

03抛物线性质综合应用练习题

1. 抛物线的基本概念

抛物线的方程

1. 顶点在原点，焦点是 $F(-5, 0)$ 的抛物线标准方程是 _____ .

【答案】 $y^2 = -20x$

【解析】 由抛物线定义可得 .

【标注】 【知识点】 抛物线的标准方程；抛物线的定义

2. 已知抛物线 $y^2 = 12x$ ，则该抛物线的准线方程为 () .

A. $x = -3$

B. $x = 3$

C. $y = -3$

D. $y = 3$

【答案】 A

【解析】 抛物线 $y^2 = 12x$ ，

则该抛物线的准线方程为 $x = -3$.

故选A .

【标注】 【知识点】 抛物线的定义

3. 抛物线 $y^2 = -\frac{1}{2}x$ 的准线方程是 () .

A. $y = \frac{1}{2}$

B. $y = \frac{1}{8}$

C. $x = \frac{1}{4}$

D. $x = \frac{1}{8}$

【答案】 D

【解析】 抛物线 $y^2 = -\frac{1}{2}x$ 的开口向左，且 $2p = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore \frac{p}{2} = \frac{1}{8}$ ，

$\therefore$ 抛物线 $y^2 = -\frac{1}{2}x$ 的准线方程是 $x = \frac{1}{8}$ ，

故选D .

【标注】 【知识点】 抛物线的定义

4. 抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 的准线方程是 () .

A. $y = -1$

B. $y = -2$

C. $x = -1$

D. $x = -2$

【答案】 A

【解析】 由 $y = \frac{1}{4}x^2$ 得 $x^2 = 4y$ ，焦点在 y 轴正半轴上，且 $2p = 4$ ，即 $p = 2$ ，
因此准线方程为 $y = -\frac{p}{2} = -1$ ．故答案为 A．

【标注】【知识点】抛物线的标准方程5. 抛物线 $y = 4x^2$ 的焦点坐标是 () ．

A. $(0, 1)$

B. $(1, 0)$

C. $\left(\frac{1}{16}, 0\right)$

D. $\left(0, \frac{1}{16}\right)$

【答案】 D

【解析】 抛物线 $y = 4x^2$ 的标准方程 $x^2 = \frac{1}{4}y$ ， $P = \frac{1}{8}$ ，
开口向上焦点在 y 轴正半轴上，故焦点坐标为 $\left(0, \frac{1}{16}\right)$ ．

【标注】【知识点】抛物线的标准方程6. (1) 抛物线 $x^2 + 4y = 0$ 的焦点坐标为 _____，准线方程为 _____；(2) 抛物线 $4x^2 + y = 0$ 的焦点坐标为 _____，准线方程为 _____；(3) 抛物线 $x = ay^2 (a \neq 0)$ 的焦点坐标为 _____，准线方程为 _____．**【答案】** $(0, -1)$ ； $y = 1$ ； $\left(0, -\frac{1}{16}\right)$ ； $y = \frac{1}{16}$ ； $\left(\frac{1}{4a}, 0\right)$ ； $x = -\frac{1}{4a}$

【解析】 (1) 将 $x^2 + 4y = 0$ 化为标准方程： $x^2 = -4y$ ，故 $p = 2$ ，抛物线开口向下，故焦点坐标为 $(0, -1)$ ，准线方程为 $y = 1$ ．

(2) 抛物线的标准方程为 $x^2 = -\frac{1}{4}y$ ，故 $p = \frac{1}{8}$ ，抛物线开口向下，故焦点坐标为 $\left(0, -\frac{1}{16}\right)$ ，准线方程为 $y = \frac{1}{16}$ ．

(3) 原抛物线方程为： $y^2 = \frac{1}{a}x$ ， $\therefore 2p = \frac{1}{|a|}$

① 当 $a > 0$ ， $\frac{p}{2} = \frac{1}{4a}$ ，抛物线开口向右，
 $\therefore$ 焦点坐标 $\left(\frac{1}{4a}, 0\right)$ ，准线方程是： $x = -\frac{1}{4a}$ ．

① 当 $a < 0$ 时， $\frac{p}{2} = -\frac{1}{4a}$ ，抛物线开口向左，
 $\therefore$ 焦点坐标是 $\left(\frac{1}{4a}, 0\right)$ ，准线方程是： $x = -\frac{1}{4a}$ ．

综上，当 $a \neq 0$ 时，抛物线 $x = ay^2$ 的焦点坐标为 $\left(\frac{1}{4a}, 0\right)$ ，准线方程是： $x = -\frac{1}{4a}$ ．

【标注】【知识点】抛物线的标准方程

🔗 双曲线与抛物线的综合简单题

7. 已知抛物线 $y^2 = 8x$ 的准线过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点, 且双曲线的离心率为2, 则该双曲线的方程为 _____ .

【答案】 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

【解析】由抛物线 $y^2 = 8x$, 可得 $\frac{p}{2} = 2$, 故其准线方程为 $x = -2$.

由题意可得双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点为 $(-2, 0)$.

$\therefore c = 2$.

又双曲线的离心率为2.

$\therefore \frac{c}{a} = 2$, 得到 $a = 1$.

$\therefore b^2 = c^2 - a^2 = 3$.

$\therefore$ 双曲线的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

【标注】【知识点】抛物线与双曲线结合; 双曲线的基本量求解

8. 已知双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线过点 $(\sqrt{3}, 2)$, 且双曲线的一个焦点在抛物线 $x^2 = 4\sqrt{7}y$ 的准线上, 则双曲线的方程为 ().

- A. $\frac{x^2}{21} - \frac{y^2}{28} = 1$
B. $\frac{x^2}{28} - \frac{y^2}{21} = 1$
C. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{3} = 1$
D. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$

【答案】 C

【解析】 $\therefore \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

又 $\therefore$ 抛物线准线方程为 $x = -\sqrt{7}$,

$\therefore c = \sqrt{7}$,

又 $\therefore a^2 + b^2 = c^2 = 7$,

$\therefore a = 2, b = \sqrt{3}$,

$\therefore$ 方程为 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{3} = 1$.

故选C.

【标注】【知识点】双曲线的标准方程

9. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线方程是 $y = \sqrt{3}x$, 它的一个焦点与抛物线 $y^2 = 16x$ 的焦点相同, 则双曲线的方程为 _____.

【答案】 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

【解析】由双曲线渐近线方程可知 $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$ ①,
因为抛物线的焦点为 $(4, 0)$, 所以 $c = 4$ ②,
又 $c^2 = a^2 + b^2$ ③,
联立①②③, 解得 $a^2 = 4, b^2 = 12$,
所以双曲线的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$,
故答案为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

【标注】【知识点】双曲线的标准方程

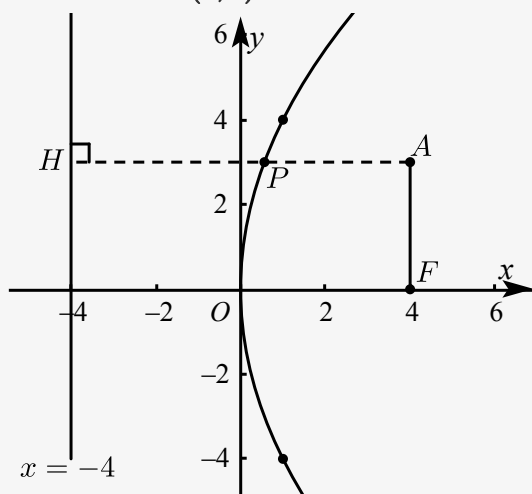
最短距离问题

10. 已知抛物线 $y^2 = 16x$ 的焦点为 F , 定点 $A(4, 3)$, 点 P 为抛物线上一点, 则 $|PF| + |PA|$ 的最小值为 ().
- A. 8 B. $8\sqrt{2}$ C. 6 D. $6\sqrt{2}$

【答案】 A

【解析】 抛物线 $y^2 = 16x$ 焦点 $F(4, 0)$,

$\therefore$ 定点 A 坐标为 $(4, 3)$,



$\therefore P$ 为抛物线任意一点, 过 A 作 AH 垂直于直线 $x = -4$, P 为 AH 与抛物线交点. 由抛物线定义, $|PF| = |PH|$,

$$\therefore |PF| + |PA| = |PA| + |AH| = 8,$$

故 $|PF| + |PA|$ 最小值为8.

故选A.

【标注】【知识点】抛物线的定义

11. 已知点 P 是抛物线 $x = \frac{1}{4}y^2$ 上的一个动点, 则点 P 到点 $A(0, 2)$ 的距离与点 P 到 y 轴的距离之和的最小值为 ().

A. 2

B. $\sqrt{5}$

C. $\sqrt{5} - 1$

D. $\sqrt{5} + 1$

【答案】 C

【解析】 抛物线 $x = \frac{1}{4}y^2$, 可得: $y^2 = 4x$, 抛物线的焦点坐标 $(1, 0)$,

依题意点 P 到点 $A(0, 2)$ 的距离与点 P 到 y 轴的距离之和的最小值,

就是 P 到 $(0, 2)$ 与 P 到该抛物线准线的距离之和减去1,

由抛物线的定义, 可得则点 P 到点 $A(0, 2)$ 的距离与 P 到该抛物线焦点坐标的距离之和减1

$$\text{可得: } \sqrt{(0-1)^2 + (2-0)^2} - 1 = \sqrt{5} - 1.$$

故选C.

【标注】【知识点】抛物线的定义

综合应用

12. 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 点 P 为抛物线上的动点, 点 M 为其准线上的动点, 当 $\triangle FPM$ 为等边三角形时, 其面积为 ().

A. $2\sqrt{3}$

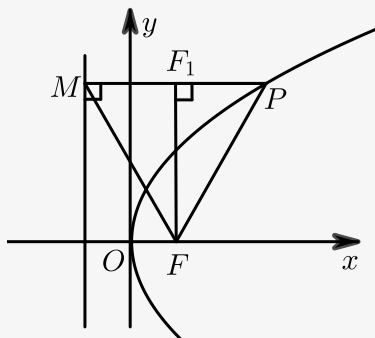
B. 4

C. 6

D. $4\sqrt{3}$

【答案】 D

【解析】



因为 $\triangle FPM$ 为等边三角形, 所以 $PF = PM$, 所以 $PM \perp$ 准线, 设 F_1 为 PM 的中点, $FF_1 \perp PM$, 所以 $F_1M = 2 \Rightarrow PM = 4$, 所以等边三角形的边长为4, 面积为 $4\sqrt{3}$.

故答案为D

【标注】【知识点】抛物线的标准方程

🔴 焦半径、焦点弦

13. 已知抛物线 $C: y^2 = x$ 的焦点为 F , $A(x_0, y_0)$ 是 C 上一点, $|AF| = \frac{5}{4}x_0$, 则 $x_0 = ()$.
- A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

【答案】A

【解析】抛物线 $C: y^2 = x$ 的焦点为 $F(\frac{1}{4}, 0)$, 准线方程为 $x = -\frac{1}{4}$, 因为 $A(x_0, y_0)$ 是 C 上一点, 所以 $|AF| = x_0 + \frac{1}{4}$, 又因为 $|AF| = \frac{5}{4}x_0$, 所以 $x_0 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}x_0$, 解得 $x_0 = 1$, 故答案为A.

【标注】【知识点】抛物线坐标的取值范围

14. 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点作直线交抛物线于点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两点, 若 $|AB| = 7$, 则 AB 中点 M 到抛物线准线的距离为 _____.

【答案】 $\frac{7}{2}$

【解析】不妨设 AB 中点坐标为 (x_0, y_0) ,
则 $2x_0 = x_1 + x_2$,
由题知 $p = 2$, 准线 $x = -1$,
 $\therefore |AB| = x_1 + \frac{p}{2} + x_2 + \frac{p}{2} = 7$,
 $\therefore 2x_0 + p = 7$,
 $\therefore x_0 + \frac{p}{2} = \frac{7}{2}$,
即 AB 中点到抛物线距离为 $\frac{7}{2}$.

【标注】【知识点】抛物线的定义

15. 设抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 点 $A(0, 2)$. 若线段 FA 的中点 B 在抛物线上, 则 B 到该抛物线准线的距离为_____.

【答案】 $\frac{3}{4}\sqrt{2}$

【解析】

F 点坐标为 $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ ，利用中点坐标公式得 B 点坐标 $\left(\frac{p}{4}, 1\right)$ ，代入抛物线方程可得出 p 的值为 $\sqrt{2}$ ， B 点坐标为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, 1\right)$ ，所以点 B 到抛物线准线的距离为 $\frac{3}{4}\sqrt{2}$ 。

【标注】【知识点】抛物线的定义

16. 焦点在 y 轴上的抛物线上一点 $P(m, -3)$ 到焦点的距离为5，求抛物线的标准方程。

【答案】 $x^2 = -8y$ 。

【解析】 设抛物线方程为 $x^2 = -2py (p > 0)$ ，点 P 在抛物线上，到准线的距离为5，又点 P 到 x 轴的距离为3，所以准线到 x 轴的距离为2，则 $\frac{p}{2} = 2$ ，即 $p = 4$ ，故抛物线标准方程为 $x^2 = -8y$ 。

【标注】【知识点】抛物线的定义

17. 抛物线的焦点 F 在 x 轴上，直线 $y = -3$ 与抛物线相交于点 A ， $|AF| = 5$ ，求抛物线的标准方程。

【答案】 $y^2 = \pm 2x$ 或 $y^2 = \pm 18x$

【解析】 设所求焦点在 x 轴上的抛物线的标准方程为： $y^2 = 2px (p \neq 0)$ ， $A(m, -3)$
则由抛物线的定义得 $5 = |AF| = \left|m + \frac{p}{2}\right|$ ，又因为 $(-3)^2 = 2pm$
所以 $p = \pm 1$ 或 $p = \pm 9$
故所要求抛物线的方程为： $y^2 = \pm 2x$ 或 $y^2 = \pm 18x$ 。

【标注】【知识点】抛物线的标准方程