

计数原理2

一轮整合计划

☉ $\emptyset$ 与 $\{0\}$ 和 $\{\emptyset\}$ 的关系

$$\emptyset \subsetneq \{0\}; \emptyset \in \{\emptyset\}; \emptyset \subsetneq \{\emptyset\}.$$

☉ 元素个数为 n 的子集的个数

$$2^n$$

☉ 简述交集、并集、补集的定义

设 A, B 是两个集合, U 为全集.

由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合, 叫做集合 A 与集合 B 的交集, 记作 $A \cap B$;

由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合, 叫做集合 A 与集合 B 的并集, 记作 $A \cup B$;

由所有属于集合 U 但不属于集合 A 的元素所组成的集合, 叫做集合 A 在集合 U 中的补集, 记作 $\complement_U A$.

☉ 对数的性质以及运算法则

(1)对数的性质: ① $a^{\log_a N} = N$; ② $\log_a a^b = b (a > 0, \text{且} a \neq 1)$

(2)对数的运算法则

如果 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$, 那么

$$\textcircled{1} \log_a(MN) = \log_a M + \log_a N; \textcircled{2} \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N;$$

$$\textcircled{3} \log_a M^n = n \log_a M (n \in \mathbf{R}); \textcircled{4} \log_{a^m} M^n = \frac{n}{m} \log_a M (m, n \in \mathbf{R}, \text{且} m \neq 0).$$

☉ 对数函数的图象与性质

对数函数图象及其性质

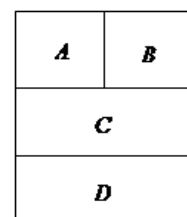
	$a > 1$	$0 < a < 1$
图象		
性质	定义域： $(0, +\infty)$	
	值域： $\mathbf{R}$	
	当 $x = 1$ 时， $y = 0$ ，即过定点 $(1, 0)$	
	当 $x > 1$ 时， $y > 0$ ； 当 $0 < x < 1$ 时， $y < 0$	当 $x > 1$ 时， $y < 0$ ； 当 $0 < x < 1$ 时， $y > 0$
	在 $(0, +\infty)$ 上是增函数	在 $(0, +\infty)$ 上是减函数

一、排列组合

1. 涂色问题

用“大元素法”解决排列、组合中的染色问题，显得分类清楚，不重不漏，分类时要以所涂颜色种数分类，搞清有几对不相邻区域可同色(也即有几个大元素)，最少用几种颜色，最多用几种颜色，分选颜色、排区域涂颜色三步.

1. 如图所示，用4种不同的颜色涂入图中的矩形A, B, C, D中，要求相邻的矩形涂色不同，则不同的涂法() .



A. 72种

B. 48种

C. 24种

D. 12种

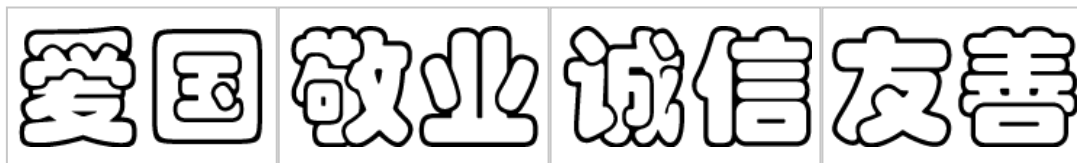
【答案】 A

【解析】 根据题意，首先涂A有 $C_4^1 = 4$ 种涂法，
则涂B有 $C_3^1 = 3$ 种涂法，
C与A、B相邻，则C有 $C_2^1 = 2$ 种涂法，
D只与C相邻，则D有 $C_3^1 = 3$ 种涂法。
所以，共有 $4 \times 3 \times 2 \times 3 = 72$ 种涂法，
故选A。

【标注】 【素养】 数学运算；逻辑推理；直观想象

【知识点】 染色问题

2. 现有4种不同的颜色为公民基本道德规范四个主题词（如图）涂色，要求相邻的词语涂色不同，则不同的涂法种数为（ ）。



A. 27

B. 54

C. 108

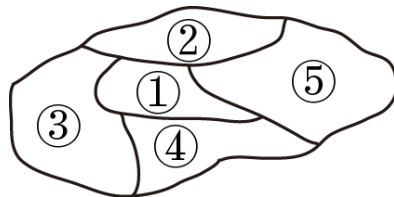
D. 144

【答案】 C

【解析】 根据分步计数原理知共有 $4 \times 3 \times 3 \times 3 = 108$ 种。
故选C。

【标注】 【知识点】 染色问题

3. 如图，一个地区分为5个行政区域，现给地图着色，要求相邻区域不得使用同一颜色。现有4种颜色可供选择，则不同的着色方法共有 _____ 种。（以数字作答）



【答案】 72

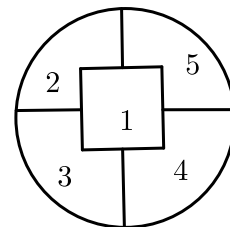
【解析】 由题意，选用3种颜色时：涂色方法 $C_4^3 \cdot A_3^3 = 24$ 种。
4种全用时涂色方法： $C_2^1 \cdot A_4^4 = 48$ 种。

所以不同的着色方法共有72种．

故答案为：72．

【标注】【知识点】染色问题

4. 如图，花坛内有五个花池，有五种不同颜色的花卉可供栽种，每个花池内只能种同种颜色的花卉，相邻两池的花色不同，则最多有几种栽种方案（ ）．



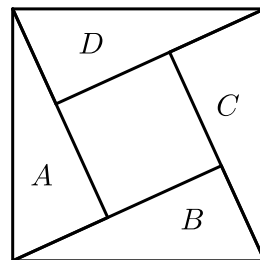
- A. 180种 B. 240种 C. 360种 D. 420种

【答案】D

【解析】若5个花池栽了5种颜色的花卉，
方法有 A_5^5 种，
若5个花池栽了4种颜色的花卉，
则2，4两个花池栽同一种颜色的花，
或者3，5两个花池栽同一种颜色的花，
方法有 $2A_5^4$ 种，
若5个花池栽了3种颜色的花卉，
方法有 A_5^3 种，
故最多有 $A_5^5 + 2A_5^4 + A_5^3 = 420$ 种栽种方案．
故选D．

【标注】【知识点】计数原理综合

5. 如图是一个由四个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的大正方形，现在用四种颜色给这四个直角三角形区域涂色，规定每个区域只涂一种颜色，相邻区域颜色不相同，则不同的涂色方法有（ ）．



- A. 24种 B. 72种 C. 84种 D. 120种

【答案】 C

【解析】 第一步，涂A，4种方法；

第二步，涂B，3种方法；

第三步需分类，第①类，A，C同色，D有3种，

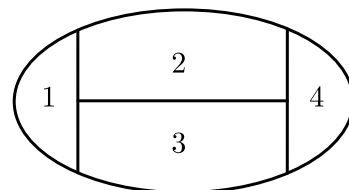
第②类，A，C不同色，C有2种，D有2种，

$\therefore$ 方法共有 $4 \times 3 \times (3 + 2 \times 2) = 84$ 种。

故选C。

【标注】【知识点】加法原理与乘法原理的综合运用；分类加法计数原理；分步乘法计数原理

6. 用5种不同的颜色给图中4个区域涂色，如果每个区域涂一种颜色，相邻区域不能同色，那么涂色的方法有（ ）种。



- A. 180 B. 120 C. 240 D. 72

【答案】 A

【解析】 ①区域1、4同色。

即在5种颜色中任选3种，涂在3个区域，有 $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ 种涂法。

②区域1、4不同色。

即在5中颜色中任选4种，涂在4个区域，有 $A_5^4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 种涂法。

综上，共有 $60 + 120 = 180$ 种涂法。

【标注】【知识点】特殊位置优先法

2. 数字问题

7. 从1, 3, 5三个数中选两个数字, 从0, 2两个数中选一个数字, 组成没有重复数字的三位数, 其中奇数的个数为() .

A. 6 B. 12 C. 18 D. 24

【答案】 C

【解析】 由于题目要求是奇数, 那么对于此三位数可以分成两种情况: 奇偶奇, 偶奇奇, 因此总共 $A_3^2 A_2^1 + A_3^2 = 18$ 种.

故选: C .

【标注】 【知识点】加法原理与乘法原理的综合运用; 分步乘法计数原理

8. 从1, 3, 5, 7, 9中任取2个数字, 从0, 2, 4, 6中任取2个数字, 可以组成没有重复数字的四位数() 个.

A. 240 B. 540 C. 782 D. 1260

【答案】 D

【解析】 ①取0: $C_3^1 \cdot C_5^2 \cdot A_3^3$;

②不取0: $C_3^2 \cdot C_5^2 \cdot A_4^4$.

$$C_3^1 \cdot C_5^2 \cdot A_3^3 + C_3^2 \cdot C_5^2 \cdot A_4^4 = 1260 .$$

故选D .

【标注】 【知识点】加法原理与乘法原理的综合运用; 分步乘法计数原理; 分类加法计数原理

9. 如果把个位数是1, 且恰有3个数字相同的四位数叫做“好数”, 那么在由1, 2, 3, 4四个数字组成的可重复数字的四位数中, “好数”共有() 个.

A. 9 B. 12 C. 24 D. 36

【答案】 B

【解析】 当重复数字是1时, 有 $C_3^1 \cdot C_3^1$ 个“好数”,

当重复数字不是1时, 有 C_3^1 个“好数”,

由分类加法计数原理,

得“好数”有 $C_3^1 \cdot C_3^1 + C_3^1 = 12$ 个.

故选B .

【标注】【知识点】分类加法计数原理；分步乘法计数原理；加法原理与乘法原理的综合运用

10. 用0, 1, 2, 3, 4这五个数字组成无重复数字的自然数 .

- (1) 在组成的五位数中, 所有奇数的个数有多少 ?
- (2) 在组成的五位数中, 数字1和3相邻的个数有多少 ?
- (3) 在组成的五位数中, 若从小到大排列, 30124排第几个 ?

【答案】(1) 36个 .

(2) 36个 .

(3) 第49个 .

【解析】(1) 奇数则个位有2个选择 ,

首位不是0, 则有3个选择 ,

根据分步乘法原理共有 $2 \times 3 \times A_3^3 = 36$ 个 .

(2) 1与3相邻, 内部捆绑, 看作一个数 ,

首位不是0, 1与3内部排列 ,

则共有 $A_2^2 \cdot 3 \cdot A_3^3 = 36$ 个 .

(3) 小于3000的五位数中, 1或2做首位 ,

共 $2 \times A_4^4 = 48$ 个 ,

而大于或等于3000的五位数中 ,

第一个是30124 ,

$\therefore$ 30124是第49个 .

【标注】【知识点】分步乘法计数原理；特殊位置优先法；捆绑法

11. 现有写着数字1, 2, 3, 4, 5的五张卡片, 从中任取四张组成自然数 .

- (1) 可组成多少个四位数 (用数字作答) .
- (2) 可成多少个四位偶数 (用数字作答) .
- (3) 可组成多少个含有两个奇数数字和两个偶数数字的四位数 (用数字作答) .

【答案】(1) 120

(2) 48

(3) 72

【解析】 (1) 从1, 2, 3, 4, 5五张卡片中任取四张进行全排列共有 $A_5^4 = 120$ 种,

故可组成120个四位数.

(2) 个位数只能是2, 4, 故可组成 $C_2^1 A_4^3 = 48$ 个四位偶数.

(3) 从1, 2, 3, 4, 5中选择2个奇数有 C_3^2 , 选择2个偶数 C_2^2 , 则 $C_3^2 C_2^2 A_4^4 = 72$,

故可组成72个含有两个奇数数字和两个偶数数字的四位数.

【标注】【知识点】特殊位置优先法; 特殊元素优先法

12. 用0, 1, 2, 3, 4, 5这六个数字可以组成多少个符合下列条件的无重复的数字?

(1) 六位奇数.

(2) 个位数字不是5的六位数.

(3) 不大于4310的四位偶数.

【答案】 (1) 288.

(2) 504.

(3) 110.

【解析】 (1) 略.

(2) 略.

(3) 略.

【标注】【知识点】加法原理与乘法原理的综合运用; 分步乘法计数原理

二、二项式定理

【二项式定理】

二项式定理	$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \cdots + C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^n b^n (n \in \mathbb{N}_+)$
二项展开式的通项公式	$T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$, 它表示第 $r+1$ 项
二项式系数	二项展开式中各项的系数 $C_n^r (r = 0, 1, 2, \cdots, n)$

【知识拓展】

二项展开式形式上的特点

(1) 项数为 $n+1$.

(2)各项的次数都等于二项式的幂指数 n ，即 a 与 b 的指数的和为 n .

(3)字母 a 按降幂排列，从第一项开始，次数由 n 逐项减1直到零；字母 b 按升幂排列，从第一项起，次数由零逐项增1直到 n .

(4)二项式的系数从 C_n^0 ， C_n^1 ，一直到 C_n^{n-1} ， C_n^n .

【二项式系数性质】

对称性	与首末两端“等距离”的两个二项式系数相等(即 $C_n^m = C_n^{n-m}$)
增减性	当 $k < \frac{n+1}{2}$ 时，二项式系数逐渐增大；当 $k > \frac{n+1}{2}$ 时，二项式系数逐渐减小，因此二项 式系数在中间取得最大值
最大值	当 n 是偶数时，展开式的中间一项 $T_{\frac{n}{2}+1}$ 的二项式系 数 $C_n^{\frac{n}{2}}$ 最大；当 n 是奇数时，展开式的中间两项 $T_{\frac{n+1}{2}}$ 与 $T_{\frac{n+1}{2}+1}$ 的二项式系数 $C_n^{\frac{n-1}{2}}$ ， $C_n^{\frac{n+1}{2}}$ 相等且 最大
各二项式	$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$
	$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}$

温馨提示

①由组合数的性质 $C_n^m = C_n^{n-m}$ 可以得到对称性.

②由 $C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+2)(n-k+1)}{(k-1)! \cdot k} = \frac{n-k+1}{k} \cdot C_n^{k-1}$ ，可知 C_n^k 相对于 C_n^{k-1} 的增减情况由 $\frac{n-k+1}{k}$ 与1的大小关系决定.

由 $\frac{n-k+1}{k} > 1$ 可得 $k < \frac{n+1}{2}$ ，可知当 $k < \frac{n+1}{2}$ 时，二项式系数是增加的，再由对称性可知，另一部分是减小的，所以 C_n^k 在中间取得最大值.

③要特别注意赋值法的应用.

i.在二项式定理中，令 $a = b = 1$ ，便有 $(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$ ，即
 $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$.

ii.在二项式定理中，令 $a = 1$ ， $b = -1$ ，则有 $(1-1)^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n$ ，
 $\therefore C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$ ，

$\therefore C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}$.

1. 二项展开式

求二项展开式中的指定项，一般是利用通项公式进行，化简通项后，令字母的指数符合要求(求常数项时，指数为零；求有理项时，指数为整数等)，解出 k ，代回通项即可。

13. $\left(ax - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$ 的展开式中 x^2 的系数为70，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 ± 1

【解析】 $\left(ax - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$ 的展开式中的通项公式为 $T_{r+1} = C_8^r \cdot (-1)^r \cdot a^{8-r} \cdot x^{8-\frac{3r}{2}}$,
令 $8 - \frac{3r}{2} = 2$, 求得 $r = 4$, 故 x^2 的系数为 $C_8^4 \cdot a^4 = 70$, 则 $a = \pm 1$,
故答案为： ± 1 .

【标注】 【知识点】 求二项式展开式的特定项；求项的系数或二项式系数

14. 若 $\left(ax^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中 x^5 的系数是 -80 ，则实数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -2

【解析】 $\left(ax^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式的通项 $T_{r+1} = C_5^r (ax^2)^{5-r} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = C_5^r \cdot a^{5-r} x^{10-\frac{5r}{2}}$,
令 $10 - \frac{5r}{2} = 5$, 解得 $r = 2$,
 $\therefore C_5^2 \cdot a^3 = -80$,
解得 $a = -2$.

【标注】 【知识点】 二项式定理的展开式

15. $(1+x+x^2)(1-x)^{10}$ 展开式中 x^4 的系数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 135

【解析】 $(1-x)^{10}$ 展开式通项 $T_{r+1} = C_{10}^r (-1)^r x^r$,
展开式 x^4 项为 $C_{10}^4 x^4$, x^3 项为 $-C_{10}^3 x^3$, x^2 项为 $C_{10}^2 x^2$,
则 $(1+x+x^2)(1-x)^{10}$ 展开式中 x^4 的系数为 $C_{10}^4 - C_{10}^3 + C_{10}^2 = 210 - 120 + 45 = 135$.
故答案为： 135 .

【标注】 【知识点】 求项的系数或二项式系数；求二项式展开式的特定项

16. $(x^2 + 2)\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^5$ 的展开式的常数项是 () .

A. -3

B. -2

C. 2

D. 3

【答案】 D

【解析】 方法一： $\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_5^r \left(\frac{1}{x^2}\right)^{5-r} \cdot (-1)^r$,

$r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

当因式 $(x^2 + 2)$ 中提供 x^2 时, 则取 $r = 4$;

当因式 $(x^2 + 2)$ 中提供 2 时, 则取 $r = 5$,

所以 $(x^2 + 2)\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^5$ 的展开式的常数项为 $5 - 2 = 3$.

方法二：第一个因式取 x^2 , 第二个因式取 $\frac{1}{x^2}$ 得： $1 \times C_5^4 (-1)^4 = 5$,

第一个因式取 2 , 第二个因式取 $(-1)^5$ 得： $2 \times (-1)^5 = -2$,

所以展开式的常数项是 $5 + (-2) = 3$.

故选 D .

【标注】 【知识点】二项式定理的展开式

17. 在 $(2x - 3)\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^7$ 展开式中, x^2 的系数为 _____ .

【答案】 -105

【解析】 $(2x - 3)\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^7 = 2x\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^7 - 3\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^7$,

x^2 的系数为 $-3xC_7^3 \times (-1)^4 = -105$.

【标注】 【知识点】求二项式展开式的特定项

18. 在 $\left(\sqrt[3]{2x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{20}$ 的展开式中, 系数是有理数的项共有 () .

A. 6项

B. 5项

C. 4项

D. 3项

【答案】 C

【解析】 $T_{k+1} = C_{20}^k \left(\sqrt[3]{2x}\right)^{20-k} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^k$,

系数为 $C_{20}^k \cdot 2^{\frac{20-k}{3}} (-1)^k \cdot 2^{-\frac{1}{2}k} = C_{20}^k (-1)^k \cdot 2^{\frac{40-5k}{6}}$. $k \in \mathbf{N}_+$,

$$\begin{aligned}
 k &\leq 20, \\
 \therefore \frac{40-5k}{6} &\in \mathbf{Z}, \\
 \therefore 40-5k &\text{为} 30 \text{的倍数}, \\
 \therefore 40-5k &= 30, 0, -30, -60, \\
 \therefore &4 \text{个}.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】求二项式展开式的特定项；求项的系数或二项式系数

19. $\left(\frac{x}{\sqrt{y}} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right)^8$ 的展开式中 x^2y^2 的系数为 _____ .

【答案】 70

【解析】 $T_5 = C_8^4 \left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^4 \times \left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^4 = 70x^2y^2$.

【标注】【知识点】求项的系数或二项式系数

2. 二项式系数的和或各项系数的和的问题

(1) 二项式定理给出的是一个恒等式，对于 a, b 的一切值都成立，因此，可将 a, b 设定为一些特殊的值。在使用赋值法时，令 a, b 等于多少应视具体情况而定，一般取 1、-1 或 0，有时也取其他值。

(2) 一般地，若 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ ，则 $f(x)$ 的展开式中各项系数之和为 $f(1)$ ，奇数项系数之和为 $a_0 + a_2 + a_4 + \dots = \frac{f(1) + f(-1)}{2}$ ，偶数项系数之和为 $a_1 + a_3 + a_5 + \dots = \frac{f(1) - f(-1)}{2}$.

20. 在 $(2x - 3y)^{10}$ 的展开式中，求：

- (1) 二项式系数的和 .
- (2) 各项系数的和 .
- (3) 奇数项的二项式系数和与偶数项的二项式系数和 .
- (4) 奇数项系数与偶数项系数和 .
- (5) x 的奇次方项系数和与 x 的偶次方项系数和 .

【答案】 (1) 2^{10} .

(2) 1 .

(3) 奇数项的二项式系数和为 2^9 .

偶数项的二项式系数和为 2^9 .

$$\begin{aligned} (4) \quad & \text{奇数项的系数和为 } \frac{1+5^{10}}{2} . \\ & \text{偶数项的系数和为 } \frac{1-5^{10}}{2} . \\ (5) \quad & x \text{ 的奇次项系数和为 } \frac{1-5^{10}}{2} . \\ & x \text{ 的偶数次系数和为 } \frac{1+5^{10}}{2} . \end{aligned}$$

【解析】(1) 设 $(2x-3y)^{10} = a_0x^{10} + a_1x^9y + a_2x^8y^2 + \cdots + a_{10}y^{10}$, (*)

各项系数和即为 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$,

奇数项系数和为 $a_0 + a_2 + \cdots + a_{10}$,

偶数项系数和为 $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_9$,

x 的奇次项系数和为 $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_9$,

x 的偶次项系数和为 $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10}$.

二项式系数和为 $C_{10}^0 + C_{10}^1 + \cdots + C_{10}^{10} = 2^{10}$.

(2) 令 $x = y = 1$, 得各项系数和为 $(2-3)^{10} = (-1)^{10} = 1$.

(3) 奇数项的二项式系数和为 $C_{10}^0 + C_{10}^2 + \cdots + C_{10}^{10} = 2^9$.

偶数项的二项式系数和为 $C_{10}^1 + C_{10}^3 + \cdots + C_{10}^9 = 2^9$.

(4) 令 $x = y = 1$, 得 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 1$. ①

令 $x = 1, y = -1$,

得 $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{10} = 5^{10}$. ②

①+②得 $2(a_0 + a_2 + \cdots + a_{10}) = 1 + 5^{10}$,

$\therefore$ 奇数项的系数和为 $\frac{1+5^{10}}{2}$.

①-②得 $2(a_1 + a_3 + \cdots + a_9) = 1 - 5^{10}$,

$\therefore$ 偶数项的系数和为 $\frac{1-5^{10}}{2}$.

(5) x 的奇次项系数和为 $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_9 = \frac{1-5^{10}}{2}$.

x 的偶数次系数和为 $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10} = \frac{1+5^{10}}{2}$.

【标注】【知识点】二项式定理的展开式；赋值问题；二项式系数的性质；求项的系数或二项式系数；求二项式展开式的特定项

21. 若 $\left(x - \frac{\sqrt{a}}{x^2}\right)^6$ 展开式中的常数项为 60, 则实数 a 的值为 _____.

【答案】4

【解析】

根据题意, $\left(x - \frac{\sqrt{a}}{x^2}\right)^6$ 展开式的通项为

$$T_{r+1} = C_6^r \cdot x^{6-r} \cdot \left(-\frac{\sqrt{a}}{x^2}\right)^r = (-1)^r \cdot C_6^r \cdot a^{\frac{r}{2}} \cdot x^{6-3r},$$

令 $6 - 3r = 0$, 可得 $r = 2$,

当 $r = 2$ 时, $T_3 = (-1)^2 \cdot C_6^2 \cdot a = 15a$,

又由题意, 可得 $15a = 60$, 则 $a = 4$.

故答案为: 4.

【标注】【知识点】二项式系数的性质

【知识点】二项式定理的展开式

【知识点】求项的系数或二项式系数

【知识点】求二项式展开式的特定项

【素养】数学运算

【素养】逻辑推理

22. 若 $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中含 x 的项为第6项, 设 $(1 - 3x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, 则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 的值为 _____.

【答案】 255

【解析】 展开式 $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^n$ 的通项为 $T_{k+1} = C_n^k (x^2)^{n-k} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^k = C_n^k (-1)^k x^{2n-3k}$, 因为含 x 的项为第6项, 所以 $k = 5$, $2n - 3k = 1$, 解得 $n = 8$. 令 $x = 1$, 得

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_8 = (1 - 3)^8 = 2^8. \text{ 又因为 } a_0 = 1, \text{ 所以 } a_1 + \cdots + a_8 = 2^8 - 1 = 255.$$

【标注】【知识点】赋值问题; 求项的系数或二项式系数

23. 若 $(2 - x)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$, 则 $|a_0| - |a_1| + |a_2| - |a_3| + |a_4| - |a_5| =$ _____.

【答案】 1

【解析】 展开式通项 $T_{k+1} = C_5^k \cdot 2^{5-k} (-x)^k$,

$$\therefore a_k = C_5^k \cdot (-1)^k \cdot 2^{5-k}, k = 0, 1, \dots, 5,$$

$$\therefore |a_0| - |a_1| + \cdots + |a_4| - |a_5| = a_0 + a_1 + \cdots + a_5 = (2 - 1)^5 = 1.$$

【标注】【知识点】赋值问题；二项式定理的展开式

24. 已知 $(2+x)^5 = a_0 + a_1(1+x) + a_2(1+x)^2 + \dots + a_5(1+x)^5$ ，则 $a_2 =$ _____ .

【答案】 10

【解析】 $(2+x)^5 = [1+(1+x)]^5$ ，其通项公式为 $T_{r+1} = C_5^r(1+x)^r$ ，故 $T_3 = C_5^2(1+x)^2$ ，所以 $a_2 = C_5^2 = 10$.
故答案为：10 .

【标注】【知识点】求项的系数或二项式系数；求二项式展开式的特定项

25. 在 $(1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \dots + (1+x)^9$ 的展开式中， x^2 的系数等于 () .

A. 280

B. 300

C. 210

D. 120

【答案】 D

【解析】 $(1+x)^n$ 中， $T_{k+1} = C_n^k x^k$ ， x^2 系数为 C_n^2 ，
 $\therefore C_2^2 + C_3^2 + \dots + C_9^2 = C_3^3 + C_3^2 + \dots + C_9^2$ ，
 $= C_4^3 + C_4^2 + \dots + C_9^2 = \dots = C_{10}^3 = 120$.
故选 D .

【标注】【知识点】求二项式展开式的特定项；求项的系数或二项式系数

26. 在 $\left(x + \frac{a}{x}\right)(2x-1)^5$ 展开式中，各项系数之和为 4，则展开式中的常数项为 _____ .

【答案】 30

【解析】 $\because \left(x + \frac{a}{x}\right)(2x-1)^5$ 的展开式中各项系数之和为 4，
 $\therefore$ 令 $x=1$ ，得 $1+a=4$ ， $a=3$ ， $(2x-1)^5$ 展开式的通项为
 $T_{r+1} = C_5^r \cdot (-1)^r \cdot 2^{5-r} \cdot x^{5-r}$ ，
令 $5-r=1$ ， $r=4$ ，得 $(2x-1)^5$ 展开式 x 项的系数为 $C_5^4(-1)^4 \times 2 = 10$ ，
 $\therefore \left(x + \frac{3}{x}\right)(2x-1)^5$ ，
故展开式常数项为 $3 \times 10 = 30$ ，故答案为 30 .

【标注】【知识点】求项的系数或二项式系数；求二项式展开式的特定项

3. 多项式展开

对于多项式 $(a+b+c)^n$ ，我们可以转化为 $[a+(b+c)]^n$ 的形式，再利用二项式定理求解有关问题.

温馨提示

(1)对某些不是二项式但又可化为二项式的式子，可先将其化为二项式，再求解.

(2)利用二项式展开式的通项 T_{k+1} 可求展开式中某些特定项.

27. 求 $\left(|x| + \frac{1}{|x|} - 2\right)^3$ 的展开式中的常数项.

【答案】 展开式中的常数项为 -20 .

【解析】 $\because \left(|x| + \frac{1}{|x|} - 2\right)^3 = \left(\sqrt{|x|} - \frac{1}{\sqrt{|x|}}\right)^6$,
 $\therefore$ 展开式的通项 $T_{k+1} = C_6^k \left(\sqrt{|x|}\right)^{6-k} \left(-\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right)^k = (-1)^k C_6^k \left(\sqrt{|x|}\right)^{6-2k}$.
若 T_{k+1} 为常数项，则 $6-2k=0$ ，即 $k=3$.
 $\therefore$ 展开式得第四项为常数项，又 $T_4 = -C_6^3 = -20$,
 $\therefore$ 展开式中的常数项为 -20 .

【标注】【知识点】二项式定理的展开式；求二项式展开式的特定项；求项的系数或二项式系数

28. 已知 $(x^2 - 3x + 1)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{10}x^{10}$ ，则 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = ()$.

A. -1

B. 1

C. -2

D. 0

【答案】 C

【解析】 $x=1$ 时， $a_0 + a_1 + \cdots + a_{10} = -1$ ，
 $x=0$ 时， $a_0 = 1$ ，
故 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = -2$.
故选C.

【标注】【知识点】求项的系数或二项式系数；二项式定理的展开式

29. $(x^2 + x + y)^5$ 的展开式中， x^5y^2 的系数为 _____.

【答案】 30

【解析】 $(x^2 + x + y)^5$ 可看成5个 $(x^2 + x + y)$ 相乘，从中选2个 y ，有 C_5^2 种选法；

$$\therefore x^5 y^2 \text{ 的系数为 } C_5^2 C_3^2 C_1^1 = 30 .$$

30. $(1+ax+by)^n$ 展开式中不含 x 的项的系数绝对值的和为 243, 不含 y 的项的系数绝对值的和为 32, 则 a, b, n 的值可能为 ().

- A. $a = 2, b = -1, n = 5$ B. $a = -2, b = -1, n = 6$
C. $a = -1, b = 2, n = 6$ D. $a = 1, b = 2, n = 5$

【标注】【知识点】二项式定理的展开式；求二项式展开式的特定项；求项的系数或二项式系数；赋值问题

31. $\left(x - \frac{1}{x} - 1\right)^4$ 的展开式中, 常数项为 ().

- A. -5 B. -6 C. -12 D. 19

【解析】 $\left(x - \frac{1}{x} - 1\right)^4 = \left[\left(x - \frac{1}{x}\right) - 1\right]^4$
 $= C_4^0 \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right)^4 - C_4^1 \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + C_4^2 \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - C_4^3 \left(x - \frac{1}{x}\right) + C_4^1,$
 $\left(x - \frac{1}{x}\right)^4$ 常数项, $C_4^2 = 6,$
 $\left(x - \frac{1}{x}\right)^3$ 无常数项,

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \text{ 常数项, } -C_2^1 = -2,$$

则常数项为： $6 + 6 \times (-2) + 1 = -5$.

故选A .

【标注】【知识点】二项式定理的展开式

32. 已知 $(1 + |a|x + |b|y)^n$ 展开式中不含 x 的项的系数和为64，不含 y 的项的系数和为27，则 a, b, n 的值可能为（ ） .

A. $a = 3, b = 2, n = 3$

B. $a = 2, b = 3, n = 3$

C. $a = -2, b = -3, n = 4$

D. $a = -3, b = -2, n = 4$

【答案】 B

【解析】 $(1 + |a|x + |b|y)^n$ 展开式中不含 x 的系数和，令 $x = 0, y = 1$ ，

$$\text{则}(1 + |b|)^n = 64,$$

不含 y 的项的系数和，令 $x = 1, y = 0$ ，

$$\text{则}(1 + |a|)^n = 27,$$

$$\text{又}4^3 = 64, 3^3 = 27,$$

$$\therefore |b| = 3, n = 3, |a| = 2,$$

$$\therefore a, b, n \text{ 可能为 } 2, 3, 3.$$

故选B .

【标注】【知识点】求项的系数或二项式系数；赋值问题