

03圆锥曲线性质综合练习题

1. 2017~2018学年天津河西区天津市新华中学高二上学期期中 ★★★

若过椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 内一点 $P(3, 1)$ 的弦被该点平分, 则该弦所在的直线方程为()

- A. $3x + 4y - 13 = 0$ B. $3x - 4y - 5 = 0$ C. $4x + 3y - 15 = 0$ D. $4x - 3y - 9 = 0$

【答案】 A

【解析】 解: 设弦的两端点为 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{由 } P \text{ 为 } AB \text{ 中点得 } \begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ y_1 + y_2 = 2 \end{cases},$$

$$\because A, B \text{ 在椭圆上有 } \begin{cases} \frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{4} = 1 \\ \frac{x_2^2}{16} + \frac{y_2^2}{4} = 1 \end{cases},$$

$$\text{两式相减得 } \frac{x_1^2 - x_2^2}{16} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{4} = 0,$$

$$\text{可得 } \frac{3(x_1 - x_2)}{8} + \frac{y_1 - y_2}{2} = 0, \text{ 可得 } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{3}{4},$$

$$\text{则 } k = -\frac{3}{4}, \text{ 且过点 } P(3, 1), \text{ 有 } y - 1 = -\frac{3}{4}(x - 3),$$

$$\text{整理得 } 3x + 4y - 13 = 0.$$

故选: A.

【标注】 【知识点】直线和椭圆的位置关系; 中点弦问题

2. 2009年高考真题全国卷II ★★★

已知直线 $y = k(x + 2)$ ($k > 0$) 与抛物线 $C: y^2 = 8x$ 相交于 A, B 两点, F 为 C 的焦点. 若

$|FA| = 2|FB|$, 则 $k =$ ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【答案】 D

【解析】 解: 如图, 过点 A, B 分别作准线 l 的垂线, 垂足分别为 M, N .

根据抛物线的定义, 有 $|FA| = |AM|$, $|FB| = |BN|$,

由题意得, 直线 $y = k(x + 2)$ 过定点 $P(-2, 0)$, 连接 OB .

$$\because |FA| = 2|FB|,$$

$$\therefore |AM| = 2|BN|,$$

又 $\because AM \parallel BN$,

$$\therefore |BA| = |BP|,$$

又 $\because |OF| = |OP|$,

$$\therefore |FA| = 2|OB| ,$$

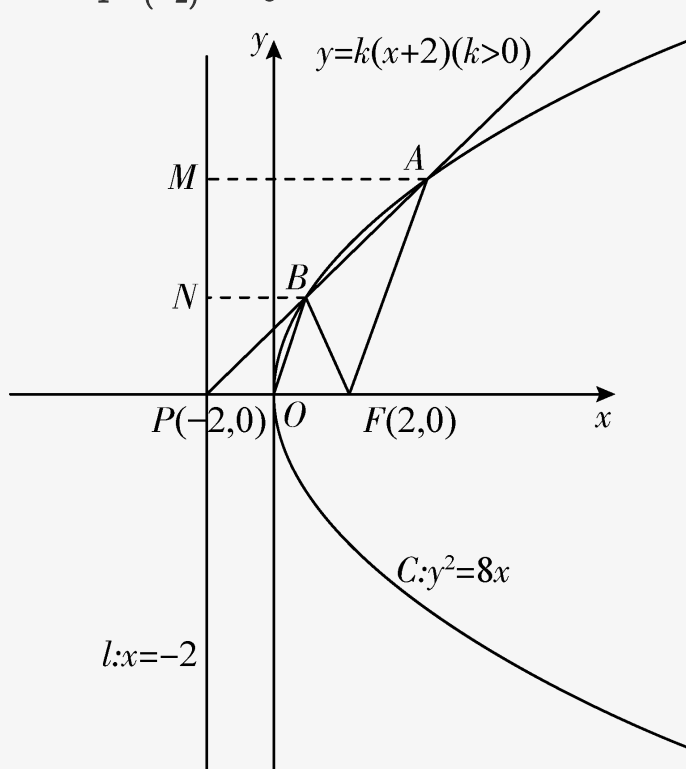
$$\therefore |BO| = |BF| .$$

$$\text{又} \because x_F = 2 ,$$

$$\therefore x_B = 1 ,$$

$$\therefore y_B = 2\sqrt{2} , \text{ 即 } B(1, 2\sqrt{2}) ,$$

$$\therefore k = \frac{2\sqrt{2} - 0}{1 - (-2)} = \frac{2\sqrt{2}}{3} .$$



【标注】【知识点】直线和抛物线的位置关系；弦长求解问题

3. 2016~2017学年天津高二上学期期末理科五校联考第7题4分 ★★★

椭圆 $4x^2 + 9y^2 = 144$ 内有一点 $P(3, 2)$ ，则以 P 为中点的弦所在直线的斜率为 () .

A. $-\frac{2}{3}$

B. $-\frac{3}{2}$

C. $-\frac{4}{9}$

D. $-\frac{9}{4}$

【答案】A

【解析】设以点 P 为中点的弦所在直线与椭圆相交于点 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，斜率为 k .

$$\text{则 } 4x_1^2 + 9y_1^2 = 144 , 4x_2^2 + 9y_2^2 = 144 , \text{ 两式相减得}$$

$$4(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + 9(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0 ,$$

$$\text{又 } x_1 + x_2 = 6 , y_1 + y_2 = 4 , \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = k ,$$

$$\text{代入解得 } k = -\frac{4}{9} \times \frac{6}{4} = -\frac{2}{3} .$$

故选 A .

【标注】【知识点】中点弦问题

4. 2017年天津河西区高三一模文科第14题5分 ★★★

设 F 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点，过点 $P(-1, 0)$ 的直线 l 交抛物线 C 于 A, B 两点，点 Q 为线段 AB 的中点，若 $|FQ| = 2\sqrt{3}$ ，则直线 l 的斜率等于 _____ .

【答案】 $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】 设直线 l 的方程为 $y = k(x + 1)$ ， $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $Q(x_0, y_0)$.

$$\text{解方程组 } \begin{cases} y = k(x + 1) \\ y^2 = 4x \end{cases},$$

$$\text{化简得: } k^2 x^2 + (2k^2 - 4)x + k^2 = 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{4 - 2k^2}{k^2},$$

$$y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2 + 2) = \frac{4}{k},$$

$$\therefore x_0 = \frac{2 - k^2}{k^2}, \quad y_0 = \frac{2}{k},$$

$$\text{由 } \sqrt{(x_0 - 1)^2 + y_0^2} = 2\sqrt{3}, \text{ 得: } \left(\frac{2 - 2k^2}{k^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{k}\right)^2 = 12,$$

$$\therefore k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{故答案为 } \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【标注】 【知识点】 中点弦问题

5. 2017~2018学年天津河西区天津市新华中学高二上学期期末文科第14题4分 ★★★

已知过点 $(0, 3)$ 的直线与抛物线 $y^2 = 4x$ 交于 A, B 两点，线段 AB 的垂直平分线经过点 $(4, 0)$ ， F 为抛物线的焦点，则 $|AF| + |BF| =$ _____ .

【答案】 6

【解析】 设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，

$$\text{则 } y_1^2 = 4x_1, \quad y_2^2 = 4x_2,$$

两式作差：

$$(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 4(x_1 - x_2),$$

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4}{y_1 + y_2},$$

$$\text{即 } AB \text{ 斜率为 } \frac{4}{y_1 + y_2},$$

$$\text{设 } |AF| + |BF| = m,$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 + 2 = m,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = m - 2,$$

$$\therefore AB \text{ 的中点坐标为 } \left(\frac{m-2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right),$$

AB 的垂直平分线的斜率为 $-\frac{y_1+y_2}{4}$,

$\therefore AB$ 的垂直平分线的方程为

$$y - \frac{y_1+y_2}{2} = -\frac{y_1+y_2}{4}\left(x - \frac{m-2}{2}\right) ,$$

线段 AB 的垂直平分线经过点 $(4, 0)$,

解得 : $m = 6$,

$\therefore |AF| + |BF| = 6$.

【标注】【知识点】弦长求解问题；直线和抛物线的位置关系

6. 2020~2021学年山西运城高二上学期期末理科第8题 ★★★

如果椭圆 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的弦被点 $(4, 2)$ 平分, 则这条弦所在的直线方程是 () .

A. $x - 2y = 0$

B. $5x + 2y - 4 = 0$

C. $x + 2y - 8 = 0$

D. $2x + 3y - 12 = 0$

【答案】 C

【解析】 设这条弦的两端点为 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

斜率为 k ,

$$\text{则 } \begin{cases} \frac{x_1^2}{36} + \frac{y_1^2}{9} = 1 \\ \frac{x_2^2}{36} + \frac{y_2^2}{9} = 1 \end{cases} ,$$

$$\text{两式相减变形得 : } \frac{x_1+x_2}{36} + k \frac{y_1+y_2}{9} = 0 ,$$

$$\text{又弦中点 } (4, 2) , \text{ 故 } k = -\frac{1}{2} ,$$

$$\therefore \text{直线方程 } y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 4) ,$$

$$\text{即 } x + 2y - 8 = 0 .$$

故选 C .

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系