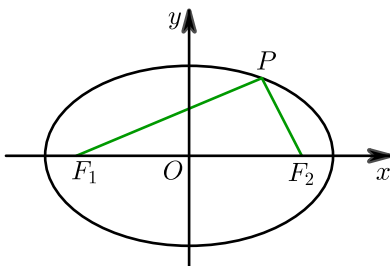
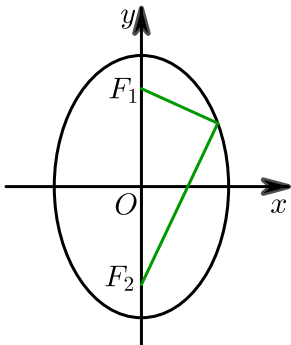


# 01椭圆性质综合应用

## 1. 椭圆的基础知识

### 椭圆的基本概念与基础性质

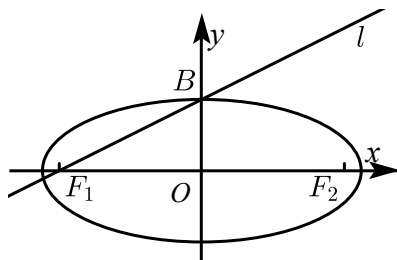
|          |                                                                                   |                                                                                     |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 定义       |                                                                                   |                                                                                     |
| 图形       |  |  |
| 标准方程     |                                                                                   |                                                                                     |
| 焦点       |                                                                                   |                                                                                     |
| 顶点       |                                                                                   |                                                                                     |
| x,y的范围   |                                                                                   |                                                                                     |
| 长轴、短轴、焦距 |                                                                                   |                                                                                     |
| a,b,c的关系 |                                                                                   |                                                                                     |
| 离心率      |                                                                                   |                                                                                     |

### 🧠 椭圆的方程 (题型1)

- 若椭圆  $\frac{x^2}{k+8} + \frac{y^2}{9} = 1$  的离心率为  $e = \frac{1}{2}$  , 则  $k$  的值等于 \_\_\_\_ .
- 求适合下列条件的椭圆的标准方程 :  
 ( 1 ) 长轴是短轴的3倍 , 且过点  $(3, -1)$  .  
 ( 2 ) 椭圆过点  $(3, 0)$  , 离心率  $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$  .
- 经过两点  $P_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$  ,  $P_2\left(0, -\frac{1}{2}\right)$  的椭圆的标准方程为 \_\_\_\_ .
- 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的一个焦点为  $(3, 0)$  , 点  $(-3, 2\sqrt{3})$  在椭圆上 , 则该椭圆的方程为 ( ) .

- A.  $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{18} = 1$   
 B.  $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{27} = 1$ ,  
 C.  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$   
 D.  $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{6} = 1$

5. 如图, 直线  $l: x - 2y + 2 = 0$  过椭圆的左焦点  $F_1$  和一个顶点  $B$ , 该椭圆的离心率为 ( ).



- A.  $\frac{1}{5}$   
 B.  $\frac{2}{5}$   
 C.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$   
 D.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

### 🔔 椭圆的方程 (题型2)

6. 如果方程  $\frac{x^2}{4-m} + \frac{y^2}{m-3} = 1$  表示焦点在  $y$  轴上的椭圆, 则  $m$  的取值范围是 ( ).

- A.  $3 < m < 4$   
 B.  $m > \frac{7}{2}$   
 C.  $3 < m < \frac{7}{2}$   
 D.  $\frac{7}{2} < m < 4$

7. 已知方程  $\frac{x^2}{5+k} + \frac{y^2}{4-2k} = 1$  表示椭圆, 则  $k$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.

8. “ $1 < m < 3$ ”是“方程  $\frac{x^2}{3-m} + \frac{y^2}{m-1} = 1$  表示椭圆”的 ( ).

- A. 充要条件  
 B. 充分不必要条件  
 C. 必要不充分条件  
 D. 既不充分也不必要条件

9. “ $m > n > 0$ ”是“方程  $mx^2 + ny^2 = 1$  表示焦点在  $y$  轴上的椭圆”的 ( ).

- A. 充分不必要条件  
 B. 必要不充分条件  
 C. 充要条件  
 D. 既不充分也不必要条件

### 🔔 椭圆的定义及基础应用

10. 方程  $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} + \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 10$ , 化简的结果是 \_\_\_\_\_.

11. 椭圆  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$  的焦点为  $F_1, F_2$ , 点  $P$  在椭圆上. 若  $|PF_1| = 4$ , 则  $|PF_2| =$  \_\_\_\_\_. (用数字填写)

12. 已知椭圆  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ,  $F_1$  是椭圆的左焦点,  $F_2$  是椭圆的右焦点, 过点  $F_1$  作直线交椭圆于  $A, B$  两点, 则  $\triangle ABF_2$  的周长为 \_\_\_\_\_.

13. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点为  $F_1, F_2$ , 离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , 过  $F_2$  的直线  $l$  交  $C$  与  $A, B$  两点, 若  $\triangle AF_1B$  的周长为  $4\sqrt{3}$ , 则  $C$  的方程为 ( ).
- A.  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$   
 B.  $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$   
 C.  $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$   
 D.  $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$
14. 已知椭圆  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  上的点  $M$  到该椭圆一个焦点  $F$  的距离为 2,  $N$  是  $MF$  的中点,  $O$  为坐标原点, 那么线段  $ON$  的长是 ( ).
- A. 2                      B. 4                      C. 8                      D.  $\frac{3}{2}$

### 长短轴、焦距

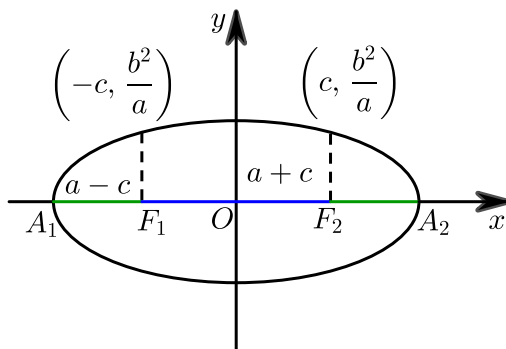
15. 一个椭圆的半焦距为 2, 离心率  $e = \frac{2}{3}$ , 那么它的短轴长是 ( ).
- A. 3                      B.  $\sqrt{5}$                       C.  $2\sqrt{5}$                       D. 6
16. 已知两个椭圆  $ax^2 + y^2 = 8$  与  $9x^2 + 25y^2 = 100$  的焦距相等, 则  $a$  的值为 ( ).
- A. 9 或  $\frac{9}{17}$                       B.  $\frac{3}{4}$  或  $\frac{3}{2}$   
 C. 9 或  $\frac{3}{4}$                       D.  $\frac{9}{17}$  或  $\frac{3}{2}$
17. “椭圆  $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{m} = 1$  的焦距为 2” 是 “ $m = 6$ ” 的 \_\_\_\_\_ 条件.
18. 焦点在  $x$  轴上, 长、短半轴长之和为 10, 焦距为  $4\sqrt{5}$ , 则椭圆的标准方程为 ( ).
- A.  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} = 1$   
 B.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$   
 C.  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$   
 D.  $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{9} = 1$

### 离心率

19. 已知椭圆  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{k} = 1$  的离心率  $e = \frac{\sqrt{10}}{5}$ , 则实数  $k$  的值为 ( ).
- A. 3                      B. 3 或  $\frac{25}{3}$   
 C.  $\sqrt{5}$                       D.  $\sqrt{15}$  或  $\frac{\sqrt{15}}{3}$
20. 已知椭圆  $mx^2 + 4y^2 = 1$  的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 则实数  $m$  等于 ( ).
- A. 2                      B. 2 或  $\frac{8}{3}$   
 C. 2 或 6                      D. 2 或 8

21. 设 $e$ 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{k} = 1$ 的离心率, 且 $e \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ , 则实数 $k$ 的取值范围是\_\_\_\_\_.

## 2. 椭圆性质的简单扩展



### 1. 椭圆的通径

(1) 定义: 过椭圆的焦点且垂直于长轴的直线被椭圆截得的弦称为椭圆的通径

(2) 长度: 无论焦点在 $x$ 轴上还是在 $y$ 轴上, 椭圆的通径长均为 $\frac{2b^2}{a}$

### 2. 两个最值

①椭圆上到中心距离最小的点是短轴的两个端点, 到中心距离最大的点是长轴的两个端点.

②椭圆上到焦点距离最大和最小的点是长轴的两个端点,

距离的最大值为\_\_\_\_\_, 距离的最小值为\_\_\_\_\_.

### 3. 焦点三角形

①焦点三角形的周长 $L = 2a + 2c$ .

②焦点三角形的面积 $S_{\triangle F_1MF_2} = \frac{1}{2} |MF_1| |MF_2| \sin \frac{\angle F_1MF_2}{2} = b^2 \tan \frac{\angle F_1MF_2}{2}$ .

### 🔗 焦点三角形

22. 若椭圆两焦点为 $F_1(-4, 0)$ ,  $F_2(4, 0)$ , 点 $P$ 在椭圆上, 且 $\triangle PF_1F_2$ 的面积的最大值为12, 则此椭圆的方程是\_\_\_\_\_.

23. 椭圆 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ 的焦点为 $F_1$ 、 $F_2$ , 椭圆上的点 $P$ 满足 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ , 则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积是( ) .

A.  $\frac{64\sqrt{3}}{3}$

B.  $\frac{91\sqrt{3}}{3}$

C.  $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

D.  $\frac{64}{3}$

24. 设 $P$ 为椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上的一点,  $F_1$ 、 $F_2$ 分别为椭圆的左、右焦点, 且 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ , 则

$|PF_1| - |PF_2|$ 等于( ) .

A.  $\frac{8}{3}$

B.  $\frac{16}{3}$

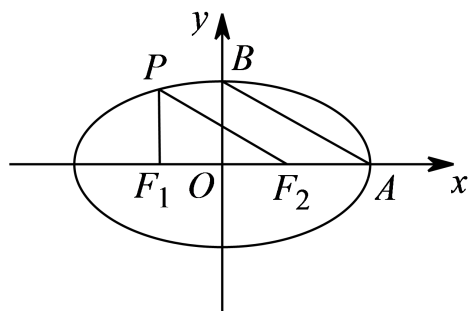
C.  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

D.  $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

25. 已知 $F_1$ 、 $F_2$ 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点,  $P$ 为椭圆 $C$ 上一点, 且 $PF_1 \perp PF_2$ . 若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为9, 则 $b =$  \_\_\_\_\_ .
26. 已知椭圆的左、右焦点为 $F_1, F_2$ ,  $P$ 是椭圆上的一点, 若 $PF_1 \perp PF_2$ , 且 $PF_1 > PF_2$ , 离心率为 $\sqrt{3} - 1$ , 则 $\tan \angle PF_2F_1 =$  \_\_\_\_\_ .
27. 已知离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 的椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点分别为 $F_1, F_2$ , 点 $P$ 在椭圆上, 若 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$ , 且 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为4, 则椭圆的方程为 \_\_\_\_\_ .
28. 椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的左、右焦点分别为 $F_1, F_2$ , 点 $P$ 在椭圆上, 若 $\triangle F_1PF_2$ 为直角三角形, 则点 $P$ 到 $x$ 轴的距离为 \_\_\_\_\_ .

 通径

29. 设 $F_1, F_2$ 分别是椭圆 $E: x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < 1)$ 的左、右焦点, 过点 $F_1$ 的直线交椭圆 $E$ 于 $A, B$ 两点. 若 $|AF_1| = 3|F_1B|$ ,  $AF_2 \perp x$ 轴, 则椭圆 $E$ 的方程为 \_\_\_\_\_.
30. 设椭圆的两个焦点分别为 $F_1, F_2$ , 过 $F_2$ 作椭圆长轴的垂线与椭圆相交, 其中的一个交点为 $P$ , 若 $\triangle F_1PF_2$ 为等腰直角三角形, 则椭圆的离心率是 \_\_\_\_\_.
31. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点为 $F_1, F_2$ , 作 $F_2$ 作 $x$ 轴的垂线与 $C$ 交于 $A, B$ 两点,  $F_1B$ 与 $y$ 轴交于点 $D$ , 若 $AD \perp F_1B$ , 则椭圆 $C$ 的离心率等于 \_\_\_\_\_.
32. 如图所示, 椭圆的中点在原点, 焦点 $F_1, F_2$ 在 $x$ 轴上,  $A, B$ 是椭圆的顶点,  $P$ 是椭圆上一点, 且 $PF_1 \perp x$ 轴,  $PF_2 \parallel AB$ , 则此椭圆的离心率是 ( ).



33. 设  $F_1, F_2$  分别是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点, 过  $F_2$  的直线交椭圆于  $P, Q$  两点, 若  $\angle F_1 P Q = 60^\circ, |PF_1| = |PQ|$ , 则椭圆的离心率为 ( ) .
- A.  $\frac{1}{3}$  B.  $\frac{2}{3}$   
C.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  D.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

