

数列求和

一、倒序相加法

🔗 模型总结

如果一个数列 $\{a_n\}$ ，与首末两端等“距离”的两项的和相等或等于同一常数，那么求这个数列的前 n 项和即可用倒序相加法，如等差数列的前 n 项和即是用此法推导的。

🔗 计算过程

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots = a_k + a_{n+1-k} = \cdots = t$ (t 为常数)，下面我们利用倒序相加法求其前 n 项和：

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n,$$

将 S_n 各项倒序重新排列，得：

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1,$$

将上面两式相加得到：

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = nt$$

进而得：

$$S_n = \frac{nt}{2}.$$

1. 典型例题

1. 已知 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ ，则 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(k) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{k}\right) =$
_____.

2. 巩固练习

2. 已知 $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$ ，求 $f\left(\frac{1}{1001}\right) + f\left(\frac{2}{1001}\right) + \cdots + f\left(\frac{1000}{1001}\right)$.

二、错位相减法

🔗 模型总结

如果一个数列的各项是由一个等差数列和一个等比数列的对应项之积构成的，那么这个数列的前 n 项和

即可用此法来求，如等比数列的前 n 项和就是用此法推导的。

计算过程

$$\text{记 } S = \sum_{i=1}^n nq^n = q + 2q^2 + 3q^3 + \cdots + nq^n,$$

【步骤一】：乘公比

将上式两边同时乘以等比数列的公比 q ，得到：

$$qS = q^2 + 2q^3 + 3q^4 \cdots + nq^{n+1}.$$

【步骤二】：错位

比较两式中的元素 $q^k (k \in \mathbf{N}^*)$ ，将其幂指数对齐，得到：

$$\begin{aligned} S &= q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + \cdots + nq^n \\ qS &= q^2 + 2q^3 + 3q^4 \cdots (n-1)q^n + nq^{n+1}. \end{aligned}$$

【步骤三】：相减

将调整后的两式相减得到：

$$(q-1)S_n = nq^{n+1} - q - q^2 - q^3 - \cdots - q^n = nq^{n+1} - (q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n),$$

括号内的部分是等比数列的前 n 项和，进一步计算得到：

$$S_n = \frac{nq^{n+1}}{q-1} - \frac{q^{n+1}-q}{(q-1)^2}, \text{ 将其代入 (*) 就可以得到结果.}$$

1. 典型例题

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_{n+1} = S_n + \frac{n+1}{3n} \cdot a_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ，且 $a_1 = 1$ 。

(1) 证明：数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是等比数列。

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 。

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n + \frac{n+1}{2^n}n \in \mathbf{N}^*$ 。

(1) 设 $b_n = \frac{a_n}{n}$ ，求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 。

5. 若正项等比数列 $\{a_n\}$ ，已知 $a_1 = 4$ ，且 $a_5^2 = 16a_2a_6$ ，则 $\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{2}{\sqrt{a_2}} + \frac{3}{\sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{a_n}} =$

_____。

2. 巩固练习

6. 已知 $\{a_n\}$ 为正项等比数列， $a_1 = 1, a_5 = 256$ ； S_n 为等差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和， $b_1 = 2, 5S_5 = 2S_8$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 设 $T_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$ ，求 T_n 。

7. 若数列 $1, \frac{3}{2^2}, \frac{4}{2^3}, \frac{5}{2^4}, \frac{6}{2^5}, \dots, \frac{n+1}{2^n}, \dots$ 的前 n 项之和为 S_n , 则 S_n 的值等于 ().
- A. $3 - \frac{n}{2^n}$ B. $3 - \frac{n+1}{2^{n-1}}$
 C. $3 - \frac{n+3}{2^n}$ D. $3 - \frac{n+4}{2^n}$

三、裂项相消法

模型总结

把数列的通项拆成两项之差, 在求和时中间的一些项可以相互抵消, 从而求得其和.

常见的拆项公式有:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n(n+1)} &= \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}; \\ \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right); \\ \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]; \\ \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n}; \\ n \cdot n! &= (n+1)! - n!; \\ \frac{n}{(n+1)!} &= \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

1. 典型例题

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = 1 - \frac{1}{4a_n}$, 其中 $n \in \mathbf{N}^*$.
- (1) 设 $b_n = \frac{2}{2a_n - 1}$, 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 并求出 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n .
- (2) 设 $C_n = \frac{4a_n}{n+1}$, 数列 $\{C_n C_{n+2}\}$ 的前 n 项和为 T_n , 是否存在正整数 m , 使得 $T_n < \frac{1}{C_m C_{m+1}}$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 若存在, 求出 m 的最小值, 若不存在, 请说明理由.
9. 已知 $a_n = \frac{(n+1)^2 + 1}{(n+1)^2 - 1}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .
10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} - a_n = 4n + 3 (n \in \mathbf{N}^*)$, 且 $a_1 = 3$.
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.
- (2) 若 $b_n = (-1)^n \frac{4n(n+1)^2}{a_n a_{n+1}} (n \in \mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n} .
11. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$, 则该数列的前 8 项之和等于 ____.
12. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1, a_{n+1} = \lambda S_n + 1 (n \in \mathbf{N}^*, \lambda > 0)$, 且 $a_1, a_2 + 2, a_3 + 3$ 成等差数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \frac{a_{n+1}}{(1+a_n)(1+a_{n+1})}$, R_n 是数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和, 若对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 均有 $R_n < \lambda$ 恒成立, 求 λ 的最小值.

13. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 2a_n - 2$. 数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_{n+1} = b_n + 1$, 且 $b_2 = 2$. 其中 $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 记数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \frac{b_{n+2}}{a_{n+1} \cdot b_n \cdot b_{n+1}} (n \in \mathbf{N}^*)$, 证明: $c_1 + c_2 + \cdots + c_n < \frac{1}{2}$.

2. 巩固练习

14. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n}$, 则数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为().

A. $\frac{n}{n+2}$ B. $\frac{2n}{n+2}$
C. $\frac{n}{n+1}$ D. $\frac{2n}{n+1}$

15. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $2S_n = 2^{n+1} + m (m \in \mathbf{R})$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{1}{(2n+1)\log_2(a_n \cdot a_{n+1})}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 对任意的正整数 n , 都有 $2S_n = 3a_n + n - 2$ 成立.

(1) 求证: 数列 $\left\{a_n - \frac{1}{2}\right\}$ 为等比数列.

(2) 记 $b_n = \frac{3^{n-1}}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

四、 分组求和

题型总结

情形一: 有一类数列, 既不是等差数列, 也不是等比数列, 若将这类数列适当拆开, 可分为几个等差、等比或常见的数列, 即先分别求和, 然后再合并, 形如:

$\{a_n + b_n\}$, 其中 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列

情形二: $(-1)^n(4n-1)$ 或者 $(-1)^n(2n-1)^2$ 之类的

情形三: $a_n = \begin{cases} b_n; n = 2k \\ c_n; n = 2k-1 \end{cases}$

1. 典型例题

考察情形一

17. 数列 $1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}, 5\frac{1}{8}, 7\frac{1}{16}, \dots$, 前 n 项和为 () .

- A. $n^2 - \frac{1}{2^n} + 1$
B. $n^2 - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}$
C. $n^2 - n - \frac{1}{2^n} + 1$
D. $n^2 - n - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}$

考察情形二

18. 已知 $a_n = (-1)^n n^2$, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

考察情形三

19. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 公比 $q > 0$, $S_2 = 2a_2 - 2$, $S_3 = a_4 - 2$, 数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_2 = 4b_1, nb_{n+1} - (n+1)b_n = n^2 + n, (n \in \mathbf{N}^*) .$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

(2) 证明数列 $\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$ 为等差数列 .

(3) 设数列 $\{c_n\}$ 的通项公式为: $C_n = \begin{cases} -\frac{a_n b_n}{2}, n \text{ 为奇数} \\ \frac{a_n b_n}{4}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 其前 n 项和为 T_n , 求 T_{2n} .

2. 巩固练习

20. 数列 $1 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{4}, 3 + \frac{1}{8}, \dots, n + \frac{1}{2^n}$ 的前 n 项和是 _____ .

21. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 满足 $a_3 = 7$, $S_6 = 48$. T_n 是等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 满足

$$2T_n = 3b_n - 3 (n \in \mathbf{N}^*) .$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式 .

(2) 若 $c_n = \begin{cases} \frac{2}{S_n}, n \text{ 为奇数} \\ b_n, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 R_n , 求 R_{2n} .