 2^{n-1} (n \geq 2)$,

所以 $a_2 = 2, a_3 = 4$,

又 $a_2^2 = a_1 \cdot a_3$,

所以 $a_1 = 1$,

又 $a_1 = 1$ 同样符合上式,

所以 $a_n = 2^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$

方法二: 由 $2S_n = 2^{n+1} + m (m \in \mathbf{R})$ 得 $\begin{cases} S_1 = 2 + m \\ S_2 = 4 + m \\ S_3 = 8 + m (m \in \mathbf{R}) \end{cases}$,

从而有 $a_2 = S_2 - S_1 = 2, a_3 = S_3 - S_2 = 4$,

所以等比数列公比 $q = \frac{a_3}{a_2} = 2$, 首项 $a_1 = 1$, 因此通项公式为 $a_n = 2^{n-1}$.

(2) 由(1)可得 $\log_2(a_n \cdot a_{n+1}) = \log_2(2^{n-1} \cdot 2^n) = 2n - 1$,

$$\therefore b_n = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$\therefore T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= \frac{n}{2n+1}.$$

【标注】【知识点】等比数列求通项问题;裂项相消法求和

备注:2019-2020学年天津和平区天津市耀华中学高二上学期期末第18题11分

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 对任意的正整数 n , 都有 $2S_n = 3a_n + n - 2$ 成立.

(1) 求证: 数列 $\left\{a_n - \frac{1}{2}\right\}$ 为等比数列.

(2) 记 $b_n = \frac{3^{n-1}}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【答案】(1) 证明见解析.

$$(2) T_n = 1 - \frac{2}{3^n + 1}.$$

【解析】(1) 当 $n = 1$ 时, $2S_1 = 3a_1 - 1$,

$$\therefore a_1 = 1,$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } 2S_n - 2S_{n-1} = 3a_n + n - 2 - 3a_{n-1} - n + 1 + 2,$$

$$\therefore a_n = 3a_{n-1} - 1,$$

$$\therefore a_n - \frac{1}{2} = 3\left(a_{n-1} - \frac{1}{2}\right), \text{ 又 } a_1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

$$\begin{aligned}
 & \therefore \frac{a_n - \frac{1}{2}}{a_{n-1} - \frac{1}{2}} = 3, \\
 & \therefore \text{数列} \left\{ a_n - \frac{1}{2} \right\} \text{为等比数列.} \\
 (2) & \text{由(1)知: } a_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 3^{n-1}, \\
 & \therefore a_n = \frac{3^{n-1} + 1}{2}, \\
 & \therefore b_n = \frac{3^{n-1} + 1}{3^{n-1} + 1} \times \frac{2}{3^n + 1} = 2 \times \left(\frac{1}{3^{n-1} + 1} - \frac{1}{3^n + 1} \right), \\
 & \therefore T_n = 2 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1} + 1} - \frac{1}{3^n + 1} \right) \\
 & = 2 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3^n + 1} \right) \\
 & = 1 - \frac{2}{3^n + 1}, \\
 & \text{综上, } T_n = 1 - \frac{2}{3^n + 1}.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】等比数列的判定与证明；递推数列与递推方法；裂项相消法求和；利用 S_n 与 a_n 的关系求通项

备注：2018-2019学年3月天津静海县第一中学高二下学期月考第16题10分

四、分组求和

题型总结

情形一：有一类数列，既不是等差数列，也不是等比数列，若将这类数列适当拆开，可分为几个等差、等比或常见的数列，即先分别求和，然后再合并，形如：

$\{a_n + b_n\}$ ，其中 $\{a_n\}$ 是等差数列， $\{b_n\}$ 是等比数列

情形二： $(-1)^n(4n-1)$ 或者 $(-1)^n(2n-1)^2$ 之类的

情形三： $a_n = \begin{cases} b_n; n = 2k \\ c_n; n = 2k-1 \end{cases}$

1. 典型例题

考察情形一

17. 数列 $1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}, 5\frac{1}{8}, 7\frac{1}{16}, \dots$ ，前 n 项和为（ ）.

A. $n^2 - \frac{1}{2^n} + 1$

B.

$$n^2 - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}$$

C. $n^2 - n - \frac{1}{2^n} + 1$

D. $n^2 - n - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}$

【答案】A

【解析】利用分组求和法： $S_n = [1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1)] + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$
 $= n^2 + 1 - \frac{1}{2^n}$

【标注】【知识点】分组法求和

备注：2019-2020学年9月天津南开区天津大学附属中学高二上学期月考第10题3分

考察情形二

18. 已知 $a_n = (-1)^n n^2$ ，求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 。

【答案】 $S_n = \begin{cases} \frac{(1+n)}{2}n, n \text{ 偶数} \\ \frac{n(n-1)}{2} - n^2, n \text{ 为奇数} \end{cases}$

【解析】 n 为偶数时，

$$S_n = -1^2 + 2^2 - \cdots - (n-1)^2 + n^2 = (2+1)(2-1) + \cdots + (n+n-1)(n-(n-1))$$

$$\text{所以 } S_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{(1+n)}{2}n.$$

$$n \text{ 为奇数时，同理可得 } S_n = \frac{n(n-1)}{2} - n^2.$$

$$\text{综上， } S_n = \begin{cases} \frac{(1+n)}{2}n, n \text{ 偶数} \\ \frac{n(n-1)}{2} - n^2, n \text{ 为奇数} \end{cases}.$$

【标注】【素养】数学运算

考察情形三

19. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，公比 $q > 0$ ， $S_2 = 2a_2 - 2$ ， $S_3 = a_4 - 2$ ，数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_2 = 4b_1, nb_{n+1} - (n+1)b_n = n^2 + n, (n \in \mathbf{N}^*).$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(2) 证明数列 $\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$ 为等差数列。

(3)

设数列 $\{c_n\}$ 的通项公式为： $C_n = \begin{cases} -\frac{a_nb_n}{2}, n \text{ 为奇数} \\ \frac{a_nb_n}{4}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ，其前 n 项和为 T_n ，求 T_{2n} 。

【答案】 (1) $a_n = 2^n$ 。

(2) 证明见解析。

(3) $T_{2n} = \frac{7}{9} + \frac{12n-7}{9} \cdot 4^n$ 。

【解析】 (1) 由于等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，

$$\text{公比 } q > 0, S_2 = 2a_2 - 2, S_3 = a_4 - 2,$$

$$\text{所以 } S_3 - S_2 = a_4 - 2a_2 = a_3,$$

$$\text{整理得 } a_2q^2 - 2a_2 = a_2q,$$

$$\text{由于 } a_2 \neq 0,$$

$$\text{所以 } q^2 - q - 2 = 0, \text{ 由于 } q > 0,$$

$$\text{解得 } q = 2.$$

$$\text{由于 } a_1 + a_2 = 2a_2 - 2, \text{ 解得 } a_1 = 2,$$

$$\text{所以 } a_n = 2^n.$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 = 4b_1$ ，解得 $b_1 = 1$ ，

$$\text{由于 } nb_{n+1} - (n+1)b_n = n^2 + n,$$

$$\text{所以 } \frac{b_{n+1}}{n+1} - \frac{b_n}{n} = 1 \text{ (常数)},$$

所以数列 $\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$ 是以1为首项1为公差的等差数列。

(3) 由于数列 $\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$ 是以1为首项1为公差的等差数列，

$$\text{所以 } \frac{b_n}{n} = 1 + (n-1) = n,$$

$$\text{解得 } b_n = n^2.$$

$$\text{由于数列}\{c_n\}\text{的通项公式为: } C_n = \begin{cases} -\frac{a_nb_n}{2}, n \text{ 为奇数} \\ \frac{a_nb_n}{4}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

$$\text{所以令 } p_n = c_{2n-1} + c_{2n} = -\frac{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}}{2} + \frac{(2n)^2 \cdot 2^{2n}}{4}$$

$$= (4n-1) \cdot 4^{n-1},$$

$$\text{所以 } T_{2n} = 3 \cdot 4^0 + 7 \cdot 4^1 + 11 \cdot 4^2 + \cdots + (4n-1) \cdot 4^{n-1}, \text{ ①}$$

$$4T_{2n} = 3 \cdot 4^1 + 7 \cdot 4^2 + 11 \cdot 4^3 + \cdots + (4n-1) \cdot 4^n, \text{ ②}$$

$$\text{①}-\text{②得: } -3T_{2n} = 3 \cdot 4^0 + 4 \cdot 4^1 + \cdots + 4 \cdot 4^{n-1} - (4n-1) \cdot 4^n,$$

$$\text{整理得: } -3T_{2n} = 3 + 4 \cdot \frac{4^n - 1}{4 - 1} - (4n-1) \cdot 4^n,$$

$$\text{故 } T_{2n} = \frac{7}{9} + \frac{12n-7}{9} \cdot 4^n.$$

【标注】【知识点】等比数列求通项问题；错位相减法求和；等差数列的判定与证明问题

备注：2019-2020学年天津东丽区一百中学高二上学期期中第19题14分

2. 巩固练习

20. 数列 $1 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{4}, 3 + \frac{1}{8}, \dots, n + \frac{1}{2^n}$ 的前 n 项和是 _____ .

【答案】 $\frac{n(n+1)}{2} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

【解析】
$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{4} + \dots + n + \frac{1}{2^n} \\ &= (1 + 2 + \dots + n) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{\frac{1}{2}[1 - (\frac{1}{2})^n]}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, \\ \text{故答案为: } &\frac{n(n+1)}{2} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】等差数列的前 n 项和；分组法求和；等比数列前 n 项和公式

备注：2019-2020学年10月天津津南区天津市咸水沽一中高二上学期月考12题4分

21. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，满足 $a_3 = 7, S_6 = 48$. T_n 是等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，满足

$$2T_n = 3b_n - 3 (n \in \mathbf{N}^*).$$

(1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 若 $c_n = \begin{cases} \frac{2}{S_n}, & n \text{ 为奇数} \\ b_n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ，设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 R_n ，求 R_{2n} .

【答案】 (1) $a_n = 2n + 1, b_n = 3^n$

$$(2) R_{2n} = \frac{2n}{2n+1} + \frac{9}{8}(9^n - 1).$$

【解析】 (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\because a_3 = 7, S_6 = 48,$$

$$\therefore a_1 + 2d = 7, 6a_1 + \frac{6 \times 5}{2} \times d = 48,$$

$$\text{解得 } a_1 = 3, d = 2,$$

$$\therefore a_n = 3 + 2(n-1) = 2n + 1.$$

$$\because 2T_n = 3b_n - 3 (n \in \mathbf{N}^*),$$

$n \geq 2$ 时,

$$2b_n = 2(T_n - T_{n-1}) = 3b_n - 3 - (3b_{n-1} - 3),$$

化为: $b_n = 3b_{n-1}$,

$n = 1$ 时, $2b_1 = 3b_1 - 3$, 解得 $b_1 = 3$,

$\therefore \{b_n\}$ 是等比数列, 可得: $b_n = 3^n$.

(2) 由(1)可得:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(3 + 2n + 1)}{2} = n(n + 2),$$

$$\therefore c_n = \begin{cases} \frac{2^2}{S_n}, n \text{ 为奇数} \\ b_n, n \text{ 为偶数} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}, n \text{ 为奇数} \\ 3^n, n \text{ 为偶数} \end{cases},$$

$$\therefore R_{2n} = (c_1 + c_3 + \cdots + c_{2n-1}) + (c_2 + c_4 + \cdots + c_{2n})$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{2}{2n+1}\right) + (3^2 + 3^4 + \cdots + 3^{2n})$$

$$= 1 - \frac{1}{2n+1} + \frac{9(1-9^n)}{1-9}$$

$$= \frac{2n}{2n+1} + \frac{9}{8}(9^n - 1).$$

【标注】【知识点】并项求和;裂项相消法求和;利用 S_n 与 a_n 的关系求通项;等差数列求通项问题

备注: 2019-2020学年天津南开区天津市南开中学高二上学期期末第17题10分