

02双曲线性质综合应用

1. 双曲线的基础知识

双曲线的基本概念与基础性质

定义		
图形		
标准方程		
焦点		
顶点		
x、y的范围		
渐近线		
实轴、虚轴、焦距		
a, b, c 的关系		
离心率		

双曲线的方程

1. 若方程 $\frac{x^2}{2+m} - \frac{y^2}{1+m} = 1$ 表示双曲线, 则 m 的取值范围是 ().
- A. $m > -1$ B. $m < -2$
C. $-2 < m < -1$ D. $m > -1$ 或 $m < -2$
2. 已知方程 $\frac{x^2}{m^2+n} - \frac{y^2}{3m^2-n} = 1$ 表示双曲线, 且该双曲线两焦点间的距离为 4, 则 n 的取值范围是 ().
- A. $(-1, 3)$ B. $(-1, \sqrt{3})$ C. $(0, 3)$ D. $(0, \sqrt{3})$

3. $k > 9$ 是方程 $\frac{x^2}{9-k} + \frac{y^2}{k-4} = 1$ 表示双曲线的 ().
- A. 充要条件
B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件
D. 既不充分又不必要条件
4. 若实数 k 满足 $0 < k < 5$, 则曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{5-k} = 1$ 与曲线 $\frac{x^2}{16-k} - \frac{y^2}{5} = 1$ 的 ().
- A. 实半轴长相等
B. 虚半轴长相等
C. 离心率相等
D. 焦距相等

🔗 双曲线方程及基本量简单求解

5. 双曲线 $9y^2 - 16x^2 = 144$ 的渐近线方程为 _____ .
6. 双曲线 $\frac{x^2}{m-4} + \frac{y^2}{m} = 1$ 的虚轴长为 2, 则实数 m 的值为 _____ .
7. 双曲线 $8kx^2 - ky^2 = 8$ 的一个焦点为 $(0, 3)$, 则 k 的值为 _____ .
8. 若双曲线 $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{m^2+4} = 1$ 的离心率为 $\sqrt{5}$, 则 m 的值为 ().
- A. 2
B. 3
C. 4
D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$
9. “双曲线 C 的标准方程 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ ” 是 “双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{3}{4}x$ ” 成立的 ().
- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

🔗 求解双曲线方程

10. 以椭圆 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$ 的焦点为定点的等轴双曲线的标准方程为 _____ .
11. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦距为 $2\sqrt{5}$, 且双曲线的一条渐近线的斜率为 $\frac{1}{2}$, 则双曲线的方程为 _____ .
12. 设双曲线 C 经过点 $(2, 2)$, 且与 $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ 具有相同渐近线, 则 C 的方程为 _____ .
13. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点为 F , 离心率为 $\sqrt{2}$, 若经过 F 和 $P(0, 4)$ 两点的直线平行于双曲线的一条渐近线, 则双曲线的方程为 _____ .

🔗 双曲线定义的简单应用

14. 双曲线 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的两个焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 在双曲线上, 且 $PF_1 = 12$, $PF_2 = ()$.
- A. 17
B. 7
C. 7或17
D. 2或22
15. 已知双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 上一点, M 到 $A(5, 0)$ 的距离为 3, 则 M 到其左焦点的距离等于 ().
- A. 9
B. 8
C. 7
D. 6

双曲线定义的复杂应用

16. 设 F_1, F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 双曲线上存在一点 P 使得 $|PF_1| + |PF_2| = 3b$, $|PF_1| \cdot |PF_2| = \frac{9}{4}ab$, 则该双曲线的离心率为().
- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{9}{4}$ D. 3
17. 已知 F_1, F_2 为双曲线 $C: x^2 - y^2 = 1$ 的左右焦点, 点 P 在 C 上, $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$, 则 $|PF_1| \cdot |PF_2| =$ _____.
18. 设 F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{2a} = 1 (a > 0)$ 的两个焦点, 点 M 在双曲线上, 且满足 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = 0$, $|\overrightarrow{MF_1}| \cdot |\overrightarrow{MF_2}| = 4$, 则 a 的值等于 _____.

双曲线方程的稍微复杂一丢丢的应用

19. 已知双曲线 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 其一条渐近线方程为 $y = x$, 点 $P(\sqrt{3}, y_0)$ 在该双曲线上, 则 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} =$ ().
- A. -12 B. -2 C. 0 D. 4
20. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , 点 A 在双曲线的渐近线上, $\triangle OAF$ 是边长为2的等边三角形(O 为坐标原点), 则该双曲线的方程为 _____.

离心率与渐近线的关系

21. 已知双曲线的 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ 的一条渐近线为 $2x + y = 0$, 则该双曲线的离心率等于().
- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$
C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{6}$
22. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 则 C 的渐近线方程为 _____.
23. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦距为10, 点 $P(2, 1)$ 在 C 的渐近线上, 则双曲线 C 的离心率为().
- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{1}{4}$
24. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{2} = 1 (a > \sqrt{2})$ 的两条渐近线的夹角为 60° , 则双曲线的离心率为 _____.
25. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线与圆 $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ 相切, 则该双曲线的离心率为 _____.
- 26.

若点 $(\sqrt{3}, 0)$ 到双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线的距离为 $\sqrt{2}$, 则双曲线的离心率为()

A. $\sqrt{3}$

B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

C. $\sqrt{3}$ 或 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

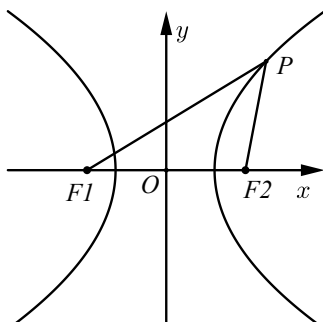
2. 双曲线性质的简单扩展

1. 双曲线的通径

(1) 定义: 过双曲线的焦点且垂直于实轴的直线被双曲线截得的弦称为双曲线的**通径**

(2) 长度: 无论焦点在 x 轴上还是在 y 轴上, 双曲线的通径长均为 $\frac{2b^2}{a}$

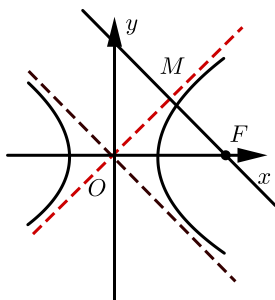
2. 焦点三角形



$$\textcircled{1} S_{\triangle F_1PF_2} = \frac{1}{2} |PF_1| |PF_2| \sin \angle F_1PF_2 ;$$

$$\textcircled{2} S_{\triangle F_1PF_2} = b^2 \cot \frac{\theta}{2} (\theta = \angle F_1PF_2) ;$$

3. 双曲线的一个焦点到一条渐近线的距离等于虚半轴长



🔴 焦点三角形

27. 若 F_1, F_2 为双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的左、右焦点, 点 P 在双曲线 C 上, 若 $\angle F_1PF_2 = 120^\circ$, 则 P 到 x 轴的距离为 _____ .

28. 若双曲线 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$ 的两个焦点 F_1, F_2 , P 为双曲线上一点, 且 $\angle F_1PF_2 = 120^\circ$, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为 () .

A. $\sqrt{3}$

B. $2\sqrt{3}$

C. $3\sqrt{3}$

D. $6\sqrt{3}$

29.

已知双曲线 C 的离心率为2, 焦点为 F_1, F_2 , 点 A 在 C 上, 若 $|F_1A| = 2|F_2A|$, 则 $\cos \angle AF_2F_1 = ($

-) .
A. $\frac{1}{4}$
C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

- B. $\frac{1}{3}$
D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

30. 设 F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 的两个焦点, P 在双曲线上, 当 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为2时, $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2}$ 的值为().

A. 2

B. 3

C. 4

D. 6

31. 设 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两个焦点, P 是 C 上一点, 若 $|PF_1| + |PF_2| = 6a$, 且 $\triangle PF_1F_2$ 的最小内角为 30° , 则 C 的离心率为().

- A. $\sqrt{2}$
C. $\sqrt{3}$

- B. $\frac{3}{2}$
D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

32. 设 P 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 与圆 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 在第一象限的交点, F_1, F_2 分别是双曲线的左、右焦点, 若 $\tan \angle PF_2F_1 = 3$, 则双曲线的离心率为().

- A. $\sqrt{10}$
C. $\sqrt{3}$

- B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$
D. $\sqrt{2}$

通径

33. 设直线 $y = kx$ 与双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 相交于 A, B 两点, 分别过 A, B 向 x 轴作垂线, 若垂足恰为双曲线的两个焦点, 则实数 $k =$ _____.

焦点到渐近线的距离

34. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 与双曲线 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{2} = 1$ 有相同的渐近线, 且经过点 $M(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

(1) 求双曲线 C 的方程.

(2) 求双曲线 C 的实轴长, 离心率, 焦点到渐近线的距离.

35. 以双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 的右焦点为圆心, 且与双曲线的渐近线相切的圆的标准方程为_____.