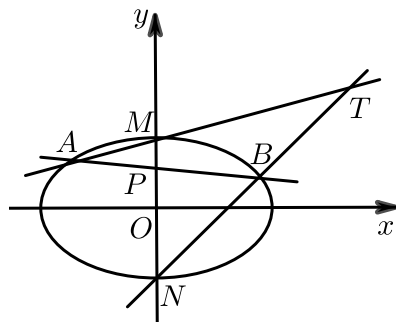


02直线与圆锥曲线的位置关系2习题

1. 定值定点问题

1. 已知点 $A(1, \sqrt{2})$ 是离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 椭圆 $C: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的一点. 斜率为 $\sqrt{2}$ 的直线 BD 交椭圆 C 于 B 、 D 两点, 且 A 、 B 、 D 三点不重合.
- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 求证: 直线 AB 、 AD 的斜率之和为定值.
- (3) $\triangle ABD$ 的面积是否存在最大值? 若存在, 求出这个最大值; 若不存在, 说明理由?
2. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(0, \sqrt{2})$ 且满足 $a + b = 3\sqrt{2}$.
- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 若斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线与椭圆 C 交于两个不同的点 A 、 B , 点 M 坐标为 $(2, 1)$, 设直线 MA 与 MB 的斜率分别为 k_1, k_2 , 试问 $k_1 + k_2$ 是否为定值? 并说明理由.
3. 如图, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距等于其长半轴长, M 、 N 为椭圆 C 的上下顶点, 且 $|MN| = 2\sqrt{3}$.



- (1) 求椭圆 C 的标准方程.
- (2) 过点 $P(0, 1)$ 作直线 l 交椭圆 C 于异于 M 、 N 的 A 、 B 两点, 直线 AM 、 BN 交于点 T , 求证: 点 T 的纵坐标为定值 3.
4. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $(1, \frac{3}{2})$, 且离心率 $e = \frac{1}{2}$.
- (1) 求椭圆 E 的方程.
- (2) 设椭圆 E 的右顶点为 A , 若直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 E 相交于 M 、 N 两点 (异于 A 点), 且满足 $MA \perp NA$, 试证明直线 l 经过定点, 并求出该定点的坐标.

2. 向量点乘问题

5. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F , 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 过点 F 且与 x 轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求椭圆的方程.

(2) 设 A, B 分别为椭圆的左右顶点, 过点 F 且斜率为 k 的直线与椭圆交于 C, D 两点, 若

$$\vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{CB} = 8, \text{ 求 } k \text{ 的值.}$$

6. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点为 $F_1(-1, 0)$, 上顶点为 B_1 , 原点 O 到直线 B_1F_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 若点 T 在圆 $x^2 + y^2 = 2$ 上, 点 A 为椭圆的右顶点, 是否存在过点 A 的直线 l 交椭圆 C 于点 B

(异于点 A), 使得 $\vec{OT} = \frac{\sqrt{14}}{7}(\vec{OA} + \vec{OB})$ 成立? 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 请说明理由.

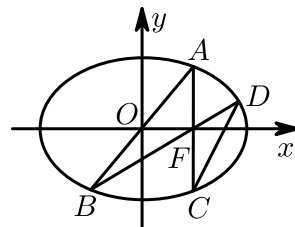
7. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左, 右焦点分别为 F_1, F_2 , 其离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 过 F_2 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 且 $\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 设椭圆 C 的上顶点为 P , 证明: 当 l 的斜率为 $\frac{1}{3}$ 时, 点 P 在以 AB 为直径的圆上.

3. 共线比例问题

8. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 且过点 $(1, \frac{3}{2})$. F 为椭圆的右焦点, A, B 为椭圆关于原点对称的两点, 连接 AF, BF 分别交椭圆于 C, D 两点.



(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 若 $AF = FC$, 求 $\frac{BF}{FD}$ 的值;

(3) 设直线 AB, CD 的斜率分别为 k_1, k_2 , 是否存在实数 m , 使得 $k_2 = mk_1$, 若存在, 求出 m 的值; 若不存在, 请说明理由.