

01椭圆性质综合应用练习题

1. 椭圆的基础知识

🕒 椭圆的方程 (题型1)

1. 椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的焦点坐标是 _____ .

【答案】 $(\pm 3, 0)$

【解析】 由方程 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 可得焦点在 x 轴上，
且 $a = 5$ ， $b = 4$ ，则 $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3$ ，
则焦点坐标为 $(\pm 3, 0)$.

【标注】 【知识点】 椭圆的标准方程

2. 已知焦点在坐标轴的椭圆 C 经过点 $(2, 0)$ ，且长轴长是短轴长的2倍，则椭圆 C 的标准方程为 _____ .

【答案】 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 或 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

【解析】 当焦点在 x 轴时，由题可知，
 $a = 2$ ，且 $2a = 2 \times 2b$ ，
 $\therefore b = 1$ ，
 $\therefore$ 标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ，
当焦点在 y 轴时，由题可知 $b = 2$ 且 $2a = 2 \times 2b = 8$ ，
 $\therefore a = 4$ ，
 $\therefore$ 标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$.

【标注】 【知识点】 椭圆的顶点与轴

3. 已知椭圆对称轴为坐标轴，离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 且经过点 $(4, 2\sqrt{3})$ ，求该椭圆的标准方程 .

【答案】 $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1$ 或 $\frac{x^2}{19} + \frac{y^2}{76} = 1$.

【解析】 由 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 可得 $b = \frac{1}{2}a$ ，因此设椭圆方程为 $\frac{x^2}{4b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 或 $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1$ ，
将点 $(4, 2\sqrt{3})$ 的坐标代入可得 $b^2 = 16$ ， $b^2 = 19$ ，

$$\therefore \text{所求方程是: } \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{ 或 } \frac{x^2}{19} + \frac{y^2}{76} = 1 .$$

【标注】【知识点】求椭圆的离心率；椭圆的标准方程

4. 已知椭圆的中心在原点，焦点在 x 轴上，且长轴长为12，离心率为 $\frac{1}{3}$ ，则椭圆的方程为（ ）.

- A. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{24} = 1$
 B. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$
 C. $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{36} = 1$
 D. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$

【答案】 D

【解析】 由题意知，

$$2a = 12, \frac{c}{a} = \frac{1}{3}, \text{ 故 } a = 6, c = 2,$$

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 32,$$

$$\therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1 .$$

故选D .

【标注】【知识点】已知椭圆的离心率求其他参数；椭圆的基本量求解

5. 若椭圆的中心在原点，焦点在 x 轴上，离心率为 $\frac{1}{2}$ ，焦距为6，则该椭圆的方程是（ ）.

- A. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$
 B. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$
 C. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$
 D. $\frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{27} = 1$

【答案】 B

【解析】 椭圆的简单性质 .

$$\text{由题意设椭圆方程为 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b > 0) .$$

$\therefore$ 椭圆的中心在原点，焦点在 x 轴上，离心率为 $\frac{1}{2}$ ，焦距为6，

$$\therefore \begin{cases} e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \\ 2c = 6 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} .$$

$$\text{解得 } a = 6, c = 3, b^2 = 36 - 9 = 27 .$$

$$\therefore \text{该椭圆的方程是 } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1 .$$

故选：B .

【标注】【知识点】椭圆的标准方程

🕒 椭圆的方程 (题型2)

6. 如果方程 $\frac{x^2}{3-m} + \frac{y^2}{m+1} = 1$ 表示椭圆, 求 m 的取值范围 _____ .

【答案】 $(-1, 1) \cup (1, 3)$

【解析】 若方程为椭圆,

$$\text{则} \begin{cases} 3-m > 0 \\ m+1 > 0 \\ 3-m \neq m+1 \end{cases},$$

解得 $(-1, 1) \cup (1, 3)$.

【标注】【知识点】椭圆的标准方程

7. 如果 $x^2 + ky^2 = 2$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆, 则实数 k 的取值范围是 _____ .

【答案】 $(0, 1)$

【解析】 根据题意, $x^2 + ky^2 = 2$ 化为标准形式为 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{\frac{2}{k}} = 1$,

根据题意, 其表示焦点在 y 轴上的椭圆, 则有 $\frac{2}{k} > 2$,

解可得 $0 < k < 1$.

故答案为 $(0, 1)$.

【标注】【知识点】椭圆的标准方程

8. 如果方程 $x^2 + ky^2 = 2$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆, 那么实数 k 的取值范围 _____ .

【答案】 $(0, 1)$

【解析】 方程可化为 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{\frac{2}{k}} = 1$, $\therefore \begin{cases} \frac{2}{k} > 0 \\ \frac{2}{k} > 2 \end{cases}$, 得 $0 < k < 1$.

【标注】【知识点】椭圆的标准方程

9. “ $m > n > 0$ ”是“曲线 $mx^2 + ny^2 = 1$ 为焦点在 x 轴上的椭圆”的 () .

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】 D

【解析】 $mx^2 + ny^2 = 1$ 的标准方程为 $\frac{x^2}{\frac{1}{m}} + \frac{y^2}{\frac{1}{n}} = 1$ ，当 $m > n > 0$ 时， $\frac{1}{n} > \frac{1}{m} > 0$ ，

所以曲线 $mx^2 + ny^2 = 1$ 为焦点在 y 轴上的椭圆，充分性不满足；

当曲线 $mx^2 + ny^2 = 1$ 为焦点在 x 轴上的椭圆，则 $\frac{1}{m} > \frac{1}{n} > 0$ ，

即 $n > m > 0$ ，必要性不满足。

【标注】 【知识点】 充要条件与解析几何结合

【知识点】 椭圆的标准方程

【素养】 逻辑推理

椭圆的定义及基础应用

10. 如果 $M(x, y)$ 在运动过程中总满足关系式 $\sqrt{x^2 + (y+3)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 10$ ，则 M 的轨迹方程是 _____。

【答案】 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

【解析】 $M(x, y)$ 的轨迹符合椭圆的定义，焦点为 $(0, 3)$ ， $(0, -3)$ ， $2a = 10$ ， $c = 3$ ，所以 $a = 5$ ， $b = 4$ ，所以 M 的轨迹方程是 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ 。

【标注】 【知识点】 求曲线方程的问题

11. 椭圆的焦距为 8，且椭圆上的点到两个焦点距离之和为 10，则该椭圆的标准方程是 ()。

- A. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
B. $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$ 或 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
C. $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$
D. $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1$ 或 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

【答案】 B

【解析】 由题意可知：焦距 $2c = 8$ ， $2a = 10$ ，则 $c = 4$ ， $a = 5$ ，

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 9,$$

$\therefore$ 当椭圆的焦点在 x 轴上时，

$$\text{椭圆的标准方程：} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

当椭圆的焦点在 y 轴上时，

椭圆的标准方程为： $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ ，
 故椭圆的标准方程为 $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$ 或 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 。
 故选B。

【标注】【知识点】椭圆的定义；椭圆的标准方程

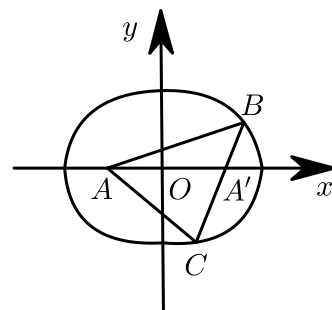
12. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上的一点P到另一个焦点的距离为5，则P到另一个焦点的距离为（ ）。
- A. 5 B. 6 C. 4 D. 10

【答案】A

【解析】由方程 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ，可得 $a = 5$ ， $b = 3$ ， $c = 4$ ，
 由定义可知 $PF_1 + PF_2 = 2a = 10$ ，而 $PF_1 = 5$ ，则 $PF_2 = 5$ ，
 故选A。

【标注】【知识点】椭圆的定义

13. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点B、C在椭圆 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 上，顶点A是椭圆的一个焦点，且椭圆的另外一个焦点在BC边上，则 $\triangle ABC$ 的周长是（ ）。



- A. $2\sqrt{3}$ B. 6 C. $4\sqrt{3}$ D. 12

【答案】C

【解析】设另一焦点为 A' ，则 $|BA'| + |BA| = 2\sqrt{3}$ ①
 $|CA'| + |CA| = 2\sqrt{3}$ ②
 ①+②得 $|BA'| + |CA'| + |BA| + |CA| = 4\sqrt{3}$ ，即 $|BC| + |BA| + |CA| = 4\sqrt{3}$ 。
 故选C。

【标注】【知识点】椭圆的定义

14.

已知椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的两个焦点分别为 F_1, F_2 ，斜率不为0的直线 l 过点 F_1 ，且交椭圆于 A, B 两点，则 $\triangle ABF_2$ 的周长为 () .

A. 10

B. 16

C. 20

D. 25

【答案】 C

【解析】 由题意可得 $a = 5$ ， $\triangle ABF_2$ 周长：

$$\begin{aligned} C &= AB + AF_2 + BF_2 = AF_1 + BF_1 + AF_2 + BF_2 \\ &= (AF_1 + AF_2) + (BF_1 + BF_2) \\ &= 4a = 20, \\ &\text{故选C.} \end{aligned}$$

【标注】 【知识点】 焦点三角形问题；椭圆的顶点与轴

长短轴、焦距

15. 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的焦距为 () .

A. $2\sqrt{13}$

B. $2\sqrt{5}$

C. $\sqrt{13}$

D. $\sqrt{5}$

【答案】 B

【解析】 $\because$ 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$,
 $\therefore$ 椭圆半长轴长为 $a = 3$, 半短轴长为 $b = 2$,
 $\therefore c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$,
 $\therefore$ 焦距为 $2c = 2\sqrt{5}$.
 故选B .

【标注】 【知识点】 椭圆的标准方程；椭圆的定义

16. 椭圆 $2x^2 + 3y^2 = 12$ 的焦距等于 () .

A. $2\sqrt{10}$

B. $\sqrt{10}$

C. $\sqrt{2}$

D. $2\sqrt{2}$

【答案】 D

【解析】 椭圆方程 $2x^2 + 3y^2 = 12$ 两边同除12得 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} = 1$,
 则 $a = \sqrt{6}$, $b = 2$, 则由 $c^2 = a^2 - b^2$ 得 $c = \sqrt{2}$, 焦距 $2c = 2\sqrt{2}$,
 故选D .

【标注】 【知识点】 椭圆的标准方程

已知 F_1, F_2 是椭圆 C 的两个焦点, P 是 C 上的一点,若 $PF_1 \perp PF_2$,且 $\angle PF_2F_1 = 60^\circ$,则 C 的离心率为().

A. $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$
C. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

B. $2 - \sqrt{3}$

D. $\sqrt{3} - 1$

【答案】 D

【解析】 方法一: 设椭圆焦点在 x 轴上, 椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$,

F_1 为椭圆左焦点, F_2 为椭圆右焦点, 则 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$,

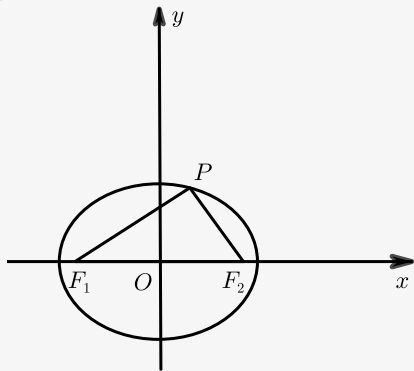
$$\because \angle F_2PF_1 = 90^\circ, \angle PF_2F_1 = 60^\circ, \therefore \frac{|PF_2|}{|PF_1|} = \frac{1}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \sqrt{3}|PF_2| = |PF_1|, \therefore (\sqrt{3} + 1)|PF_2| = 2a.$$

$$\because |F_1F_2| = 2c, \therefore |PF_2| = c, \therefore (\sqrt{3} + 1)c = 2a,$$

$$\therefore \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{3} + 1} = \sqrt{3} - 1.$$

方法二:



设 $|PF_2| = x, x > 0$, 则 $|F_1F_2| = 2x, |PF_1| = \sqrt{3}x$,

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2c}{2a} = \frac{|F_1F_2|}{|PF_1| + |PF_2|} = \frac{2x}{(1 + \sqrt{3})x} = \sqrt{3} - 1. \text{ 故选D.}$$

【标注】【知识点】求椭圆的离心率

20. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点, P 为椭圆 C 上一点,且 $\overrightarrow{PF_1} \perp \overrightarrow{PF_2}$,若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为16,则 $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 4

【解析】 $\because P$ 在椭圆 C 上,

又 $\because \overrightarrow{PF_1} \perp \overrightarrow{PF_2}$,

$$\therefore \angle F_1PF_2 = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle PF_1F_2$ 为焦点三角形,

$$\therefore S_{\triangle PF_1F_2} = b^2 \cdot \tan \frac{\angle F_1PF_2}{2},$$

$$\therefore 16 = b^2 \cdot \tan 45^\circ,$$

$$\text{又} \because b > 0,$$

$$\therefore b = 4.$$

故答案为：4.

【标注】【知识点】焦点三角形问题

21. 设 F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ 的两个焦点, P 是椭圆上的点,且 $|PF_1| : |PF_2| = 4 : 3$,则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为().

A. 30

B. 25

C. 24

D. 40

【答案】 C

【解析】 $\because |PF_1| : |PF_2| = 4 : 3,$

$\therefore$ 可设 $|PF_1| = 4k, |PF_2| = 3k,$

根据题意可知 $3k + 4k = 2a = 14,$

$$\therefore k = 2$$

$$\therefore |PF_1| = 8, |PF_2| = 6,$$

$$\therefore |F_1F_2| = 10,$$

$\therefore \triangle PF_1F_2$ 为直角三角形,

$$\text{其面积: } \frac{1}{2} \times |PF_1| \times |PF_2| = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24.$$

【标注】【知识点】椭圆的焦点三角形问题(小题)

22. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ,过点 F_2 的直线与椭圆交于 A, B 两点,若 $\triangle F_1AB$ 是以 A 为直角顶点的等腰直角三角形,则椭圆的离心率为().

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $2 - \sqrt{3}$

C. $\sqrt{5} - 2$

D. $\sqrt{6} - \sqrt{3}$

【答案】 D

【解析】 设 $|F_1F_2| = 2c, |AF_1| = m,$

因为 $\triangle F_1AB$ 是以 A 为直角顶点的等腰直角三角形, $\therefore |AB| = |AF_1| = m,$

$$|BF_1| = \sqrt{2}m.$$

由椭圆的定义可知 $\triangle F_1AB$ 的周长为 $4a,$

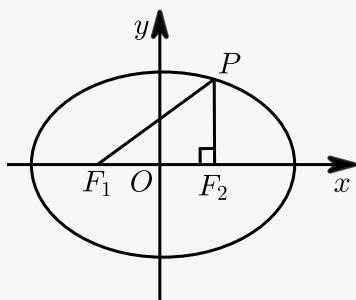
$$\therefore 4a = 2m + \sqrt{2}m, m = 2(2 - \sqrt{2})a.$$

$$\therefore |AF_2| = 2a - m = (2\sqrt{2} - 2)a.$$

在平面直角坐标系 xOy 中， F_1, F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点，椭圆上一点 P 满足 $PF_2 \perp F_1F_2$ ，若三角形 PF_1F_2 为等腰直角三角形，则该椭圆的离心率是_____。

【答案】 $\sqrt{2} - 1$

【解析】



由题意得 $PF_2 \perp F_1F_2$ ，

$$\therefore P\left(c, \frac{b^2}{a}\right) \text{ 即 } PF_2 = \frac{b^2}{a},$$

$\because F_1F_2 = 2c$ ，且等腰直角 $\triangle PF_1F_2$ ，

$$\therefore 2c = \frac{b^2}{a}, \text{ 即 } 2ca = a^2 - c^2,$$

$$\therefore 2\left(\frac{c}{a}\right) = 1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2, \text{ 即 } e^2 + 2e - 1 = 0,$$

$$\because 0 < e < 1,$$

$$\therefore e = \sqrt{2} - 1.$$

故答案为 $\sqrt{2} - 1$ 。

【标注】【知识点】求椭圆的离心率