

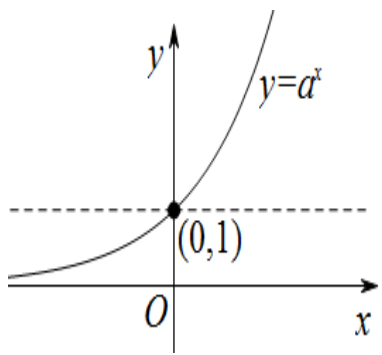
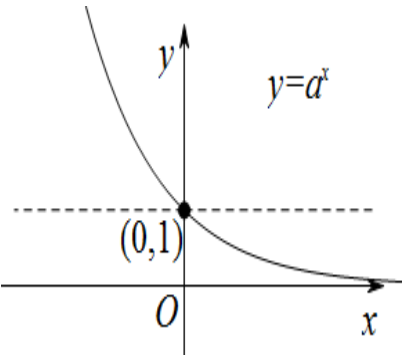
计数原理1

一轮整合计划

导数的恒能成立与最值的关系

- (1) $\forall x \in (a, b), f(x) > k$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____ ;
- (2) $\forall x \in (a, b), f(x) > g(x)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____ ;
- (3) $\forall x \in (a, b), f(x) < k$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____ ;
- (4) $\forall x \in (a, b), f(x) < g(x)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____ .
- (5) $\exists x \in (a, b), f(x) > k$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____ ;
- (6) $\exists x \in (a, b), f(x) > g(x)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____ ;
- (7) $\exists x \in (a, b), f(x) < k$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____ ;
- (8) $\exists x \in (a, b), f(x) < g(x)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____ .
- (9) $\forall x_1, x_2 \in D, |f(x_1) - f(x_2)| \leq k$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____ ;
- (10) $\forall x_1, x_2 \in (a, b), f(x_1) < g(x_2)$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____ ;
- (11) $\forall x_1 \in (a, b), \exists x_2 \in (a, b), f(x_1) > g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____ ;
- (12) $\forall x_1 \in (a, b), \exists x_2 \in (a, b), f(x_1) = g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____ ;
- $\Leftrightarrow$ _____ .

指数函数的性质

	$a > 1$	$0 < a < 1$
图像		
定义域	—	—
值域	—	—
顶点	—	—
单调性	在 $\mathbf{R}$ 上单调__	函数在 $\mathbf{R}$ 上单调__

一、 两个基本计数原理

分类加法计数原理与分步乘法计数原理，都涉及完成一件事的不同方法的种数．它们的区别在于：分类加法计数原理与分类有关，各种方法相互独立，用其中的任一种方法都可以完成这件事；分步乘法计数原理与分步有关，各个步骤相互依存，只有各个步骤都完成了，这件事才算完成．

1. 分类加法计数原理

完成一件事，可以有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种方法，在第二类办法中有 m_2 种方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种方法．那么，完成这件事共有 $N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 种方法．(也称加法原理)

1. 已知非空集合 A, B 满足以下两个条件：

① $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ， $A \cap B = \emptyset$ ；

② 若 $x \in A$ ，则 $x + 1 \in B$ ，

则有序集合对 (A, B) 的个数为（ ）．

A. 12

B. 13

C. 14

D. 15

2. 已知集合 $M = \{-2, 3\}$ ， $N = \{-4, 5, 6\}$ ，依次从集合 M, N 中各取出一个数分别作为点 P 的横坐标和纵坐标，则在平面直角坐标系中位于第一、二象限内的点 P 的个数是（ ）．

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

3. 给定全集 U ，非空集合 A, B 满足 $A \subseteq U, B \subseteq U$ ，且集合 A 中的最大元素小于集合 B 中的最小元素，则称 (A, B) 为 U 的一个有序子集对. 若全集 $U = \{2, 3, 6, 7, 9\}$ ，则 U 的有序子集对的个数为() .

A. 71

B. 49

C. 35

D. 29

2. 分步乘法计数原理

完成一件事需要经过 n 个步骤，缺一不可，做第一步有 m_1 种方法，做第二步有 m_2 种方法，……，做第 n 步有 m_n 种方法. 那么，完成这件事共有 $N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$ 种方法. (也称乘法原理)

4. 完成下列各题 .

- (1) 将1, 2, 3三个数字填在 3×3 的方格中，使得横格与竖格没有重复的数字，有多少种不同的填法 _____ .

- (2) 甲、乙、丙、丁四名同学和1名老师站成一排合影留念，老师站在中间，甲同学不和老师站在一起的不同站法种数为() .

A. 120种

B. 24种

C. 16种

D. 12种

- (3) 如图，小明从街道的 E 处出发，先到 F 处与小红会合，再一起到位于 G 处的老年公寓参加志愿者活动，则小明到老年公寓可以选择的最短路径条数为() .



A. 24

B. 18

C. 12

D. 9

- (4) 有两条平行线，第一条直线上取4个点，第二条直线上取6个点，以其中3个点为顶点作三角形，一共可以作出 _____ 个 .

5. 某公共汽车上有10位乘客，沿途5个车站，乘客下车的可能方式有() 种 .

A. 5^{10} B. 10^5

C. 50

D. A_{10}^5

6. 8名学生站成两排，前排5人，后排3人，则不同的站法种数为() .

A. $A_8^5 A_3^3$ B. $A_8^5 + A_3^3$ C. $A_5^5 + A_3^3$ D. $\frac{1}{2} A_8^8$

二、排列与组合

1、排列与组合的概念

名称	定义	
排列	从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素	按照一定的顺序排成一行
组合		合成一组

2、排列数与组合数

(1)排列数的定义：从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有排列的个数叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用 A_n^m 表示。

(2)组合数的定义：从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有组合的个数，叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数，用 C_n^m 表示。

3、排列数、组合数的公式及性质

公式	$(1) A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$ $(2) C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1)}{\frac{m!}{(n-m)!m!}} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$
性质	$(1) 0! = 1; A_n^n = n!$ $(2) C_n^m = C_n^{n-m}; C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$

1. 排列问题

优先法（特殊元素、特殊位置）

如果某些元素或位置特殊，则优先安排特殊元素或特殊位置。

多元问题分类法：将符合条件的排列分为几类，而每一类的排列数较易求出，然后根据分类加法计数原理求出排列总数。

7. 某台小型晚会由6个节目组成，演出顺序有如下要求：节目甲必须排在前两位，节目乙不能排在第一位，节目丙必须排在最后一位。该台晚会节目演出顺序的编排方案共有 _____ 种

8.

某班周一的课程表要排入语文、数学、英语、物理、化学、体育六门课程，如果第一节课不排体育，第六节课不排数学，共有 _____ 种不同的排法。

9. 一生产过程有4道工序，每道工序需要安排一人照看。现从甲、乙、丙等6名工人中安排4人分别照看一道工序，第一道工序只能从甲、乙两工人中安排1人，第四道工序只能从甲、丙两工人中安排1人，则不同的安排方案共有（ ）。

A. 24种 B. 36种 C. 48种 D. 72种

捆绑法（相邻问题）

（1）模型：将 n 个不同元素排成一排，其中某 k 个元素**相邻**。

（2）思路：将相邻的 k 个元素“捆绑”在一起看成是一个整体，此时变为 $n - k + 1$ 个元素的全排列，排法为 A_{n-k+1}^{n-k+1} ；再将“捆绑”在一起的元素内部排列，排法为 A_k^k 。根据分步乘法计数原理，符合条件的排法种数有 $A_{n-k+1}^{n-k+1} \cdot A_k^k$ 种。

10. 在学校的一次演讲比赛中，高一、高二、高三分别有1名、2名、3名同学获奖，将这六名同学排成一排合影，要求同年级的同学相邻，那么不同的排法共有（ ）。

A. 6种 B. 36种 C. 72种 D. 120种

11. 《红海行动》中，中国海军“蛟龙突击队”奉命执行一系列任务 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F ，对任务顺序提出以下要求：重点任务 A 必须排在前两位，且任务 E 、 F 必须排在一起，则这六项任务的不同安排方案共有（ ）。

A. 84种 B. 42种 C. 112种 D. 64种

12. 甲、乙、丙三人在3天节日中值班，每人值班1天，则甲紧接着排在乙后面值班的概率是（ ）

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

插空法（相间问题）

（1）模型：将 n 个不同的元素排成一排，其中某 k 个元素**互不相邻**（ $k \leq n - k + 1$ ）。

（2）思路：

- ①将没有要求的 $n - k$ 个元素全排列，排列方法有 A_{n-k}^{n-k} 种；
②将要求互不相邻的 k 个元素插入 $n - k + 1$ 个空隙中，相当于从 $n - k + 1$ 个空隙中选取 k 个分配给互不相邻的那 k 个元素，其排列方法有 A_{n-k+1}^k 种。根据分步乘法计数原理，符合条件的排法种数有 $A_{n-k}^{n-k} \cdot A_{n-k+1}^k$ 种。

13. 6把椅子摆成一排，3人随机就座，任何两人不相邻的坐法种数为（ ）。

A. 144 B. 120 C. 72 D. 24

14. 某班级举行元旦晚会，共有6个不同的节目，其中2个唱歌节目，2个舞蹈节目和2个其他节目，现要求节目单中两个唱歌节目必须排在一起，而两个舞蹈节目不能排在一起，则不同的排法共有（ ）.
- A. 10种 B. 15种 C. 72种 D. 144种
15. 在班级活动中，4名男生和3名女生站成一排表演节目. 试回答. (写出必要的数学式，结果用数字作答)
- (1) 三名女生不能相邻，有多少种不同的站法？
- (2) 4名男生相邻有多少种不同的排法？
- (3) 女生甲不能站在左端，女生乙不能站在右端，有多少种不同的排法？
- (4) 甲乙丙三人按高低从左到右有多少种不同的排法？(甲乙丙三位同学身高互不相等).

间接法 (正难则反)

对于给定附加条件的问题，正面考虑情况较为复杂时，可以考察否定附加条件下问题的情况，然后从无附加条件中排除上述情况即可.

16. 从5名学生中任选4名分别参加数学、物理、化学、生物四科竞赛，且每科竞赛只有1人参加，若甲不参加生物竞赛，则不同的选择方案共有 _____ 种.
17. 若A、B、C、D、E五位同学站成一排照相，则A、B两位同学至少有一人站在两端的概率是（ ）.
- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{7}{10}$
18. 某次联欢会要安排3个歌舞类节目，2个小品类节目和1个相声类节目的演出顺序，则同类节目不相邻的排法种数是 _____ .

除序法

19. 由3个小品和4个跳舞节目组成的文艺晚会，三个小品的顺序固定，则一共有多少种不同的排法？
20. 书架上原来摆放着6本不同的书，现要再放3本不同的书，则不同放法的种数为（ ）.
- A. A_7^3 B. A_4^4
C. $9 \times 8 \times 7$ D. $2A_3^3$
21. A、B、C、D、E五人站成一排，如果A必须站在B的左边（A、B可以不相邻），则不同的排法有（ ）.
- A. 24种 B. 60种 C. 90种 D. 120种

全错位

- (1) 模型：将编号为1 ~ n的n个小球放入编号为1 ~ n的n个盒子中，规定i号小球不许放入i号盒子，

求不同的放法种数，此种排列称为全错位排列，相应的排列数称为全错位排列数。

(2) 当 $n = 2, 3, 4, 5$ 时的全错位排列数各为 $1, 2, 9, 44$ 。关于 $5, 6, 7$ 个元素的错位排列的计算，可以用剔除法转化为 2 个、 3 个、 4 个元素的错位排列的问题。

22. 同寝室 4 人各写一张贺卡，先集中起来，然后每人从中拿一张别人送来的贺卡，则四张贺年卡不同的分配方式有 _____。

2. 组合问题

优先法 (特殊先行)

23. 在某班进行的演讲比赛中，共有 5 位选手参加，其中 3 位女生， 2 位男生。如果 2 位男生不能连着出场，且女生甲不能排在第一个，那么出场顺序的排法种数为 _____。

24. 某台小型晚会由 6 个节目组成，演出顺序有如下要求：节目甲必须排在前两位、节目乙不能排在第一位，节目丙必须排在最后一位，该台晚会节目演出顺序的编排方案共有 ()。

- A. 36种 B. 42种 C. 48种 D. 54种

25. 六张卡片上分别写有数字 $0, 1, 3, 4, 5$ ，从中任取四张排成一排，则可以组成不同的四位奇数的个数是 _____。(用数字作答)

26. 从 $0, 2, 4, 6, 8$ 中任取 2 个数字，从 $1, 3, 5, 7$ 中任取 2 个数字，组成没有重复的四位数，其中能被 5 整除的四位数共有 _____ 个 (用数字作答)。

27. 有 12 名划船运动员，其中 3 人只会划左舷， 4 人只会划右舷，其余 5 人既会划左舷也会划右舷。从这 12 名运动员中选出 6 人平均分在左、右舷划船参加比赛，有多少种不同的选法？

隔板法

n 个相同元素，分成 m ($m \leq n$) 组，每组至少一个的分组问题——把 n 个元素排成一排，从 $n - 1$ 个空中选 $m - 1$ 个空，各插一个隔板，有 C_{n-1}^{m-1} 种方法。

此法用于相同元素，不同去处，至少一个的问题。

28. 设有编号为 $1, 2, 3, 4, 5$ 的五个球和编号为 $1, 2, 3, 4, 5$ 的五个盒子，现将这五个球放入 5 个盒子内。

(1) 只有一个盒子空着，共有多少种投放方法？

(2) 没有一个盒子空着，但球的编号与盒子编号不全相同，有多少种投放方法？

(3) 每个盒子内放一球，且至少有两个球的编号与盒子编号是相同的，有多少种投放方法？

29. 要将 5 个小球放入 3 个盒子中：

(1) 若小球完全相同, 盒子不同, 每个盒子中都必须放入小球, 有多少种不同的放入方法?

(2) 若球完全相同, 盒子不同, 任意放入, 有多少种不同的放入方法?

30. 将20个相同的球全部放入编号为1, 2, 3的盒子里, 使得放入每个盒子里的球的个数不小于该盒子的编号, 则不同的放球方法共有 _____ 种. (用数字作答)

31. 某校准备组建一个由12人组成篮球队, 这12个人由8个班的学生组成, 每班至少一人, 名额分配方案共 _____ 种.

32. 将7个相同的小球投入甲、乙、丙、丁4个不同的小盒中, 每个小盒中至少有1个小球, 那么甲盒中恰好有3个球的概率为().

A. $\frac{3}{10}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{3}{20}$

D. $\frac{1}{4}$

间接法

33. 从装有3双不同鞋的柜子里, 随机取2只, 则取出的2只鞋不成对的概率为().

A. $\frac{14}{15}$

B. $\frac{4}{5}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{1}{5}$

34. 某学校开设A类选修课3门, B类选修课4门, 一位同学从中共选3门, 若要求两类课程各至少选一门, 则不同的选法共有().

A. 30种

B. 31种

C. 35种

D. 60种

35. 从4个男生, 3个女生中挑选4人参加智力竞赛, 要求至少有一个女生参加的选法共有().

A. 12种

B. 34种

C. 35种

D. 36种

36. 从5名男生、4名女生中选3名学生组成一个学习小组, 要求其中男、女生都有, 则不同的组队方案共有().

A. 70种

B. 80种

C. 100种

D. 140种

37. 从装有3个白球和2个黑球的袋子中任取3个球, 则所取的3个球中至少有1个黑球的概率是().

A. $\frac{1}{10}$

B. $\frac{3}{10}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{9}{10}$

分组分配法

分堆问题的特点是堆与堆之间的区别仅仅是元素个数, 而不强调元素本身, 因此若出现了若干组元素个数相同的情况, 在采取分步乘法计数原理处理问题之后还需要做除序处理.

(1) 不均匀分堆

【模型】 n 个不同元素分成 m 堆, 每堆元素数目均不相等, 求其分法种数.

【实例】10本书分成2, 3, 5三堆, 其分法种数为 $C_{10}^2 \cdot C_8^3 \cdot C_5^5 = 2520$.

(2) 均匀分堆

【模型】 n 个不同元素分成 m 堆，每堆元素数目都相等，求其分法种数．

【实例】9本书分成3, 3, 3三堆，其分法种数为 $\frac{C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3}{A_3^3} = 280$ ．

(3) 部分均匀分组

【模型】 n 个不同元素分成 m 组，恰有 r 堆元素数目都相等，求其分法种数．

【实例】10本书分成2, 4, 4三堆，其分法种数为 $\frac{C_{10}^2 \cdot C_8^4 \cdot C_4^4}{A_2^2} = 1575$ ．

38. 有6本不同的书

- (1) 甲、乙、丙3人每人2本，有多少种不同的分法？
- (2) 分成3堆，每堆2本，有多少种不同的分堆方法？
- (3) 分成3堆，一堆1本，一堆2本，一堆3本，有多少种不同的分堆方法？
- (4) 分给甲、乙、丙3人，一人1本，一人2本，一人3本，有多少不同的分配方法？
- (5) 分给甲1本、乙1本、丙4本，有多少种不同的分配方法？
- (6) 分成3堆，有2堆各一本，另一堆4本，有多少种不同的分堆方法？
- (7) 摆在3层书架上，每层2本，有多少种不同的摆法？
- (8) 假设6本书相同，分给甲、乙、丙三人，每人至少一本，则有多少种不同的分法？

39. 现有5名教师要带3个兴趣小组外出学习考察，要求每个兴趣小组的带队教师至多2人，则不同的带队方案有 _____ 种．（用数字作答）

40. 某城市有3个演习点同时进行消防演习，现将5个消防队分配到这3个演习点，若每个演习点至少安排1个消防队，则不同的分配方案种数为（ ）．

- A. 150 B. 240 C. 360 D. 540

41. 北京《财富》全球论坛期间，某高校有14名志愿者参加接待工作．若每天排早、中、晚三班，每班4人，每人每天最多值一班，则开幕式当天不同的排班种数为（ ）．

- A. $C_{14}^{12} C_{12}^4 C_8^4$
B. $C_{14}^{12} A_{12}^4 A_8^4$
C. $\frac{C_{14}^{12} C_{12}^4 C_8^4}{A_3^3}$
D. $C_{14}^{12} C_{12}^4 C_8^4 A_3^3$

42. 将甲、乙等5位同学分别保送到北京大学、上海交通大学、中山大学这3所学校就读，则每所大学至少保送1人的不同保送方法种数为（ ）．

- A. 150 B. 180 C. 240 D. 540

三、综合应用

43. 将标号为1, 2, ..., 10的10个球放入标号为1, 2, ..., 10的10个盒子里, 每个盒内放一个球, 恰好3个球的标号与其在盒子的标号不一致的放入方法种数为().
- A. 120 B. 240 C. 360 D. 720
44. 用0, 1, 2, 3, 4, 5, 6这七个数字:
- (1) 能组成多少个无重复数字的四位奇数.
- (2) 能组成多少个无重复数字且为5的倍数的五位数.
- (3) 能组成多少个无重复数字且比31560大的五位数.
45. 某班班会, 准备从包括甲、乙两人的七名同学中选派4名学生发言, 要求甲、乙两人中至少有1人参加, 则甲、乙都被选中且发言时不相邻的概率为 ____.
46. 将3本相同的小说, 2本相同的诗集全部分给4名同学, 每名同学至少1本, 则不同的分法有().
- A. 24种 B. 28种 C. 32种 D. 36种
47. 从6男2女共8名学生中选出队长1人, 副队长1人, 普通队员2人组成4人服务队, 要求服务队中至少有1名女生, 共有 ____ 种不同的选法. (用数字作答)
48. 从4名男同学中选出2人, 6名女同学中选出3人, 并将选出的5人排成一排, 选出的3名女同学必须从左至右, 从高到矮排列, 共有 ____ 种不同的排法.
49. 将甲、乙、丙、丁四名同学分到三个不同的班, 每个班至少分到一名学生, 且甲、乙两名学生不能分到一个班, 则不同分法的种数为().
- A. 18 B. 24 C. 30 D. 36
50. 用数字1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9组成没有重复数字, 且至多有一个数字是偶数的四位数, 这样的四位数一共有 ____ 个. (用数字作答)