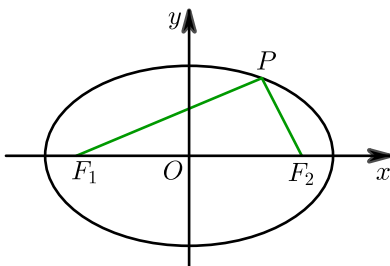
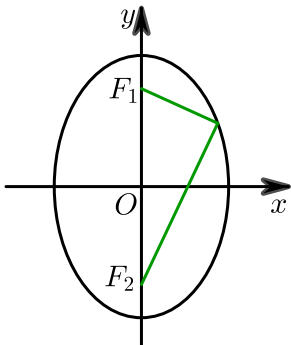


01椭圆性质综合应用

1. 椭圆的基础知识

椭圆的基本概念与基础性质

定义		
图形		
标准方程		
焦点		
顶点		
x,y的范围		
长轴、短轴、焦距		
a,b,c的关系		
离心率		

【备注】 【金金备注】 对于定义的解释：

平面内与两个定点 F_1, F_2 距离之和等于常数（大于 $|F_1F_2|$ ）的点的轨迹叫做**椭圆**。
这两个定点叫做椭圆的**焦点**，两焦点的距离叫做椭圆的**焦距**。

定义	$ PF_1 + PF_2 = 2a (2a > 2c > 0)$
----	--------------------------------------

🔗 椭圆的方程（题型1）

1. 若椭圆 $\frac{x^2}{k+8} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的离心率为 $e = \frac{1}{2}$ ，则 k 的值等于 _____。

【答案】 4 或 $-\frac{5}{4}$

【解析】若椭圆的焦点在 x 轴上，则 $a^2 = k + 8$ ， $b^2 = 9$ ， $c^2 = k - 1$ ，

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{k-1}{k+8} = \frac{1}{4}，解得k = 4；$$

若椭圆的焦点在 y 轴上，则 $a^2 = 9$ ， $c^2 = 9 - (k + 8) = 1 - k$ ，

$$e^2 = \frac{1-k}{9} = \frac{1}{4}，解得k = -\frac{5}{4}$$

【标注】【知识点】椭圆的标准方程

【素养】数学运算

【思想】分类讨论思想

2. 求适合下列条件的椭圆的标准方程：

(1) 长轴是短轴的3倍，且过点 $(3, -1)$ 。

(2) 椭圆过点 $(3, 0)$ ，离心率 $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 。

【答案】(1) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{2} = 1$ 或 $\frac{y^2}{82} + \frac{9x^2}{82} = 1$ 。

(2) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$ 或 $\frac{y^2}{27} + \frac{x^2}{9} = 1$ 。

【解析】(1) $\begin{cases} a = 3b \\ \frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = 3b \\ \frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \end{cases}$ ，
 $\therefore \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{2} = 1$ 或 $\frac{y^2}{82} + \frac{9x^2}{82} = 1$ 。

(2) $\begin{cases} a = 3 \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} b = 3 \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}$ 。
 $\therefore \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$ 或 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{27} = 1$ 。

【标注】【知识点】椭圆的标准方程；椭圆的离心率；椭圆的顶点与轴

3. 经过两点 $P_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ， $P_2\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ 的椭圆的标准方程为_____。

【答案】 $5x^2 + 4y^2 = 1$

【解析】设方程为 $mx^2 + ny^2 = 1$ ，

代入 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ， $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ，

得 $\frac{1}{9}m + \frac{1}{9}n = 1$ ， $\frac{1}{4}n = 1$ ，

解得 $m = 5$ ， $n = 4$ ，

故方程为 $5x^2 + 4y^2 = 1$ 。

【标注】【知识点】椭圆的标准方程

4. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点为 $(3, 0)$ ，点 $(-3, 2\sqrt{3})$ 在椭圆上，则该椭圆的方程为 () .
- A. $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{18} = 1$
 B. $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{27} = 1$,
 C. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$
 D. $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{6} = 1$

【答案】 A

【解析】 由题意椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点为 $(3, 0)$ ，可得 $c = 3$ ，点 $(-3, 2\sqrt{3})$ 在椭圆上，

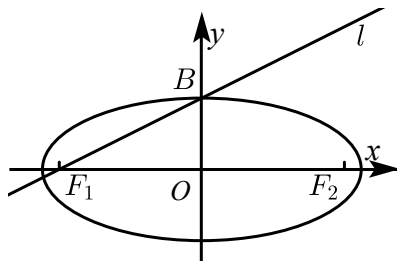
$$\text{可得: } \begin{cases} a^2 - b^2 = 9 \\ \frac{9}{a^2} + \frac{12}{b^2} = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } a^2 = 27, b^2 = 18,$$

$$\text{椭圆的方程: } \frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{18} = 1.$$

故选A .

【标注】 【知识点】 椭圆的标准方程

5. 如图，直线 $l: x - 2y + 2 = 0$ 过椭圆的左焦点 F_1 和一个顶点 B ，该椭圆的离心率为 () .



- A. $\frac{1}{5}$
 B. $\frac{2}{5}$
 C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$
 D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【答案】 D

【解析】 由已知 $F_1(-2, 0)$ ， $B(0, 1)$ ，

$$\text{故 } b = 1, c = 2, a = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5},$$

$$\text{从而 } e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

故选D .

【标注】 【素养】 直观想象

【素养】 数学运算

【知识点】求椭圆的离心率

● 椭圆的方程 (题型2)

6. 如果方程 $\frac{x^2}{4-m} + \frac{y^2}{m-3} = 1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆，则 m 的取值范围是()
- A. $3 < m < 4$
- B. $m > \frac{7}{2}$
- C. $3 < m < \frac{7}{2}$
- D. $\frac{7}{2} < m < 4$

【答案】 D

【解析】 解：由题意可得：方程 $\frac{x^2}{4-m} + \frac{y^2}{m-3} = 1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆，
所以 $4-m > 0$ ， $m-3 > 0$ 并且 $m-3 > 4-m$ ，解得： $\frac{7}{2} < m < 4$ 。
故选：D。

【标注】【知识点】椭圆的标准方程；椭圆的定义

7. 已知方程 $\frac{x^2}{5+k} + \frac{y^2}{4-2k} = 1$ 表示椭圆, 则 k 的取值范围为 _____.

【答案】 $\left(-5, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, 2\right)$

【解析】
$$\begin{cases} 5+k>0 \\ 4-2k>0 \\ 5+k\neq 4-2k \end{cases},$$
$$\therefore k\in\left(-5,-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3},2\right).$$
故答案为： $\left(-5,-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3},2\right).$

【标注】 **【知识点】** 椭圆的标准方程

8. “ $1 < m < 3$ ”是“方程 $\frac{x^2}{3-m} + \frac{y^2}{m-1} = 1$ 表示椭圆”的().
- A. 充要条件
B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】 C

【解析】若方程 $\frac{x^2}{3-m} + \frac{y^2}{m-1} = 1$ 表示椭圆，
 则 $\begin{cases} 3-m > 0 \\ m-1 > 0 \\ 3-m \neq m-1 \end{cases}$ ，
 解得 $1 < m < 3$ 且 $m \neq 2$ ，必要性成立，

此时 $\frac{x^2}{3-m} + \frac{y^2}{m-1} = 1$ 为圆, 充分性成立,

故选C.

9. “ $m > n > 0$ ”是“方程 $mx^2 + ny^2 = 1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆”的().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【解析】将方程 $mx^2 + ny^2 = 1$ 转化为 $\frac{x^2}{\frac{1}{m}} + \frac{y^2}{\frac{1}{n}} = 1$,

【知识点】椭圆的标准方程

10. 方程 $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} + \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 10$, 化简的结果是_____.

【解析】 $\because \sqrt{(x-2)^2 + y^2} + \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 10$,

$$\therefore \text{方程为 } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1.$$

【标注】【知识点】由曲线的方程研究曲线的性质；椭圆的标准方程；椭圆的定义

5

【答案】 2

【解析】 由椭圆定义可得, $|PF_1| + |PF_2| = 2a = 6$,

$$\therefore |PF_1| = 4,$$

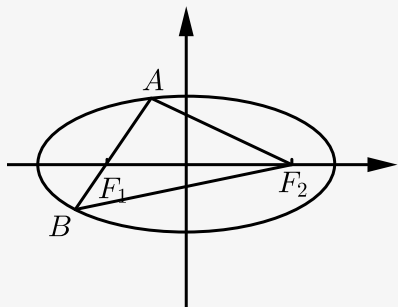
$$\therefore |PF_2| = 2.$$

【标注】 【知识点】 椭圆的定义

12. 已知椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, F_1 是椭圆的左焦点, F_2 是椭圆的右焦点, 过点 F_1 作直线交椭圆于 A, B 两点, 则 $\triangle ABF_2$ 的周长为 _____.

【答案】 $4\sqrt{2}$

【解析】



$$\begin{aligned} & |AB| + |AF_2| + |BF_2| \\ &= |AF_1| + |BF_1| + |AF_2| + |BF_2| \\ &= 4a, \end{aligned}$$

$$\because \text{椭圆为 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1,$$

$$\therefore a = \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{其周长为 } 4\sqrt{2}.$$

【标注】 【知识点】 焦点三角形问题

13. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 过 F_2 的直线 l 交 C 与 A, B 两点, 若 $\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{3}$, 则 C 的方程为 ().

- A. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$
B. $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$
C. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$
D. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$

【答案】 A

【解析】 $\because \triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{3}$ ， $\triangle AF_1B$ 的周长

$$= |AF_1| + |AF_2| + |BF_1| + |BF_2| = 2a + 2a = 4a,$$

$$\therefore 4a = 4\sqrt{3}, \therefore a = \sqrt{3}. \therefore \text{离心率 } \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}, c = 1, \therefore b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1. \text{ 故选 A.}$$

【标注】【知识点】椭圆的标准方程

14. 已知椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上的点 M 到该椭圆一个焦点 F 的距离为 2， N 是 MF 的中点， O 为坐标原点，那么线段 ON 的长是 () .

A. 2

B. 4

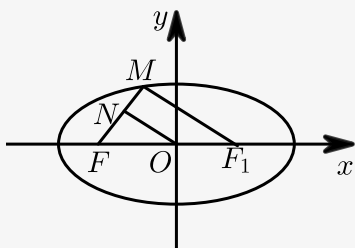
C. 8

D. $\frac{3}{2}$

【答案】B

【解析】 $\because$ 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$,

$$\therefore a = 5,$$



设椭圆另一焦点为 F_1 ,

$$\text{则 } |MF_1| + |MF| = 2a = 10,$$

$$\text{因此 } |MF_1| = 2a - |MF| = 10 - 2 = 8,$$

又 $\because N$ 为 MF 的中点， O 为 FF_1 的中点，

$\therefore ON$ 为 $\triangle MF_1F$ 的中位线，

$$\therefore |ON| = \frac{1}{2} |MF_1| = 4.$$

故选 B.

【标注】【知识点】椭圆的标准方程；椭圆的定义

长短轴、焦距

15. 一个椭圆的半焦距为 2，离心率 $e = \frac{2}{3}$ ，那么它的短轴长是 () .

A. 3

B. $\sqrt{5}$

C. $2\sqrt{5}$

D. 6

【答案】C

【解析】由题意得， $c = 2$ ，又 $e = \frac{2}{3}$ ，

$$\text{即：}\frac{c}{a} = \frac{2}{3}，$$

所以 $a = 3$ ，又 $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5}$ ，椭圆的短轴长是 $2b = 2\sqrt{5}$ ，

故选：C。

【标注】【知识点】椭圆的离心率

16. 已知两个椭圆 $ax^2 + y^2 = 8$ 与 $9x^2 + 25y^2 = 100$ 的焦距相等，则 a 的值为（ ）

A. 9或 $\frac{9}{17}$

B. $\frac{3}{4}$ 或 $\frac{3}{2}$

C. 9或 $\frac{3}{4}$

D. $\frac{9}{17}$ 或 $\frac{3}{2}$

【答案】A

【解析】将椭圆 $C_1: 9x^2 + 25y^2 = 100$ 化成标准方程： $\frac{x^2}{\frac{100}{9}} + \frac{y^2}{4} = 1$ ，

$$\therefore \text{椭圆} C_1 \text{的半焦距为} C = \sqrt{\frac{100}{9} - 4} = \frac{8}{3}.$$

$$\text{焦距为} 2c = \frac{16}{3},$$

$$\text{再将椭圆} C_2: ax^2 + y^2 = 8 \text{化成标准方程：}\frac{x^2}{\frac{8}{a}} + \frac{y^2}{8} = 1,$$

两个椭圆的焦距相等，

$$\text{所以椭圆} C_2 \text{的半焦距也是} \frac{8}{3},$$

接下来分两种情况讨论：

①当焦点在 x 轴上时，

$$C = \sqrt{\frac{8}{a} - 8} = \frac{8}{3}, \text{解之得} a = \frac{9}{17}.$$

②当焦点在 y 轴上时，

$$C = \sqrt{8 - \frac{8}{a}} = \frac{8}{3}, \text{解之得} a = 9.$$

综上所述：得 a 的值为9或 $\frac{9}{17}$ 。

故选A。

【标注】【知识点】椭圆的顶点与轴

17. “椭圆 $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{m} = 1$ 的焦距为2”是“ $m = 6$ ”的 _____ 条件。

【答案】必要不充分

【解析】焦点在 x 轴 $a^2 = 7$ ， $b^2 = m$ ， $2c = 2$ 则 $c = 1$ ， $c^2 = a^2 - b^2 = 1$ ，得 $m = 6$ ，

焦点在 y 轴 $a^2 = m$ ， $b^2 = 7$ ， $c^2 = a^2 - b^2 = 1$ 得 $m = 8$ ，

即“椭圆 $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{m} = 1$ 的焦距为2”等价于“ $m = 6$ 或8”，
“ $m = 6$ 或8”是“ $m = 6$ ”的必要不充分条件．

【标注】【知识点】充要条件与解析几何结合；椭圆的标准方程

18. 焦点在 x 轴上，长、短半轴长之和为10，焦距为 $4\sqrt{5}$ ，则椭圆的标准方程为（ ）．

- A. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} = 1$
 B. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$
 C. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$
 D. $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{9} = 1$

【答案】 C

【解析】 焦点在 x 轴上，长、短半轴长之和为10，焦距为 $4\sqrt{5}$ ，
 可得 $a + b = 10$ ， $2c = 4\sqrt{5}$ ， $c = 2\sqrt{5}$ ，即 $a^2 - b^2 = 20$ ，
 解得 $a^2 = 36$ ， $b^2 = 16$ ，
 所求椭圆方程为： $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ ．
 故选C．

【标注】【知识点】椭圆的标准方程

离心率

19. 已知椭圆 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{k} = 1$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{10}}{5}$ ，则实数 k 的值为（ ）．
- A. 3
 B. 3或 $\frac{25}{3}$
 C. $\sqrt{5}$
 D. $\sqrt{15}$ 或 $\frac{\sqrt{15}}{3}$

【答案】 B

【解析】 当 $k > 5$ 时， $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{k-5}}{\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$ ， $k = \frac{25}{3}$ ．
 当 $0 < k < 5$ 时， $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5-k}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$ ， $k = 3$ ．综上， $k = 3$ 或 $\frac{25}{3}$ ．
 故选：B．

【标注】【知识点】已知椭圆的离心率求其他参数

【素养】 数学运算

20. 已知椭圆 $mx^2 + 4y^2 = 1$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，则实数 m 等于()
- A. 2
B. 2或 $\frac{8}{3}$
C. 2或6
D. 2或8

【答案】 D

【解析】 椭圆 $mx^2 + 4y^2 = 1$ ，显然 $m > 0$ 且 $m \neq 4$.

当 $0 < m < 4$ 时，椭圆长轴在 x 轴上，则 $\frac{\sqrt{\frac{1}{m} - \frac{1}{4}}}{\sqrt{\frac{1}{m}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，解得 $m = 2$ ；

当 $m > 4$ 时，椭圆长轴在 y 轴上，则 $\frac{\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{m}}}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，解得 $m = 8$ ，

故选：D .

【标注】 【知识点】 已知椭圆的离心率求其他参数

21. 设 e 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{k} = 1$ 的离心率，且 $e \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ，则实数 k 的取值范围是 ____ .

【答案】 $(0, 3) \cup \left(\frac{16}{3}, +\infty\right)$

【解析】 解：由于椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{k} = 1$ ，

①若 $4 > k > 0$ ， $a^2 = 4$ ， $b^2 = k$ ， $c^2 = 4 - k$ ，

$\therefore e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{4 - k}{4} > \frac{1}{4}$ ， $\therefore k < 3$ ，

则有 $0 < k < 3$ ；

②若 $k > 4$ ，则 $a^2 = k$ ， $b^2 = 4$ ， $c^2 = k - 4$ ，

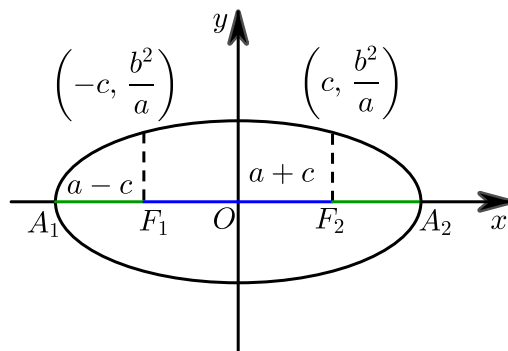
$\therefore e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{k - 4}{k} > \frac{1}{4}$ ， $\therefore k > \frac{16}{3}$.

则有实数 k 的取值范围是 $(0, 3) \cup \left(\frac{16}{3}, +\infty\right)$.

故答案为： $(0, 3) \cup \left(\frac{16}{3}, +\infty\right)$.

【标注】 【知识点】 求椭圆的离心率

2. 椭圆性质的简单扩展



1. 椭圆的通径

(1) 定义：过椭圆的焦点且垂直于长轴的直线被椭圆截得的弦称为椭圆的通径

(2) 长度：无论焦点在 x 轴上还是在 y 轴上，椭圆的通径长均为 $\frac{2b^2}{a}$

【备注】 【答案】 $\frac{2b^2}{a}$

2. 两个最值

① 椭圆上到中心距离最小的点是短轴的两个端点，到中心距离最大的点是长轴的两个端点.

② 椭圆上到焦点距离最大和最小的点是长轴的两个端点，
距离的最大值为_____，距离的最小值为_____.

【备注】 【答案】 $a + c, a - c$

3. 焦点三角形

① 焦点三角形的周长 $L = 2a + 2c$.

② 焦点三角形的面积 $S_{\triangle F_1MF_2} = \frac{1}{2} |MF_1| |MF_2| \sin \frac{\angle F_1MF_2}{2} = b^2 \tan \frac{\angle F_1MF_2}{2}$.

【备注】 【焦点三角形面积公式证明】

设 $\angle F_1MF_2 = \alpha$.

因为 M 在椭圆上，所以 $|MF_1| + |MF_2| = 2a$,

所以 $|MF_1|^2 + |MF_2|^2 + 2|MF_1||MF_2| = 4a^2$ ①.

在 $\triangle F_1MF_2$ 中， $|MF_1|^2 + |MF_2|^2 - 2|MF_1||MF_2| \cos \alpha = |F_1F_2|^2 = 4c^2$ ②.

①-②得 $2(1 + \cos \alpha)|MF_1||MF_2| = 4(a^2 - c^2) = 4b^2$.

所以 $|MF_1||MF_2| = \frac{2b^2}{1 + \cos \alpha}$, 所以 $S_{\triangle F_1MF_2} = \frac{1}{2} |MF_1||MF_2| \sin \alpha =$
 $\frac{b^2 \cdot \sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = b^2 \tan \frac{\alpha}{2}$,
 即 $S_{\triangle F_1MF_2} = b^2 \tan \frac{\angle F_1MF_2}{2}$.

🔴 焦点三角形

22. 若椭圆两焦点为 $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$, 点 P 在椭圆上，且 $\triangle PF_1F_2$ 的面积的最大值为 12，则此椭圆的方程是_____.

【答案】 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

【解析】 设 P 点坐标为 (x, y) , 则 $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2}|F_1F_2||y| = 4|y|$.

显然当 $|y|$ 最大时, 三角形面积最大. 因为 P 点在椭圆上, 所以当 P 在 y 轴上时, $|y|$ 最大, 所以 P 点的坐标为 $(0, \pm 3)$, 所以 $b = 3$.

因为 $a^2 = b^2 + c^2$, 所以 $a^2 = 25$.

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

【标注】【知识点】椭圆的标准方程

23. 椭圆 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 , 椭圆上的点 P 满足 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积是 () .

A. $\frac{64\sqrt{3}}{3}$
C. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{91\sqrt{3}}{3}$
D. $\frac{64}{3}$

【答案】 A

【解析】 $\because$ 椭圆 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 , 椭圆上的点 P 满足 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$,

$\therefore$ 由椭圆定义得: $|PF_1| + |PF_2| = 20$,

$\therefore |PF_1|^2 + |PF_2|^2 + 2|PF_1| \cdot |PF_2| = 400$ ①,

由余弦定理得: $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1||PF_2| \cdot \cos \angle F_1PF_2 = 4 \times 36$, ②

联立①②得: $|PF_1||PF_2| = \frac{256}{3}$,

$\therefore \triangle F_1PF_2$ 的面积是 $S = \frac{1}{2}|PF_1||PF_2| \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{256}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{64\sqrt{3}}{3}$.

故选A.

【标注】【知识点】椭圆的定义; 焦点三角形问题; 余弦定理; 三角形面积公式

24. 设 P 为椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上的一点, F_1, F_2 分别为椭圆的左、右焦点, 且 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$, 则

$|PF_1| - |PF_2|$ 等于 () .

A. $\frac{8}{3}$
C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{16}{3}$
D. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

【答案】 B

【解析】 由椭圆方程得 $a = 3, b = 2, c = \sqrt{5}$,

$|PF_1| + |PF_2| = 2a = 6$,

在 $\triangle F_1PF_2$ 中由余弦定理得：

$$\begin{aligned} |F_1F_2|^2 &= |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2 \cdot |PF_1| \cdot |PF_2| \cdot \cos 60^\circ \\ &= (|PF_1| + |PF_2|)^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| \\ &\quad - 2|PF_1| \cdot |PF_2| \cdot \cos 60^\circ, \end{aligned}$$

$$\text{即 } 20 = 36 - 3|PF_1| \cdot |PF_2|,$$

$$\therefore |PF_1| \cdot |PF_2| = \frac{16}{3},$$

故选B.

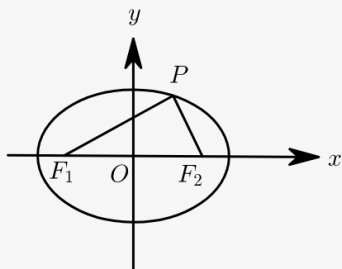
【标注】【知识点】解三角形的实际应用

25. 已知 F_1 、 F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的两个焦点, P 为椭圆 C 上一点, 且 $PF_1 \perp PF_2$. 若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为9, 则 $b =$ _____.

【答案】 3

【解析】 方法一：依题意，得
$$\begin{cases} |PF_1| + |PF_2| = 2a, \\ |PF_1| \cdot |PF_2| = 18, \\ |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 4c^2, \end{cases}$$
 可得 $4c^2 + 36 = 4a^2$, 即 $a^2 - c^2 = b^2 = 9$, 故 $b = 3$.

方法二：如图，



$$\therefore \overrightarrow{PF_1} \perp \overrightarrow{PF_2},$$

$\therefore \triangle PF_1F_2$ 为直角三角形，

又 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为9，

$$\therefore \frac{1}{2}|PF_1||PF_2| = 9, \text{ 得 } |PF_1||PF_2| = 18,$$

在 $\text{Rt}\triangle PF_1F_2$ 中，由勾股定理得： $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2$ ，

$$\therefore (|PF_1| + |PF_2|)^2 - 2|PF_1||PF_2| = 4c^2, \text{ 即 } 2(a^2 - c^2) = |PF_1||PF_2| = 18,$$

$$\text{得 } b^2 = a^2 - c^2 = 9,$$

$$\therefore b = 3.$$

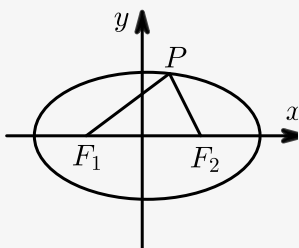
【标注】【知识点】椭圆的定义

26. 已知椭圆的左、右焦点为 F_1 、 F_2 ， P 是椭圆上的一点，若 $PF_1 \perp PF_2$ ，且 $PF_1 > PF_2$ ，离心率为 $\sqrt{3} - 1$ ，则 $\tan \angle PF_2F_1 =$ _____.

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{3} - 1$,

设 $P(x_0, y_0)$, 由椭圆性质 $|PF_1| = a + ex_0$, $|PF_2| = a - ex_0$,



$e = \frac{c}{a} = \sqrt{3} - 1$,

$|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2 \rightarrow ex_0 = (2 - \sqrt{3})a$,

故 $\tan \angle PF_2F_1 = \frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{a + ex_0}{a - ex_0}$
 $= \frac{(3 - \sqrt{3})a}{(\sqrt{3} - 1)a}$
 $= \sqrt{3}$.

故答案为: $\sqrt{3}$.

【标注】 【知识点】 椭圆的离心率; 椭圆的定义

27. 已知离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 的椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 在椭圆上, 若 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$, 且 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 4, 则椭圆的方程为 _____.

【答案】 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$

【解析】 方法一: 由焦点三角形 F_1PF_2 的面积

$S_{\triangle F_1PF_2} = b^2 \tan \frac{\theta}{2} (\theta = \angle F_1PF_2)$.

又由 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$, 则 $PF_1 \perp PF_2$,

则 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ = \theta$, 则 $S_{\triangle F_1PF_2} = b^2 \tan 45^\circ = 4$, 解得 $b^2 = 4$.

又由 $\frac{c}{a} = e = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 得 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{2}{3}$, 解得 $a^2 = 12$, $b^2 = 4$.

则椭圆的方程为 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$.

故答案为: $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$.

方法二: 由题设可知, 点 P 在椭圆上, 则 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$.

又由 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$, 得 $PF_1 \perp PF_2$, 则 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$.

又由 $S_{\triangle F_1PF_2} = \frac{1}{2} |PF_1| |PF_2| = 4$, 则 $|PF_1| |PF_2| = 8$.

又由 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = (2c)^2$,

即 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 + 2|PF_1| |PF_2| = 4c^2 + 16 = 4a^2$, 解得 $b^2 = 4$.

又由离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 解得 $a^2 = 12$.
 故椭圆的方程为 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$.
 故答案为: $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$.

【标注】【知识点】已知椭圆的离心率求其他参数

28. 椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 , 点 P 在椭圆上 , 若 $\triangle F_1PF_2$ 为直角三角形 , 则点 P 到 x 轴的距离为 _____ .

【答案】 $\frac{16}{5}$ 或 $\frac{16}{3}$

【解析】 设点 $P(x, y)$, 则点 P 到 x 轴的距离为 $|y|$,

$\because a = 5, b = 4, \therefore c = 3$.

(1) 若 $\angle PF_1F_2 = 90^\circ$ 或 $\angle PF_2F_1 = 90^\circ$,

令 $x = \pm 3$ 得 $y^2 = 16 \times \left(1 - \frac{9}{25}\right) = \frac{16^2}{25}$,

$\therefore |y| = \frac{16}{5}$, 即点 P 到 x 轴的距离为 $\frac{16}{5}$.

(2) 若 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$, 则 $\begin{cases} |PF_1| + |PF_2| = 10 \\ |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 6^2 \end{cases}$,

$\therefore |PF_1||PF_2| = \frac{1}{2} \times (10^2 - 6^2) = 32$,

$\therefore \frac{1}{2} |PF_1||PF_2| = \frac{1}{2} |F_1F_2||y|$,

$\therefore |y| = \frac{16}{3}$.

由 (1) (2) 知: 点 P 到 x 轴的距离为 $\frac{16}{5}$ 或 $\frac{16}{3}$.

故答案为: $\frac{16}{5}$ 或 $\frac{16}{3}$.

【标注】【知识点】椭圆的焦点三角形问题 (小题)

通径

29. 设 F_1, F_2 分别是椭圆 $E: x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < 1)$ 的左、右焦点 , 过点 F_1 的直线交椭圆 E 于 A, B 两点 . 若 $|AF_1| = 3|F_1B|$, $AF_2 \perp x$ 轴 , 则椭圆 E 的方程为 _____ .

【答案】 $x^2 + \frac{3}{2}y^2 = 1$

【解析】 方法一: 由题意得通径 $AF_2 = b^2$, 所以点 B 坐标为 $B(-\frac{5c}{3}, -\frac{1}{3}b^2)$

将点 B 坐标代入椭圆方程得 $(-\frac{5c}{3})^2 + \frac{(-\frac{1}{3}b^2)^2}{b^2} = 1$, 又 $b^2 = 1 - c^2$, 解得 $\begin{cases} b^2 = \frac{2}{3} \\ c^2 = \frac{1}{3} \end{cases}$

所以椭圆方程为 $x^2 + \frac{3}{2}y^2 = 1$.

方法二：由题意， $F_1(-c, 0)$ ， $F_2(c, 0)$ ， $AF_2 \perp x$ 轴， $\therefore |AF_2| = b^2$ ，
 $\therefore A$ 点坐标为 (c, b^2) ，
 设 $B(x, y)$ ，则 $\therefore |AF_1| = 3|F_1B|$ ， $\therefore (-c - c, -b^2) = 3(x + c, y)$
 $\therefore B\left(-\frac{5}{3}c, -\frac{1}{3}b^2\right)$ ，代入椭圆方程可得 $\left(-\frac{5}{3}c\right)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{3}b^2\right)^2}{b^2} = 1$ ，
 $\therefore 1 = b^2 + c^2$ ， $\therefore b^2 = \frac{2}{3}$ ， $c^2 = \frac{1}{3}$ ，
 $\therefore x^2 + \frac{3}{2}y^2 = 1$ 。
 故答案为： $x^2 + \frac{3}{2}y^2 = 1$ 。

【标注】【知识点】椭圆的标准方程；直线和椭圆的位置关系

30. 设椭圆的两个焦点分别为 F_1, F_2 ，过 F_2 作椭圆长轴的垂线与椭圆相交，其中的一个交点为 P ，若 $\triangle F_1PF_2$ 为等腰直角三角形，则椭圆的离心率是 _____。

【答案】 $\sqrt{2} - 1$

【解析】 设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，设点 $P(c, h)$ ，则 $\frac{c^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} = 1$ ，
 $h^2 = b^2 - \frac{b^2c^2}{a^2} = \frac{b^4}{a^2}$ ， $\therefore |h| = \frac{b^2}{a}$ ，由题意得 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$ ， $\angle PF_1F_2 = 45^\circ$ ，
 Rt $\triangle PF_1F_2$ 中， $\tan 45^\circ = 1 = \frac{PF_2}{F_1F_2} = \frac{PF_2}{2c} = \frac{|h|}{2c} = \frac{b^2}{2ac} = \frac{a^2 - c^2}{2ac}$ ，
 $\therefore a^2 - c^2 = 2ac$ ， $\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 2 \times \frac{c}{a} - 1 = 0$ ， $\therefore \frac{c}{a} = \sqrt{2} - 1$ 。
 故答案为： $\sqrt{2} - 1$ 。

【标注】【知识点】求椭圆的离心率

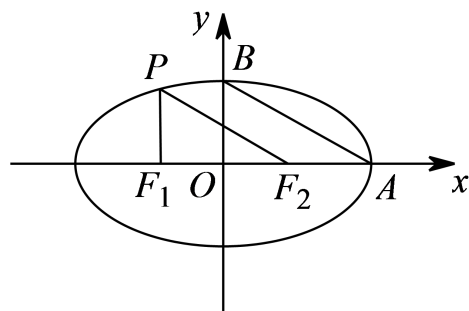
31. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点为 F_1, F_2 ，作 F_2 作 x 轴的垂线与 C 交于 A, B 两点， F_1B 与 y 轴交于点 D ，若 $AD \perp F_1B$ ，则椭圆 C 的离心率等于 _____。

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】 因为 AB 垂直于 x 轴，原点 O 为 F_1F_2 的中点，所以 D 为 F_1B 的中点，连接 AF_1 ，又
 $AD \perp F_1B$ ，可知 $\triangle AF_1B$ 为等边三角形，即 $|AF_1| = |AB|$ 。记 $|F_1F_2| = 2c$ ，则
 $|AF_2| = \frac{2c}{\sqrt{3}}$ ， $|AF_1| = \frac{4c}{\sqrt{3}}$ ，所以 $|AF_1| + |AF_2| = \frac{4c}{\sqrt{3}} + \frac{2c}{\sqrt{3}} = 2a$ ，得 $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

【标注】【知识点】求椭圆的离心率

32. 如图所示，椭圆的中点在原点，焦点 F_1, F_2 在 x 轴上， A, B 是椭圆的顶点， P 是椭圆上一点，且
 $PF_1 \perp x$ 轴， $PF_2 \parallel AB$ ，则此椭圆的离心率是 ()。



A. $\frac{1}{2}$
C. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$
D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】 B

【解析】 由题意得，把 $x = -c$ 代入椭圆方程得：

$$y = \pm \frac{b^2}{a}, \text{ 故 } P\left(-c, \frac{b^2}{a}\right),$$

$$\text{又} \because A(0, b), B(a, 0), F_2(c, 0)$$

$$k_{AB} = -\frac{b}{a}, k_{PF_2} = \frac{-b^2}{2ac},$$

$$\therefore -\frac{b}{a} = \frac{-b^2}{2ac}, b = 2c$$

$$\therefore b^2 = 4c^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow a^2 = 5c^2,$$

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

故选B.

【标注】【知识点】求椭圆的离心率

33. 设 F_1, F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点，过 F_2 的直线交椭圆于 P, Q 两点，若 $\angle F_1PQ = 60^\circ, |PF_1| = |PQ|$ ，则椭圆的离心率为 () .

A. $\frac{1}{3}$
C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{2}{3}$
D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】 D

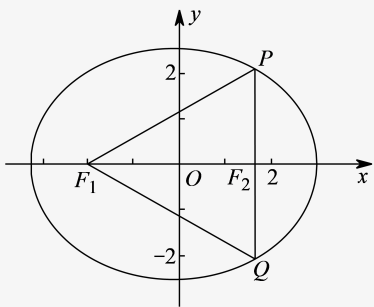
【解析】 设 $|PF_1| = t$,

$$\because |PF_1| = |PQ|, \angle F_1PQ = 60^\circ,$$

$$\therefore |PQ| = t, |F_1Q| = t,$$

$$\text{由} \triangle F_1PQ \text{ 为等边三角形, 得 } |F_1P| = |F_1Q|,$$

由对称性可知， PQ 垂直于 x 轴，



F_2 为 PQ 的中点, $|PF_2| = \frac{t}{2}$,

$\therefore |F_1F_2| = \frac{\sqrt{3}}{2}t$, 即 $2c = \frac{\sqrt{3}}{2}t$,

由椭圆定义: $|PF_1| + |PF_2| = 2a$, 即 $2a = t + \frac{t}{2} = \frac{3}{2}t$,

$\therefore$ 椭圆的离心率为: $e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}t}{\frac{3}{2}t} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选D.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】求椭圆的离心率