

02双曲线性质综合应用练习题

1. 双曲线的基础知识

超简单的基本量计算

1. 双曲线 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 的焦点坐标为 () .

A. $(-3, 0)$, $(3, 0)$

B. $(0, -3)$, $(0, 3)$

C. $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$

D. $(0, -\sqrt{3})$, $(0, \sqrt{3})$

【答案】 C

【解析】 $\because$ 双曲线方程为 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$,

$\therefore a = \sqrt{2}$, $b = 1$, $c = \sqrt{3}$,

故焦点为 $(\pm\sqrt{3}, 0)$.

故选C .

【标注】 【知识点】 双曲线的标准方程

2. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$ 的左、右焦点的坐标分别是 () .

A. $(-5, 0)$, $(5, 0)$

B. $(-\sqrt{5}, 0)$, $(\sqrt{5}, 0)$

C. $(-3, 0)$, $(3, 0)$

D. $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$

【答案】 B

【解析】 双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$ 可得 $a = 2$, $b = 1$,

则 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$,

所以双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$ 的左、右焦点的坐标分别是 $(-\sqrt{5}, 0)$, $(\sqrt{5}, 0)$.

故选B .

【标注】 【知识点】 双曲线的标准方程

3. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的离心率是 () .

A. $\sqrt{5}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

C. $\sqrt{3}$

D. 2

【答案】 B

【解析】 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, 可知 $a = 2, b = 1, c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$,
所以双曲线的离心率是 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

故选B.

【标注】 【素养】 数学运算

【知识点】 求双曲线的离心率

【知识点】 双曲线的标准方程

4. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1 (a > 0)$ 的一条渐近线为 $y = x$, 则 a 的值为 _____.

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】 双曲线渐近方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$,
 $\therefore \frac{\sqrt{3}}{a} = 1, a = \sqrt{3}$.

【标注】 【知识点】 双曲线的标准方程

5. 已知双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{m} = 1$ 的一个焦点为 $(5, 0)$, 则双曲线的渐近线方程为 _____.

【答案】 $y = \pm \frac{4}{3}x$

【解析】 由题意, 双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{m} = 1$ 的焦点在 x 轴, 且 $m > 0, c = \sqrt{9 + m} > 3$,
 $\therefore$ 一个焦点是 $(5, 0)$,
 $\therefore \sqrt{9 + m} = 5, m = 16$,
 $\therefore$ 双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{4}{3}x$.

【标注】 【知识点】 双曲线的渐近线

6. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1 (a > 0)$ 的离心率为2, 则 $a =$ _____.

【答案】 1

【解析】 由 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1$ 可知虚轴 $b = \sqrt{3}$, 离心率得 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + 3}}{a} = 2$, 解得 $a = 1$.

【标注】 【素养】 数学运算

【知识点】 求双曲线的离心率

【知识点】双曲线的标准方程

双曲线的方程

7. 若 $k \in R$, 则“ $k > 3$ ”是“方程 $\frac{x^2}{k-3} - \frac{y^2}{k+3} = 1$ 表示双曲线”的().
- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】 A

【解析】 方程 $\frac{x^2}{k-3} - \frac{y^2}{k+3} = 1$ 表示双曲线的充要条件是 $(k-3)(-k-3) < 0$, 得 $k > 3$ 或 $k < -3$. 故选A.

【标注】【知识点】双曲线的标准方程；充要条件与解析几何结合

双曲线定义的简单应用

8. 双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 上一点 P 到点 $F_1(-5, 0)$ 的距离为 $\frac{15}{2}$, 则点 P 到点 $F_2(5, 0)$ 的距离为 _____.

【答案】 $\frac{27}{2}$

【解析】 由双曲线方程 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{16} = 1$,
 可得 $a^2 = 9$, $b^2 = 16$, $c^2 = a^2 + b^2 = 25$,
 $\therefore a = 3$, $c = 5$,
 $\therefore$ 双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的焦点为 $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$,
 $\therefore$ 点 P 在双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 上 ,
 $\therefore ||PF_2| - |PF_1|| = 2a = 6$,
 $\therefore |PF_1| = \frac{15}{2}$,
 $\therefore \left| |PF_2| - \frac{15}{2} \right| = 6$,
 $\therefore |PF_2| - \frac{15}{2} = 6$ 或 $|PF_2| - \frac{15}{2} = -6$,
 $\therefore |PF_2| = \frac{27}{2}$ 或 $|PF_2| = \frac{3}{2}$,
 $\therefore |PF_2| \geq c - a = 2$,
 $\therefore |PF_2| = \frac{27}{2}$.
 故答案为 : $\frac{27}{2}$.

【标注】【知识点】双曲线的定义

9. 双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的右支上的一点 P 到右焦点的距离为 2, 则 P 点到左焦点的距离为 ().
- A. 6 B. 8 C. 10 D. 12

【答案】 C

【解析】 记 F_1 、 F_2 分别为双曲线的左、右焦点,

$$a = \sqrt{16} = 4, b = \sqrt{9} = 3,$$

$\because P$ 在双曲线右支上且 $PF_2 = 2$,

$$\therefore PF_1 - PF_2 = 2a = 8,$$

$$\text{即 } PF_1 - 2 = 8, PF_1 = 10,$$

故选 C.

【标注】 【知识点】 双曲线的标准方程

🔗 求解双曲线方程

10. 与双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 有共同的渐近线, 且过点 $(-\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ 的双曲线的标准方程是 _____.

【答案】 $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{\frac{15}{4}} = 1$

【解析】 与双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 有共同的渐近线, 可设双曲线方程为: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = m$,

双曲线过点 $(-\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$, 可得 $\frac{1}{3} - \frac{3}{4} = m$, 即 $m = -\frac{5}{12}$,

所求双曲线方程为: $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{\frac{15}{4}} = 1$.

故答案为: $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{\frac{15}{4}} = 1$.

【标注】 【知识点】 双曲线的标准方程

11. 经过点 $A(3, -1)$, 并且对称轴都在坐标轴上的等轴双曲线的标准方程为 _____.

【答案】 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$

【解析】 当焦点在 x 轴时, 设双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$,

把 $A(3, -1)$ 代入方程得 $\frac{9}{a^2} - \frac{1}{a^2} = 1, a^2 = 8$,

$\therefore$ 双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$,

当焦点在 y 轴时, 设双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$,

把 $A(3, -1)$ 代入方程得 $\frac{1}{a^2} - \frac{9}{a^2} = 1, a^2 = -8$, 这种情况不存在,

综上所述：该等轴双曲线的方程为 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$.

【标注】【知识点】双曲线的标准方程

12. 与双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 有共同的渐近线，且过点 $(2, 2)$ 的双曲线的标准方程是 _____ .

【答案】 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{12} = 1$

【解析】 依题意，设双曲线的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{4} = \lambda (\lambda \neq 0)$ ，将点 $(2, 2)$ 代入 $x^2 - \frac{y^2}{4} = \lambda$ 求得 $\lambda = 3$ ，所以所求双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{12} = 1$.

【标注】【知识点】双曲线的渐近线

13. 已知双曲线的一个焦点坐标为 $(\sqrt{6}, 0)$ ，且经过点 $(-5, 2)$ ，则双曲线的标准方程为 () .

A. $\frac{x^2}{5} - y^2 = 1$
C. $\frac{x^2}{25} - y^2 = 1$

B. $\frac{y^2}{5} - x^2 = 1$
D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$

【答案】 A

【解析】 设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，

$\because$ 双曲线一个焦点坐标为 $(\sqrt{6}, 0)$ 且经过点 $(-5, 2)$ ，

$$\therefore \begin{cases} \frac{25}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \\ a^2 + b^2 = 6 \end{cases},$$

$$\therefore a = \sqrt{5}, b = 1.$$

$$\text{双曲线标准方程: } \frac{x^2}{5} - y^2 = 1.$$

【标注】【知识点】双曲线的基本量求解

14. 若双曲线的渐近线方程为 $y = \pm 3x$ ，一个焦点是 $(\sqrt{10}, 0)$ ，则双曲线的方程是 _____ .

【答案】 $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$

【解析】 由题意知，双曲线的焦点在 x 轴上，

$$\text{设双曲线的方程为 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ 则 } \frac{b}{a} = 3, c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10}a = \sqrt{10},$$

$$\text{解得 } a = 1, b = 3, \text{ 故其方程为 } x^2 - \frac{y^2}{9} = 1.$$

【标注】【知识点】双曲线的标准方程

 双曲线的基本量求解

15. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1 (a > 0)$ 的渐近线方程为 $3x \pm 2y = 0$ ，则 a 的值为 () .
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】 B

【解析】 由双曲线的标准方程 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1 (a > 0)$ 得双曲线的焦点在 x 轴上， $b^2 = 9$ ，
渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，
即 $y = \pm \frac{3}{a}x$ ，
由已知条件渐近线方程为 $y = \pm \frac{3}{2}x$ ，所以 $a = 2$.

【标注】 【知识点】 求曲线方程的问题；双曲线的标准方程

16. 双曲线 $\frac{y^2}{3} - x^2 = 1$ 的渐近线方程为 () .
- A. $y = \pm\sqrt{3}x$ B. $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$
C. $y = \pm 2x$ D. $y = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}x$

【答案】 A

【解析】 方法一：已知双曲线 $\frac{y^2}{3} - x^2 = 1$ ，
令： $\frac{y^2}{3} - x^2 = 0$ ，
即得到渐近线方程为： $y = \pm\sqrt{3}x$.
故选A .
方法二：此双曲线焦点在 y 轴上，渐近线方程为 $y = \pm \frac{a}{b}x$ ，由题知 $a = \sqrt{3}$ ，
 $b = 1$ ，
故双曲线的渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$.
故选A .

【标注】 【知识点】 双曲线的渐近线

17. 双曲线 $y^2 - 2x^2 = 8$ 的渐近线方程为 _____ .

【答案】 $y = \pm\sqrt{2}x$

【解析】 根据题意，双曲线的方程为： $y^2 - 2x^2 = 8$ ，
变形可得 $\frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{4} = 1$ ，

则其焦点在 y 轴上, 且 $a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{4} = 2$,

则其渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{2}x$,

故其答案为: $y = \pm\sqrt{2}x$.

【标注】【知识点】双曲线的渐近线

18. 若双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{m} = 1$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 则实数 $m =$ _____.

【答案】 2

【解析】 由题意知, $a^2 = 1$, $b^2 = m$.

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{m}{1}} = \sqrt{3},$$

$$\therefore m = 2.$$

【标注】【素养】数学运算

【知识点】 求双曲线的离心率

19. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的实轴长为2, 焦距为 $2\sqrt{3}$, 则双曲线的渐近线方程为 () .

A. $y = \pm \frac{1}{2}x$

B. $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$

C. $y = \pm\sqrt{2}x$

D. $y = \pm 2x$

【答案】 C

【解析】 $\therefore$ 实轴长为2,

$$\therefore 2a = 2, a = 1,$$

$$\therefore \text{焦距为 } 2\sqrt{3},$$

$$\therefore 2c = 2\sqrt{3}, c = \sqrt{3},$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2,$$

$$\therefore b^2 = 2,$$

$$\therefore b = \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{渐近线方程为 } y = \pm \frac{b}{a} = \pm\sqrt{2}x.$$

故选C.

【标注】【知识点】双曲线的渐近线; 双曲线的定义

20. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{16} = 1 (a > 0)$ 的一条渐近线方程为 $y = \frac{4}{3}x$ ，则该双曲线的离心率为 _____ .

【答案】 $\frac{5}{3}$

【解析】 $y = \frac{b}{a}x = \frac{4}{3}x$ ，

$$\text{即 } \frac{b}{a} = \frac{4}{3}.$$

又因为 $b = 4$ ，所以 $a = 3$.

$$c^2 = a^2 + b^2 = 25,$$

$$c = 5.$$

$$\text{离心率 } e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}.$$

【标注】【知识点】双曲线的渐近线；求双曲线的离心率

21. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ，则 C 的渐近线方程为 () .

A. $y = \pm \frac{1}{4}x$

B. $y = \pm \frac{1}{3}x$

C. $y = \pm x$

D. $y = \pm \frac{1}{2}x$

【答案】 D

【解析】 由双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，

$$\text{则离心率 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{ 即 } 4b^2 = a^2,$$

$$\text{故渐近线方程为 } y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{1}{2}x.$$

故选 D .

【标注】【素养】数学运算

【知识点】双曲线的渐近线

22. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 渐近线方程为 $y = \pm x$ ，则双曲线的离心率为 () .

A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$

D. 2

【答案】 B

【解析】 因为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线方程 $y = \pm x$ ，所以 $\frac{b}{a} = 1$ ，所以 $b = a$ ，所以

$$e = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{2}.$$

【标注】【知识点】求双曲线的离心率

23. 设双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率是 3, 则其渐近线的方程为 ().

A. $x \pm 2\sqrt{2}y = 0$

B. $2\sqrt{2}x \pm y = 0$

C. $x \pm 8y = 0$

D. $8x \pm y = 0$

【答案】A

【解析】 $\because e = 3$,

$$\therefore \frac{c}{a} = 3 \text{ 即 } c = 3a,$$

$$\therefore b = 2\sqrt{2}a,$$

$$\therefore \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \text{ 是焦点在 } y \text{ 轴的双曲线,}$$

$$\therefore \text{渐近线方程为 } y = \pm \frac{a}{b}x = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}x,$$

$$\text{即 } x \pm 2\sqrt{2}y = 0.$$

故选 A.

【标注】【知识点】双曲线的渐近线

2. 双曲线性质的简单扩展

24. 已知双曲线的中心在原点. 焦点 F_1, F_2 在坐标轴上, 离心率为 $\sqrt{2}$, 且过点 $(3, -1)$, $M(3\sqrt{2}, m)$ 在双曲线上.

(1) 求双曲线方程.

(2) 求 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2}$ 的值.

(3) 求 $\triangle F_1MF_2$ 的面积.

【答案】(1) $x^2 - y^2 = 8$.

(2) 12.

(3) $4\sqrt{10}$.

【解析】(1) $\because$ 双曲线的离心率为 $\sqrt{2}$,

$$\therefore \text{可设双曲线方程为 } x^2 - y^2 = \lambda,$$

$$\because \text{双曲线过点 } (3, -1),$$

$$\therefore 9 - 1 = \lambda, \text{ 即 } \lambda = 8,$$

$$\therefore \text{双曲线方程为 } x^2 - y^2 = 8.$$

(2) 由 (1) 可知 $a = b = 2\sqrt{2}$, 所以 $c = 4$,

$$\begin{aligned} &\therefore F_1(-4, 0), F_2(4, 0), \\ &\therefore \overrightarrow{MF_1} = (-4 - 3\sqrt{2}, -m), \overrightarrow{MF_2} = (4 - 3\sqrt{2}, -m), \\ &\therefore \text{点}(3\sqrt{2}, m) \text{在双曲线上}, \\ &\therefore 18 - m^2 = 8, \text{即} m^2 = 10, \\ &\therefore \overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = 18 - 16 + m^2 = 12. \\ (3) &\text{由}(2) \text{可知} \triangle F_1MF_2 \text{的底边长} |F_1F_2| = 8, \\ &\triangle F_1MF_2 \text{的高} h = |m| = \sqrt{10}, \\ &\therefore S_{\triangle F_1MF_2} = 4\sqrt{10}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】焦点三角形问题；面积问题；向量问题

25. 已知双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

- (1) 求双曲线的实轴长和离心率.
(2) 求双曲线的焦点到渐近线的距离.

【答案】(1) 实轴长为8, 离心率为 $\frac{5}{4}$.

(2) 3.

【解析】(1) $a^2 = 16, a = 4, 2a = 8, b^2 = 9,$
 $c^2 = a^2 + b^2 = 25, c = 5, e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4},$
 综上: 实轴长为8, 离心率为 $\frac{5}{4}$.
 (2) 取右焦点(5, 0)渐近线 $y = \frac{3}{4}x, 3x - 4y = 0,$
 $d = \frac{|15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3.$

【标注】【知识点】求双曲线的渐近线

26. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为2, 焦点到渐近线的距离为 $\sqrt{3}$, 则 C 的焦距等于 ().

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. $4\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】 $\therefore$ 双曲线的离心率为2,
 $\therefore \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = 2, \text{即} b = \sqrt{3}a,$
 $\therefore$ 焦点 $(c, 0)$ 到渐近线 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 的距离为 $\sqrt{3},$
 $\therefore b = \sqrt{3},$

$$\therefore a = 1 ,$$

$$\therefore c = 2 ,$$

$$\therefore \text{焦距} 2c = 4 .$$

【标注】【知识点】双曲线的标准方程