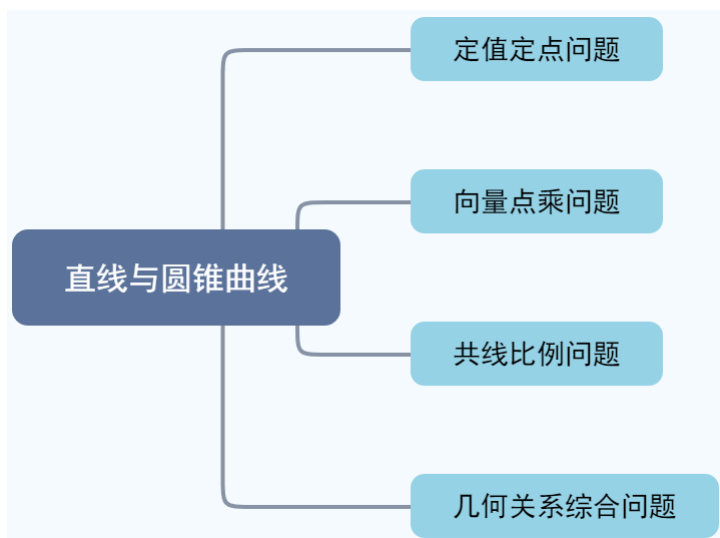


02直线与圆锥曲线的位置关系2



1. 定值定点问题

【备注】 定点和定值问题是高考在圆锥曲线考查上命题的热点，一般解决此类问题的方法是将题目给出的值或点表示为某个变量的函数，再研究此函数满足何固定条件或过何定点，解决此类问题无固定的方法，对考生要求较高。

定点问题

求证 $\times \times \times$ 过定点

解题思路：结合条件，将需要探究的 $\times \times \times$ 转化成与 $x_1 + x_2, x_1 x_2$ 有关的关系式，代入 $x_1 + x_2, x_1 x_2$ 后，找到 k 和 m 之间的关系，然后求解即可。

探究 $\times \times \times$ 是否过定点（一般在 x 轴上）

解题思路：设动点坐标为 $(m, 0)$ ，然后结合条件，将需要探究的 $\times \times \times$ 转化成与 $x_1 + x_2, x_1 x_2$ 有关的关系式，代入 $x_1 + x_2, x_1 x_2$ 后，会得到一个含有 m 的代数式，然后求解即可。

1. 2019~2020学年5月四川成都青羊区成都石室中学（文庙校区）高三下学期月考理科第20题12分

★★★★★

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右焦点为 $(1, 0)$ ，且经过点 $A(0, 1)$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 设 O 为原点，直线 $l: y = kx + t (t \neq \pm 1)$ 与椭圆 C 交于两个不同点 P, Q ，直线 AP 与 x 轴交于点 M ，直线 AQ 与 x 轴交于点 N ，若 $|OM| \cdot |ON| = 2$ ，求证：直线 l 经过定点。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 。

(2) (0,0) .

【解析】(1) 由题意知, $a^2 - b^2 = 1$ ①, $\frac{1}{b^2} = 1$ ②,

由①② $\Rightarrow b^2 = 1, a^2 = 2$,

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) 联立 $\begin{cases} y = kx + t \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}$, 得: $(2k^2 + 1)x^2 + 4ktx + 2t^2 - 2 = 0$,

$$\Delta = (4kt)^2 - 4(2k^2 + 1)(2t^2 - 2) > 0,$$

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -\frac{4kt}{2k^2 + 1}, x_1 x_2 = \frac{2t^2 - 2}{2k^2 + 1},$$

$\because A(0, 1), P(x_1, y_1)$,

$\therefore$ 直线 AP 的方程为: $y = \frac{y_1 - 1}{x_1}x + 1$,

令 $y = 0$, 得 $x = \frac{x_1}{1 - y_1}$, $\therefore M\left(\frac{x_1}{1 - y_1}, 0\right)$,

同理 $N\left(\frac{x_2}{1 - y_2}, 0\right)$,

又 $\because |OM| \cdot |ON| = 2$,

$$\therefore \left|\frac{x_1}{1 - y_1}\right| \cdot \left|\frac{x_2}{1 - y_2}\right| = 2,$$

即 $|x_1 x_2| = 2|(1 - y_1)(1 - y_2)|$,

又 $\because y_1 = kx_1 + t, y_2 = kx_2 + t$,

$$\therefore |x_1 x_2| = 2(kx_1 + t - 1)(kx_2 + t - 1) = 2k^2 x_1 x_2 + 2k(t - 1)(x_1 + x_2) + 2(t - 1)^2$$

若 $x_1 x_2 < 0$, 则有 $(2k^2 + 1)x_1 x_2 + 2k(t - 1)(x_1 + x_2) + 2(t - 1)^2 = 0$,

$$\therefore 2(t^2 - 1) + 2k(t - 1) \times \frac{-4kt}{2k^2 + 1} + 2(t - 1)^2 = 0,$$

$$\text{化简得: } t = \frac{2k^2 t}{2k^2 + 1}, \therefore t = 0.$$

此时, 直线 l 为 $y = kx$, 过定点 $(0, 0)$.

若 $x_1 x_2 > 0$, 则 $(2k^2 - 1)x_1 x_2 + 2k(t - 1)(x_1 + x_2) + 2(t - 1)^2 = 0$,

$$\therefore (2k^2 - 1) \times \frac{2(t^2 - 1)}{2k^2 + 1} + 2k(t - 1) \times \frac{-4kt}{2k^2 + 1} + 2(t - 1)^2 = 0,$$

$$\text{化简得: } \frac{(2k^2 - 1)(t + 1)}{2k^2 + 1} + \frac{-4k^2 t}{2k^2 + 1} + t - 1 = 0,$$

$$\therefore 4k^2 t - 2 - 4k^2 t = 0,$$

$\therefore -2 = 0$ 不成立.

综上, 直线 l 过定点 $(0, 0)$.

【标注】【知识点】定点问题; 椭圆的标准方程; 直线和椭圆的位置关系

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，焦距为 2。

(1) 求椭圆的方程。

(2) 设椭圆的左焦点为 F ，若直线 l 与椭圆交于不同两点 A, B (A, B 都在 x 轴上方)，且 $\angle OFA + \angle OFB = 180^\circ$ (O 为坐标原点)。

① 当 A 为椭圆与 y 轴正半轴的交点时，求直线 l 的方程。

② 对于直线 l 是否存在一个定点，无论 $\angle OFA$ 如何变化，直线 l 总经过此定点？若存在，求出该定点的坐标；若不存在，请说明理由。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 。

(2) ① $y = \frac{1}{2}x + 1$ 。

② 存在一个定点 $M(-2, 0)$ ，无论 $\angle OFA$ 如何变化，直线 l 总经过此定点。

【解析】 (1) 由椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，焦距为 2 得，

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2c = 2 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = 1 \end{cases},$$

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 。

(2) ① 由题意可得： $A(0, 1)$ ， $F(-1, 0)$ ，

$$\therefore k_{AF} = \frac{0-1}{-1-0} = 1,$$

$$\therefore \angle OFA + \angle OFB = 180^\circ,$$

$$\therefore k_{BF} = -1,$$

$$\therefore \text{直线 } BF \text{ 的方程为 } y = -(x+1) = -x-1,$$

$$\therefore \begin{cases} y = -x-1 \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases},$$

$$\text{整理得：} x(3x+4) = 0,$$

$$\text{解得：} x = 0 \text{ 或 } x = -\frac{4}{3},$$

$$\therefore x = 0 \text{ 时，} y = -1 \text{ (舍去)，}$$

$$x = -\frac{4}{3} \text{ 时，} y = \frac{1}{3}, \text{ 即 } B\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

$$\therefore k_{AB} = \frac{\frac{1}{3}-1}{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{2},$$

$$\text{即直线 } l \text{ 的方程为 } y = \frac{1}{2}x + 1.$$

② 存在一个定点 $M(-2, 0)$ ，无论 $\angle OFA$ 如何变化，直线 l 总经过此定点。

$$\therefore \angle OFA + \angle OFB = 180^\circ,$$

$\therefore B$ 关于 x 轴的对称点 B_1 在直线 AF 上，设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，则

$B_1(x_2, -y_2)$ ，直线 AF 的方程为 $y = k(x+1)$ ，则将其与椭圆方程联立，

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} y = k(x+1) \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{整理得:} \\
& \left(k^2 + \frac{1}{2}\right)x^2 + 2k^2x + k^2 - 1 = 0, \\
& \therefore \Delta = 4k^4 - 4\left(k^2 + \frac{1}{2}\right)(k^2 - 1) \\
& = 2(k^2 + 1) > 0, \\
& \therefore x_1 + x_2 = -\frac{2k^2}{k^2 + \frac{1}{2}} = -\frac{4k^2}{2k^2 + 1}, \\
& x_1x_2 = \frac{k^2 - 1}{k^2 + \frac{1}{2}} = \frac{2k^2 - 2}{2k^2 + 1}, \\
& \therefore k_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \\
& \therefore \text{直线 } AB \text{ 的方程为} \\
& y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1), \\
& \text{令 } y = 0, \text{ 则 } x = x_1 - y_1 \cdot \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{y_1 - y_2}, \\
& \therefore y_1 = k(x_1 + 1), -y_2 = k(x_2 + 1), \\
& \therefore x = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{y_1 - y_2} \\
& = \frac{kx_2(x_1 + 1) + kx_1(x_2 + 1)}{k(x_1 + 1) + k(x_2 + 1)} \\
& = \frac{2x_1x_2 + x_1 + x_2}{x_1 + x_2 + 2} \\
& = \frac{2 \cdot \frac{2k^2 - 2}{2k^2 + 1} - \frac{4k^2}{2k^2 + 1}}{-\frac{4k^2}{2k^2 + 1} + 2} \\
& = -2, \\
& \therefore \text{对于动直线 } l, \text{ 存在一个定点 } M(-2, 0), \text{ 无论 } \angle OFA \text{ 如何变化,} \\
& \text{直线 } l \text{ 总经过此定点.}
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】 定点问题

定值问题

求证 $\times \times \times$ 为定值

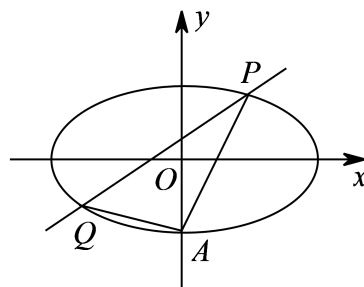
解题思路：将需要求证的 $\times \times \times$ 转化成与 $x_1 + x_2, x_1x_2$ 有关的关系式，代入 $x_1 + x_2, x_1x_2$ 后，得到的就是我们需要证明的定值。

探究 $\times \times \times$ 是否为定值？

解题思路：将需要探究的 $\times \times \times$ 转化成与 $x_1 + x_2, x_1x_2$ 有关的关系式，代入 $x_1 + x_2, x_1x_2$ 后，一般情况下会得到一个含有参数 k 的整式或者分式。若含有参数 k 的代数式为整式，则令 k 的每一项系数都等于 0；若含有参数 k 的代数式为分式，则令含有 k 的分子分母对应的系数之比相等。

3. 2015~2016学年陕西西安莲湖区西安市第七十中学高二上学期期末理科第22题13分 ★★★

如图，椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $A(0, -1)$ ，且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。



(1) 求椭圆 E 的方程。

(2) 经过点 $(1, 1)$ ，且斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同两点 P, Q (均异于点 A)，问直线 AP 与 AQ 的斜率之和是否为定值。若是，求出这个定值；若不是，请说明理由。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 。

(2) 是，定值为 2。

【解析】 (1) 由题意知 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $b = 1$ ，结合 $a^2 = b^2 + c^2$ ，解得 $a = \sqrt{2}$ ，
 $\therefore$ 椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 。

(2) 由题设知，直线 PQ 的方程为 $y = k(x - 1) + 1 (k \neq 0)$ ，代入 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ，得

$$(1 + 2k^2)x^2 - 4k(k - 1)x + 2k(k - 2) = 0。$$

由已知 $\Delta > 0$ ，设 $P(x_1, y_1)$ ， $Q(x_2, y_2)$ ， $x_1 x_2 \neq 0$ ，

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{4k(k - 1)}{1 + 2k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{2k(k - 2)}{1 + 2k^2},$$

从而直线 AP 与 AQ 的斜率之和为：

$$\begin{aligned} k_{AP} + k_{AQ} &= \frac{y_1 + 1}{x_1} + \frac{y_2 + 1}{x_2} \\ &= \frac{kx_1 + 2 - k}{x_1} + \frac{kx_2 + 2 - k}{x_2} \\ &= 2k + (2 - k) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) \\ &= 2k + (2 - k) \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} \\ &= 2k + (2 - k) \frac{4k(k - 1)}{2k(k - 2)} \\ &= 2k - 2(k - 1) \\ &= 2。 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】定值问题（证明、探究）；直线和椭圆的位置关系

4. 2021年天津静海县高三一模第19题15分 ★★

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短半轴长为 1，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

(1) 求 C 的方程.

(2) 设 C 的上、下顶点分别为 B, D , 动点 P (横坐标不为 0) 在直线 $y = 2$ 上, 直线 PB 交 C 于点 M , 记直线 DM, DP 的斜率分别为 k_1, k_2 , 求 $k_1 \cdot k_2$ 的值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) $-\frac{3}{4}$.

【解析】(1) 设椭圆 C 的半焦距为 c ,

$$\text{依题意, 得 } \begin{cases} b = 1 \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases},$$

解得 $a = 2, c = \sqrt{3}$,

故所求 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 由 (1) 得点 $B(0, 1), D(0, -1)$,

依题意知直线 PB 的斜率 (不妨设为 k) 存在, 且 $k \neq 0$,

则直线 PB 的方程为 $y = kx + 1 (k \neq 0)$,

$$\text{联立方程组 } \begin{cases} y = kx + 1 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases},$$

消去 y 并整理, 得 $(1 + 4k^2)x^2 + 8kx = 0, (*)$

设点 $M(x_M, y_M)$, 则 $x_M, 0$ 是方程 $(*)$ 的实数根,

$$\text{且 } x_M = \frac{-8k}{1 + 4k^2},$$

$$\text{从而 } y_M = kx_M + 1 = \frac{-8k^2 + 1 + 4k^2}{1 + 4k^2} = \frac{1 - 4k^2}{1 + 4k^2},$$

$$\text{所以点 } M\left(\frac{-8k}{1 + 4k^2}, \frac{1 - 4k^2}{1 + 4k^2}\right),$$

$$\text{所以 } k_1 = k_{DM} = \frac{\frac{1 - 4k^2}{1 + 4k^2} + 1}{\frac{-8k}{1 + 4k^2}} = -\frac{1}{4k},$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + 1 \\ y = 2 \end{cases}, \text{ 得 } x = \frac{1}{k},$$

$$\text{即点 } P\left(\frac{1}{k}, 2\right),$$

$$\text{所以 } k_2 = k_{DP} = \frac{2 - (-1)}{\frac{1}{k}} = 3k,$$

$$\text{故 } k_1 \cdot k_2 = -\frac{1}{4k} \times 3k = -\frac{3}{4}.$$

【标注】【知识点】定值问题 (证明、探究); 椭圆的基本量求解

5. 2021年天津河东区高三一模第18题15分 ★★★

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{2}{3}$, 且左顶点到右焦点的距离为 5.

(1) 求椭圆方程.

(2) 椭圆上有两点 A, B , O 为坐标原点, 且 $AO \perp BO$, 证明存在定点 M , 使得 M 到直线 AB 的距离为定值, 并求出定值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$.

(2) 证明见解析, $\frac{3\sqrt{70}}{14}$.

【解析】(1) 由题意得 $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{2}{3} \\ a+c=5 \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$, 解得: $a^2=9, b^2=5$,

故椭圆 C 的方程是 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$.

(2) ①若直线 AB 与 x 轴垂直, 由对称性可知 $|x_1| = |y_1|$, 将点 $A(x_1, y_1)$ 代入椭圆中,

解得 $|x_1| = \frac{3\sqrt{70}}{14}$,

②若直线 AB 不与 x 轴垂直, 设直线 AB 的方程是 $y = kx + m$, $A(x_1, y_1)$,

$B(x_2, y_2)$,

联立 $\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \end{cases}$, 消去 y 整理得:

$$(9k^2 + 5)x^2 + 18kmx + 9m^2 - 45 = 0,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-18km}{9k^2 + 5} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{9m^2 - 45}{9k^2 + 5} \end{cases},$$

又 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$, 则 $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$,

即 $(k^2 + 1)x_1x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2 = 0$,

故 $(k^2 + 1) \frac{9m^2 - 45}{9k^2 + 5} + km \left(\frac{-18km}{9k^2 + 5} \right) + m^2 = 0$,

整理得: $45k^2 + 45 = 14m^2$

即 $\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} = \sqrt{\frac{45}{14}} = \frac{3\sqrt{70}}{14}$,

故存在定点 $M(0, 0)$,

综上所述, 存在定点 $M(0, 0)$, 使 M 到直线 AB 的距离为定值.

【标注】【知识点】定值问题 (证明、探究)

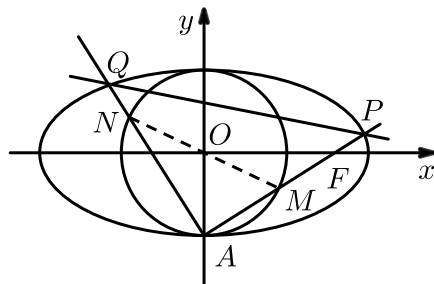
6. 2018年江苏南通如皋市高三二模第18题16分 ★★★★★

在平面直角坐标系 xOy 中, 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的下顶点为 A , 右焦点为 F , 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 已知点 P 是椭圆上一点, 当直线 AP 经过点 F 时, 原点 O 到直线 AP 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2)

设直线 AP 与圆 $O: x^2 + y^2 = b^2$ 相交于点 M (异于点 A) , 设点 M 关于原点 O 的对称点为 N , 直线 AN 与椭圆相交于点 Q (异于点 A) .



- ① 若 $|AP| = 2|AM|$, 求 $\triangle APQ$ 的面积 .
 ② 设直线 MN 的斜率为 k_1 , 直线 PQ 的斜率为 k_2 , 求证 : $\frac{k_1}{k_2}$ 是定值 .

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) ① $\frac{16\sqrt{2}}{9}$.

② 证明见解析 .

【解析】 (1) 据题意 , 椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. ①

当直线 AP 经过点 F 时 , 直线 AP 的方程为 $\frac{x}{c} + \frac{y}{-a} = 1$, 即 $ax - cy - ac = 0$,

由原点 O 到直线 AF 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 可知 $\frac{|-ac|}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

即 $\frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. ②

联立①②可得 , $a = 2$, $c = \sqrt{3}$, 故 $b^2 = a^2 - c^2 = 1$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) ① 据题意 , 直线 AP 的斜率存在 , 且不为 0 ,

设直线 AP 的斜率为 k , 则直线 AP 的方程为 $y = kx - 1$,

联立 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 整理可得 $(1 + 4k^2)x^2 - 8kx = 0$, 所以 $x = 0$ 或 $x = \frac{8k}{1 + 4k^2}$.

所以点 P 的坐标为 $\left(\frac{8k}{1 + 4k^2}, \frac{4k^2 - 1}{4k^2 + 1} \right)$,

联立 $y = kx - 1$ 和 $x^2 + y^2 = 1$,

整理可得 $(1 + k^2)x^2 - 2kx = 0$, 所以 $x = 0$ 或 $x = \frac{2k}{1 + k^2}$.

所以点 M 的坐标为 $\left(\frac{2k}{1 + k^2}, \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \right)$.

显然 , MN 是圆 O 的直径 , 故 $AM \perp AN$,

所以直线 AN 的方程为 $y = -\frac{1}{k}x - 1$.

用 $-\frac{1}{k}$ 代替 k , 得点 Q 的坐标为

$$\left(\frac{-\frac{8}{k}}{\frac{4}{k^2}+1}, \frac{\frac{4}{k^2}-1}{\frac{4}{k^2}+1} \right) \text{ 即 } Q \left(-\frac{8k}{k^2+4}, \frac{4-k^2}{4+k^2} \right),$$

由 $|AP| = 2|AM|$ 可得, $x_P = 2x_M$,

$$\text{即 } \frac{8k}{1+4k^2} = 2 \cdot \frac{2k}{1+k^2},$$

$$\text{解得 } k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

根据图形的对称性, 不妨取 $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\text{则点 } P, Q \text{ 的坐标分别为 } \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3} \right), \left(-\frac{8\sqrt{2}}{9}, \frac{7}{9} \right),$$

$$\text{故 } |AP| = \frac{4\sqrt{3}}{3}, |AQ| = \frac{8\sqrt{6}}{9}.$$

$$\text{所以 } \triangle APQ \text{ 的面积为 } \frac{1}{2}|AP| \cdot |AQ| = \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} \times \frac{8\sqrt{6}}{9} = \frac{16\sqrt{2}}{9}.$$

$$\textcircled{2} \text{ 直线 } MN \text{ 的斜率 } k_1 = k_{OM} = \frac{k^2-1}{k^2+1} \cdot \frac{k^2+1}{2k} = \frac{k^2-1}{2k},$$

$$\text{直线 } PQ \text{ 的斜率 } k_2 = \frac{\frac{4k^2-1}{8k} - \frac{4-k^2}{-8k}}{\frac{1+4k^2}{k^2+4}} = \frac{k^2-1}{5k}.$$

$$\text{所以 } \frac{k_1}{k_2} = \frac{k^2-1}{2k} \cdot \frac{5k}{k^2-1} = \frac{5}{2} \text{ 为定值, 得证.}$$

【标注】【知识点】定值问题(证明、探究); 面积问题

7. 2020年天津蓟县高三二模第19题15分 ★★★★★

已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点其焦距为 6, 过 F_1 的直线与 C 交于 A, B 两点, 且 $\triangle ABF_2$ 的周长是 $12\sqrt{2}$.

(1) 求 C 的方程.

(2) 若 $M(x_0, y_0)$ 是 C 上的动点, 从点 O (O 是坐标系原点) 向圆 $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = 6$ 作两条切线, 分别交 C 于 P, Q 两点. 已知直线 OP, OQ 的斜率存在, 并分别记为 k_1, k_2 .

① 求证: $k_1 k_2$ 为定值.

② 试问 $|OP|^2 + |OQ|^2$ 是否为定值? 若是, 求出该值; 若不是, 请说明理由.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) ① 证明见解析.

② 是定值, 该定值为 27.

【解析】 (1) 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 $2c (c > 0)$,

则 $2c = 6$,

故: $c = 3$.

∵ 直线 AB 过 C 的焦点 F_1 , 且 $\triangle ABF_2$ 的周长是 $12\sqrt{2}$,

$$\therefore |AB| + (|AF_2| + |BF_2|)$$

$$= (|AF_1| + |BF_1|) + (|AF_2| + |BF_2|) = 4a = 12\sqrt{2} ,$$

$$\therefore a = 3\sqrt{2} ,$$

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 18 - 9 = 9 ,$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程是 } \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1 .$$

(2) ① ∵ 从点 O (O 是坐标系原点) 向圆 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 6$ 作两条切线

分别交 C 于 P , Q 两点 ,

已知直线 OP , OQ 的斜率存在 , 并分别记为 k_1 , k_2 ,

$$\therefore \text{直线 } OP : y = k_1 x ,$$

$$\text{直线 } OQ : y = k_2 x ,$$

∵ 直线 OP , OQ 与圆 M 相切 ,

$$\therefore \text{根据点到直线距离公式可得 : } \frac{|k_1 x_0 - y_0|}{\sqrt{1 + k_1^2}} = \sqrt{6} ,$$

$$\text{化简得 } (x_0^2 - 6)k_1^2 - 2x_0 y_0 k_1 + y_0^2 - 6 = 0 ,$$

$$\text{同理可得 } (x_0^2 - 6)k_2^2 - 2x_0 y_0 k_2 + y_0^2 - 6 = 0 ,$$

∴ k_1 , k_2 是一元二次方程 $(x_0^2 - 6)k^2 - 2x_0 y_0 k + y_0^2 - 6 = 0$ 的两实数根 .

$$\text{则有 } k_1 \cdot k_2 = \frac{y_0^2 - 6}{x_0^2 - 6} ,$$

又 ∵ 点 $M(x_0, y_0)$ 在 C 上 ,

$$\therefore \frac{x_0^2}{18} + \frac{y_0^2}{9} = 1 , \text{ 即 } y_0^2 = 9 - \frac{1}{2}x_0^2 ,$$

$$\therefore k_1 k_2 = \frac{3 - \frac{1}{2}x_0^2}{x_0^2 - 6} = \frac{\frac{1}{2}(6 - x_0^2)}{x_0^2 - 6} = -\frac{1}{2} \text{ (定值)} .$$

② 设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$,

$$\text{联立方程组 } \begin{cases} y = k_1 x \\ \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases} ,$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x_1^2 = \frac{18}{1 + 2k_1^2} \\ y_1^2 = \frac{18k_1^2}{1 + 2k_1^2} \end{cases} ,$$

$$\therefore x_1^2 + y_1^2 = \frac{18(1 + k_1^2)}{1 + 2k_1^2} ,$$

$$\text{同理可得 } x_2^2 + y_2^2 = \frac{18(1 + k_2^2)}{1 + 2k_2^2} ,$$

$$\text{由①知 } k_1 k_2 = -\frac{1}{2} ,$$

$$\therefore |OP|^2 + |OQ|^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2$$

$$= \frac{18(1 + k_1^2)}{1 + 2k_1^2} + \frac{18(1 + k_2^2)}{1 + 2k_2^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{18(1+k_1^2)}{1+2k_1^2} + \frac{18\left(1+\left(-\frac{1}{2k_1}\right)^2\right)}{1+2\left(-\frac{1}{2k_1}\right)^2} \\
&= \frac{27+54k_1^2}{1+2k_1^2} = 27, \\
&\therefore |OP|^2 + |OQ|^2 = 27 \text{ (定值)}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】定值问题（证明、探究）；椭圆的标准方程；直线和椭圆的位置关系

2. 向量点乘问题问题

【解题思路】向量是平面解析几何中的重要的基本工具，向量可以解决长度、夹角、点共线、直线的平行和垂直等条件的代数化，有时圆锥曲线中的已知条件也会以向量形式给出，这都要求我们能够熟练掌握和使用向量工具。例如，常见的直线垂直条件，如果用斜率之积为来表达则需要讨论斜率是否存在，而用向量的数量积为来表达则不需要讨论。

8. 2014~2015学年北京海淀区高三上学期期末理科第18题 ★★★

已知椭圆 $M: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，点 F_1 ， C 分别是椭圆 M 的左焦点、左顶点，过点 F_1 的直线 l （不与 x 轴重合）交 M 于 A, B 两点。

（1）求 M 的离心率及短轴长；

（2）是否存在直线 l ，使得点 B 在以线段 AC 为直径的圆上，若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，说明理由。

【答案】（1）离心率为 $\frac{1}{2}$ ，短轴长为 $2\sqrt{3}$ 。

（2）不存在直线 l ，使得点 B 在以 AC 为直径的圆上

【解析】（1）由 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 得： $a=2, b=\sqrt{3}$ 。

所以椭圆 M 的短轴长为 $2\sqrt{3}$ 。

因为 $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$ ，所以 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ ，即 M 的离心率为 $\frac{1}{2}$ 。

（2）由题意知： $C(-2, 0), F_1(-1, 0)$ ，设 $B(x_0, y_0) (-2 < x_0 < 2)$ ，则 $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1$ 。

因为 $\overrightarrow{BF_1} \cdot \overrightarrow{BC} = (-1 - x_0, -y_0) \cdot (-2 - x_0, -y_0) = 2 + 3x_0 + x_0^2 + y_0^2$

$= \frac{1}{4}x_0^2 + 3x_0 + 5 > 0$ ，

所以 $\angle B \in (0, \frac{\pi}{2})$ 。

所以点 B 不在以 AC 为直径的圆上，即：不存在直线 l ，使得点 B 在以 AC 为直径的圆上。

另解：由题意可设直线 l 的方程为 $x = my - 1$ ， $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 。

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ x = my - 1 \end{cases}$ 可得: $(3m^2 + 4)y^2 - 6my - 9 = 0$.

所以 $y_1 + y_2 = \frac{6m}{3m^2 + 4}$, $y_1 y_2 = \frac{-9}{3m^2 + 4}$.

所以 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (x_1 + 2, y_1) \cdot (x_2 + 2, y_2) = (m^2 + 1)y_1 y_2 + m(y_1 + y_2) + 1$
 $= (m^2 + 1) \frac{-9}{3m^2 + 4} + m \cdot \frac{6m}{3m^2 + 4} + 1 = \frac{-5}{3m^2 + 4} < 0$.

因为 $\cos C = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} \in (-1, 0)$, 所以 $\angle C \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

所以 $\angle B \in (0, \frac{\pi}{2})$. 所以点 B 不在以 AC 为直径的圆上,

即: 不存在直线 l , 使得点 B 在以 AC 为直径的圆上.

【标注】【知识点】向量问题

9. 2021年天津滨海新区高三二模(七校联考)第18题15分 ★★★

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, F_1, F_2 分别为椭圆 E 的左、右焦点, M 为 E 上任意一点, $S_{\triangle F_1 M F_2}$ 的最大值为 1, 椭圆右顶点为 A .

(1) 求椭圆 E 的方程.

(2) 若过 A 的直线 l 交椭圆于另一点 B , 过 B 作 x 轴的垂线交椭圆于 C (C 异于 B 点), 连接 AC 交 y 轴于点 P . 如果 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{1}{2}$ 时, 求直线 l 的方程.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) $l: y = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $y = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

【解析】 (1) 当 M 为椭圆的短轴端点时, $S_{\triangle F_1 M F_2}$ 取得最大值,

即 $S = \frac{1}{2} \times 2c \times b = 1$,

又因为 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a^2 = b^2 + c^2$,

解得, $a = \sqrt{2}$, $b = 1$, $c = 1$,

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) $A(\sqrt{2}, 0)$, 根据题意, 直线 l 斜率存在且不为 0,

设直线 $l: y = k(x - \sqrt{2})$, $B(x_0, y_0)$,

联立 $\begin{cases} y = k(x - \sqrt{2}) \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}$,

得 $(1 + 2k^2)x^2 - 4\sqrt{2}k^2x + 4k^2 - 2 = 0$, $\sqrt{2}x_0 = \frac{4\sqrt{2}k^2}{1 + 2k^2}$, $\sqrt{2}x_0 = \frac{4k^2 - 2}{1 + 2k^2}$,

即 $B\left(\frac{\sqrt{2}(2k^2 - 1)}{1 + 2k^2}, \frac{-2\sqrt{2}k}{1 + 2k^2}\right)$,

$$\begin{aligned} & \text{由题意得, } C\left(\frac{\sqrt{2}(2k^2-1)}{1+2k^2}, \frac{2\sqrt{2}k}{1+2k^2}\right), k_{AC} = \frac{\frac{2\sqrt{2}k}{1+2k^2}}{\frac{\sqrt{2}(2k^2-1)}{1+2k^2} - \sqrt{2}} = -k, \\ & \text{所以直线 } AC: y = -k(x - \sqrt{2}), \text{ 令 } x = 0, \text{ 则 } P(0, \sqrt{2}k), \\ & \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}k) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}(2k^2-1)}{1+2k^2}, \frac{-2\sqrt{2}k}{1+2k^2} - \sqrt{2}k\right) = \frac{4k^4 + 10k^2 - 2}{1+2k^2} = \frac{1}{2}, \\ & \text{即 } 8k^4 + 18k^2 - 5 = 0, \\ & \text{解得: } k^2 = -\frac{5}{2} \text{ (舍)} \quad k^2 = \frac{1}{4}, \\ & \text{所以: } k = \pm \frac{1}{2}, \\ & \text{直线 } l: y = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 或 } y = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】向量问题

10. 2019~2020学年9月天津南开区天津中学高三上学期月考第20题15分 ★★★

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 连接椭圆的四个顶点得到的菱形的面积为 4.

(1) 求椭圆的方程.

(2) 设直线 l 与椭圆相交于不同的两点 A, B , 已知点 A 的坐标为 $(-a, 0)$.

① 若 $|AB| = \frac{4\sqrt{2}}{5}$, 求直线 l 的倾斜角.

② 若点 $Q(0, y_0)$ 在线段 AB 的垂直平分线上, 且 $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = 4$. 求 y_0 的值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) ① $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$.

② $y_0 = \pm 2\sqrt{2}$ 或 $y_0 = \pm \frac{2\sqrt{14}}{5}$.

【解析】(1) 由 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 得 $3a^2 = 4c^2$.

再由 $c^2 = a^2 - b^2$, 解得 $a = 2b$.

由题意可知 $\frac{1}{2} \times 2a \times 2b = 4$, 即 $ab = 2$.

解方程组 $\begin{cases} a = 2b \\ ab = 2 \end{cases}$ 得 $a = 2, b = 1$.

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) ① 由 (1) 可知点 A 的坐标是 $(-2, 0)$.

设点 B 的坐标为 (x_1, y_1) , 直线 l 的斜率为 k .

则直线 l 的方程为 $y = k(x + 2)$.

于是 A, B 两点的坐标满足方程组 $\begin{cases} y = k(x + 2) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$,

消去 y 并整理, 得 $(1 + 4k^2)x^2 + 16k^2x + (16k^2 - 4) = 0$.

$$\text{由 } -2x_1 = \frac{16k^2 - 4}{1 + 4k^2}, \text{ 得 } x_1 = \frac{1 - 8k^2}{1 + 4k^2}. \text{ 从而 } y_1 = \frac{4k}{1 + 4k^2}.$$

$$\text{所以 } |AB| = \sqrt{\left(-2 - \frac{2 - 8k^2}{1 + 4k^2}\right)^2 + \left(\frac{4k}{1 + 4k^2}\right)^2} = \frac{4\sqrt{1 + 4k^2}}{1 + 4k^2}.$$

$$\text{由 } |AB| = \frac{4\sqrt{2}}{5}, \text{ 得 } \frac{4\sqrt{1 + k^2}}{1 + 4k^2} = \frac{4\sqrt{2}}{5}.$$

整理得 $32k^4 - 9k^2 - 23 = 0$, 即 $(k^2 - 1)(32k^2 + 23) = 0$, 解得 $k = \pm 1$.

所以直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$.

② 设线段 AB 的中点为 M ,

$$\text{由 (i) 得到 } M \text{ 的坐标为 } \left(-\frac{8k^2}{1 + 4k^2}, \frac{2k}{1 + 4k^2}\right).$$

以下分两种情况:

(1) 当 $k = 0$ 时, 点 B 的坐标是 (20) ,

线段 AB 的垂直平分线为 y 轴,

$$\text{于是 } \overrightarrow{QA} = (-2, -y_0), \overrightarrow{QB} = (2, -y_0).$$

$$\text{由 } \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = 4, \text{ 得 } y_0 = \pm 2\sqrt{2}.$$

(2) 当 $k \neq 0$ 时, 线段 AB 的垂直平分线方程为

$$y - \frac{2k}{1 + 4k^2} = -\frac{1}{k} \left(x + \frac{8k^2}{1 + 4k^2}\right).$$

$$\text{令 } x = 0, \text{ 解得 } y_0 = -\frac{6k}{1 + 4k^2}.$$

$$\text{由 } \overrightarrow{QA} = (-2, -y_0), \overrightarrow{QB} = (x_1, y_1 - y_0),$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} &= -2x_1 - y_0(y_1 - y_0) \\ &= \frac{-2(2 - 8k^2)}{1 + 4k^2} + \frac{6k}{1 + 4k^2} \left(\frac{4k}{1 + 4k^2} + \frac{6k}{1 + 4k^2}\right) \\ &= \frac{4(16k^4 + 15k^2 - 1)}{(1 + 4k^2)^2} = 4, \end{aligned}$$

$$\text{整理得 } 7k^2 = 2. \text{ 故 } k = \pm \frac{\sqrt{14}}{7}.$$

$$\text{所以 } y_0 = \pm \frac{2\sqrt{14}}{5}.$$

$$\text{综上, } y_0 = \pm 2\sqrt{2} \text{ 或 } y_0 = \pm \frac{2\sqrt{14}}{5}.$$

【标注】【知识点】向量问题; 直线和椭圆的位置关系

11. 2020~2021学年天津高三上学期期末(部分区)第19题15分 ★★★★★

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 过点 $(\sqrt{6}, \sqrt{2})$, 且离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. 设 P 为圆 $x^2 + y^2 = 3$ 上任意一点, 过点 P 作该圆的切线交椭圆于 E, F 两点.

(1) 求椭圆的方程.

(2) 试判断 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$ 是否为定值? 若为定值, 则求出该定值; 否则, 请说明理由.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 是, -3 .

【解析】(1)

$$\text{由题可得} \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{6}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = 2\sqrt{3} \\ b = 2 \end{cases}.$$

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) ①当过点 P 且与圆 $x^2 + y^2 = 3$ 相切的切线斜率不存在时,

由对称性, 不妨设切线方程为 $x = \sqrt{3}$,

则 $P(\sqrt{3}, 0)$, $E(\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $F(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$,

所以 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF} = -3$.

②当过点 P 且与圆 $x^2 + y^2 = 3$ 相切的切线斜率存在时,

不妨设切线的方程为 $y = kx + m$,

设点 $E(x_1, y_1)$, $F(x_2, y_2)$, $P(x_0, y_0)$,

将直线方程与圆的方程联立并整理,

得 $(1 + k^2)x^2 + 2kmx + m^2 - 3 = 0$,

由直线与圆相切易得 $m^2 = 3(1 + k^2)$, $x_0 = -\frac{km}{k^2 + 1}$,

联立直线和椭圆的方程并整理,

得 $(1 + 3k^2)x^2 + 6kmx + 3m^2 - 12 = 0$,

则 $\Delta = 36k^2m^2 - 4(1 + 3k^2)(3m^2 - 12) > 0$,

所以 $x_1 + x_2 = -\frac{6km}{1 + 3k^2}$, $x_1x_2 = \frac{3m^2 - 12}{1 + 3k^2}$.

所以 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0) \cdot (x_2 - x_0, y_2 - y_0)$

$$= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) + (y_1 - y_0)(y_2 - y_0)$$

$$= (k^2 + 1)(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)$$

$$= (k^2 + 1)[x_1x_2 - x_0(x_1 + x_2) + x_0^2]$$

$$= (k^2 + 1) \left[\frac{3m^2 - 12}{1 + 3k^2} + \frac{6km \cdot \left(-\frac{km}{k^2 + 1}\right)}{1 + 3k^2} + \left(\frac{km}{k^2 + 1}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{-9k^2 - 3}{1 + 3k^2}$$

$$= -3.$$

综上所述, $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$ 为定值 -3 .

【标注】【知识点】定值问题(证明、探究); 椭圆的标准方程

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 椭圆 C 上的点到其左焦点的最大距离为 $2 + \sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 过点 $A(-a, 0)$ 作直线 l 与椭圆相交于点 B , 则 y 轴上是否存在点 P , 使得线段 $|PA| = |PB|$, 且 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 4$? 如果存在, 求出点 P 坐标; 否则请说明理由.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) y 轴上存在点 P , 使得线段 $|PA| = |PB|$, 且 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 4$, 点 P 坐标为 $(0, \pm 2\sqrt{2})$ 或 $(0, \pm \frac{2\sqrt{14}}{5})$.

【解析】 (1) $\because e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore$ 设 $a = 2k$, $c = \sqrt{3}k$,

又 $\because$ 椭圆 C 上的动点 E 与 F_1 距离的最小值为 $4 - 2\sqrt{3}$,

$\therefore a - c = 4 - 2\sqrt{3}$,

$\therefore k = 2$,

即 $a = 4$, $c = 2\sqrt{3}$,

$\therefore b = 2$,

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 由 (1) 知 $A(-2, 0)$, 设 $B(x_1, y_1)$,

由题意, 直线 l 斜率存在, 设为 k ,

则直线 l 方程为 $y = k(x + 2)$,

联立方程得 $\begin{cases} y = k(x + 2) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$,

整理得, $(1 + 4k^2)x^2 + 16k^2x + (16k^2 - 4) = 0$,

由 $-2x_1 = \frac{16k^2 - 4}{1 + 4k^2}$ 得, $x_1 = \frac{2 - 8k^2}{1 + 4k^2}$, 则 $y_1 = \frac{4k}{1 + 4k^2}$,

假设 y 轴上存在点 P , 使得线段 $|PA| = |PB|$, 且 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 4$,

则由 $|PA| = |PB|$ 得点 P 为线段 AB 中垂线与 y 轴交点, 设 $P(0, y_0)$,

设 AB 中点为 M , 则 M 的坐标为 $(\frac{-8k^2}{1 + 4k^2}, \frac{2k}{1 + 4k^2})$,

以下分两种情况:

① 当 $k = 0$ 时, 点 $B(2, 0)$,

此时 AB 中垂线为 y 轴,

于是, $\overrightarrow{PA} = (-2, y_0)$, $\overrightarrow{PB} = (2, -y_0)$, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 4$,

$\therefore y_0 = \pm 2\sqrt{2}$,

② 当 $k \neq 0$ 时, 线段 AB 中垂线的方程为 $y - \frac{2k}{1 + 4k^2} = \frac{1}{k} \left(x + \frac{8k^2}{1 + 4k^2} \right)$,

$$\begin{aligned}
 \text{令 } x=0, \text{ 解得 } y_0 &= \frac{6k}{1+4k^2}, \\
 \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} &= (-2, y_0) \cdot (x_1, y_1 - y_0) \\
 &= -2x_1 + y_0(y_1 - y_0) \\
 &= \frac{-2(2-8k)}{1+4k^2} + \frac{6k}{1+4k^2} \left(\frac{4k}{1+4k^2} + \frac{6k}{1+4k^2} \right) \\
 &= \frac{4(16k^4 + 15k^2 - 1)}{1+4k^2} \\
 &= 4,
 \end{aligned}$$

$$\text{解得 } k = \pm \frac{\sqrt{14}}{7},$$

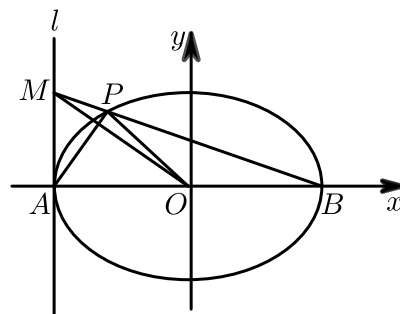
$$\therefore y_0 = \pm \frac{2\sqrt{14}}{5},$$

综上, y 轴上存在点 P , 使得线段 $|PA| = |PB|$, 且 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 4$, 点 P 坐标为 $(0, \pm 2\sqrt{2})$ 或 $(0, \pm \frac{2\sqrt{14}}{5})$.

【标注】【知识点】向量问题；椭圆的标准方程；直线和椭圆的位置关系

13. 2018~2019学年江苏南通海安县江苏省海安高级中学高二上学期期中第19题16分 ★★★★★

如图, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且经过点 $(1, \frac{\sqrt{6}}{2})$, 过椭圆的左顶点 A 作直线 $l \perp x$ 轴, 点 M 为直线 l 上的动点 (点 M 与点 A 不重合), 点 B 为椭圆右顶点, 直线 BM 交椭圆 C 于点 P .



(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 求证: $AP \perp OM$.

(3) 试问: $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}$ 是否为定值? 若是定值, 请求出该定值; 若不是, 请说明理由.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 证明见解析.

(3) 是.

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM} = 4.$$

【解析】 (1) $\because$ 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\therefore a^2 = 2c^2. \text{ 则 } a^2 = 2b^2.$$

$$\because C \text{ 过 } \left(1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right),$$

$$\therefore \frac{1}{a^2} + \frac{3}{2b^2} = 1.$$

$$\therefore a^2 = 4, b^2 = 2.$$

$$\therefore \text{椭圆 } C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

(2) 设直线 BM 的斜率为 k , 则直线 BM 的方程为 $y = k(x - 2)$.

设 $P(x_1, y_1)$,

$$\begin{cases} y = k(x - 2) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow (2k^2 + 1)x^2 - 8k^2x + 8k^2 - 4 = 0,$$

$$\text{得 } x_1 + x_2 = \frac{4k^2 - 2}{2k^2 + 1}, x_2 = 2.$$

$$\therefore y_1 = k(x_1 - 2) = -\frac{4k}{2k^2 + 1}.$$

$$\therefore P\left(\frac{4k^2 - 2}{2k^2 + 1}, -\frac{4k}{2k^2 + 1}\right).$$

令 $x = -2$, 得 $y = -4k$,

$$\therefore M(-2, -4k), \overrightarrow{OM} = (-2, -4k).$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \left(\frac{4k^2 - 2}{2k^2 + 1} + 2, -\frac{4k}{2k^2 + 1}\right),$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{OM} = -\frac{16k^2}{2k^2 + 1} + \frac{16k^2}{2k^2 + 1} = 0.$$

$\therefore AP \perp OM$.

$$\begin{aligned} (3) \quad \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM} &= \left(\frac{4k^2 - 2}{2k^2 + 1}, -\frac{4k}{2k^2 + 1}\right) \cdot (-2, -4k) \\ &= \frac{-8k^2 + 4 + 16k^2}{2k^2 + 1} = \frac{8k^2 + 4}{2k^2 + 1} = 4. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】向量问题；定值问题（证明、探究）；直线和椭圆的位置关系；椭圆的标准方程

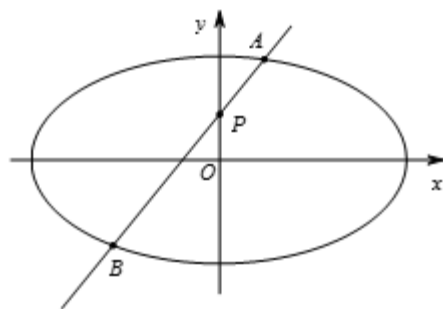
3. 共线比例问题

【解题思路】在直线与圆锥曲线的综合题中，我们把一条直线上涉及到两条线段或者两个向量成比例的问题称之为共线问题。共线比例线段问题的解题思路主要利用相似转化为 x_1, x_2 或是 y_1, y_2 成比例的关系。

例如：设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(0, t)$,

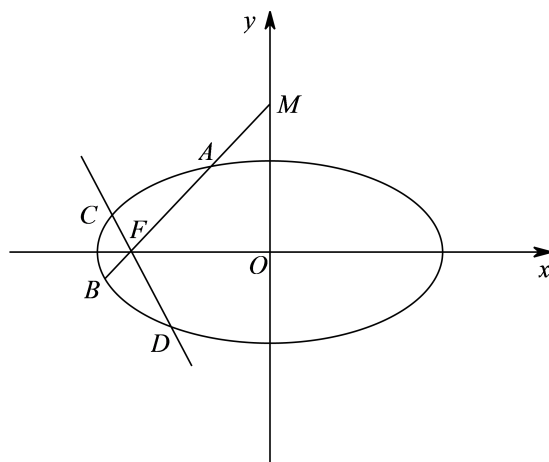
(1) 若 $\overrightarrow{PA} = \lambda \overrightarrow{PB}$, 则 $\begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \cdots (1) \\ y_1 - t = \lambda(y_2 - t) \cdots (2) \end{cases}$, 其中 (1) (2) 是等价的，我们只选择其中一个运用。

(2) 若 $|AP| = \lambda |BP|$, 则 $x_1 = -\lambda x_2$ 。



14. 2018年上海松江区高三一模第20题16分 ★★★★★

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 其左焦点为 $F(-\sqrt{3}, 0)$. 过 F 点的直线 l 交椭圆于 A 、 B 两点, 交 y 轴的正半轴于点 M .



- (1) 求椭圆 E 的方程.
- (2) 过点 F 且与 l 垂直的直线交椭圆于 C 、 D 两点, 若四边形 $ACBD$ 的面积为 $\frac{4}{3}$, 求直线 l 的方程.
- (3) 设 $\overrightarrow{MA} = \lambda_1 \overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{MB} = \lambda_2 \overrightarrow{BF}$, 求证: $\lambda_1 + \lambda_2$ 为定值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) $x - \sqrt{2}y + \sqrt{3} = 0$, 或 $\sqrt{2}x - y + \sqrt{6} = 0$.

(3) 证明见解析.

【解析】(1) 由题意得 $\begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \\ a^2 - b^2 = 3 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases}$

$\therefore$ 椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 设直线 $l: y = k(x + \sqrt{3})$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

由 $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ y = k(x + \sqrt{3}) \end{cases}$ 消去 y 得 $(1 + 4k^2)x^2 + 8\sqrt{3}k^2x + 12k^2 - 4 = 0$,

则 $x_1 + x_2 = -\frac{8\sqrt{3}k^2}{1 + 4k^2}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{12k^2 - 4}{1 + 4k^2}$, (*)

$$\begin{aligned}
 |AB| &= \sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2]} = \frac{4(1+k^2)}{1+4k^2}, \text{ 同理 } |CD| = \frac{4(1+k^2)}{1+k^2} \\
 \therefore S &= \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CD| = \frac{8(1+k^2)^2}{(k^2+4)(1+4k^2)} = \frac{4}{3} \therefore 2k^4 - 5k^2 + 2 = 0 \\
 \text{解得 } k^2 &= 2 \text{ 或 } k^2 = \frac{1}{2} \therefore k = \pm\sqrt{2} \text{ 或 } k = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \text{因为 } k > 0, &\text{ 所以 } k = \sqrt{2}, \text{ 或 } k = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \therefore \text{直线 } AB &\text{ 的方程为 } x - \sqrt{2}y + \sqrt{3} = 0, \text{ 或 } \sqrt{2}x - y + \sqrt{6} = 0. \\
 (3) \therefore \overrightarrow{MA} &= \lambda_1 \overrightarrow{AF}, \text{ 得 } x_1 = \lambda_1(-\sqrt{3} - x_1), x_2 = \lambda_2(-\sqrt{3} - x_2) \\
 \therefore \lambda_1 &= \frac{x_1}{-\sqrt{3} - x_1}, \lambda_2 = \frac{x_2}{-\sqrt{3} - x_2} \\
 \lambda_1 + \lambda_2 &= -\left(\frac{x_1}{\sqrt{3} + x_1} + \frac{x_2}{\sqrt{3} + x_2}\right) = -\frac{2x_1x_2 + \sqrt{3}(x_1 + x_2)}{x_1x_2 + \sqrt{3}(x_1 + x_2) + 3} = -8.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系；定值问题（证明、探究）

15. 2018年广东茂名高三一模理科第20题12分 ★★★★★

已知椭圆 $C_1: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点为 $F_1(0, \sqrt{5})$ ，且经过点 $P_1\left(\frac{4}{3}, \sqrt{5}\right)$ 。

(1) 求椭圆 C_1 的标准方程。

(2) 已知椭圆 C_2 的中心在原点，焦点在 y 轴上，且长轴和短轴的长分别是椭圆 C_1 的长轴和短轴的长的 λ 倍 ($\lambda > 1$)，过点 $C(-1, 0)$ 的直线 l 与椭圆 C_2 交于 A, B 两个不同的点，若 $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CB}$ ，求 $\triangle OAB$ 面积取得最大值时直线 l 的方程。

【答案】 (1) $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1$ 。

(2) $y = \frac{3}{2}(x+1)$ 或 $y = -\frac{3}{2}(x+1)$ 。

【解析】 (1) 方法一：设椭圆 C_1 的另一个焦点为 $F_2(0, -\sqrt{5})$ ，

由题意可得， $\triangle PF_1F_2$ 为直角三角形，

则 $|PF_1| = \frac{4}{3}$ ， $|F_1F_2| = 2\sqrt{5}$ ，

$\therefore |PF_2| = \sqrt{|PF_1|^2 + |F_1F_2|^2} = \frac{14}{3}$ ，

由椭圆定义得 $2a = |PF_1| + |PF_2| = \frac{18}{3} = 6$ ，即 $a = 3$ 。

又由 $b^2 + c^2 = a^2$ ，得 $b = 2$ ，

$\therefore$ 椭圆 C_1 的标准方程为 $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1$ 。

方法二：把点 $P\left(\frac{4}{3}, \sqrt{5}\right)$ 代入方程 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ 得， $\frac{5}{a^2} + \frac{16}{9b^2} = 1$ ①，

又 $b^2 + 5 = a^2$ ②，

由①②得 $a = 3$ ， $b = 2$ ，

$\therefore$ 椭圆 C_1 的标准方程 $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1$ 。

(2) 设椭圆 C_2 的方程为 $\frac{y^2}{9\lambda^2} + \frac{x^2}{4\lambda^2} = 1$ ， $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，

$\because \lambda > 1, \therefore$ 点 $C(-1, 0)$ 在椭圆内部, 直线 l 与椭圆必有两个不同的交点.

当直线 l 垂直于 x 轴时, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ (不是零向量), 不合条件.

故设直线 l 方程为 $y = k(x+1)$ (A, B, O 三点不共线, 故 $k \neq 0$),

由 $\begin{cases} y = k(x+1) \\ 4y^2 + 9x^2 = 36\lambda^2 \end{cases}$, 得 $\left(\frac{9}{k^2} + 4\right)y^2 - \frac{18}{k}y + 9 - 36\lambda^2 = 0$.

$$\therefore y_1 + y_2 = \frac{18k}{9 + 4k^2},$$

$\therefore \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CB}$, 而点 $C(-1, 0)$,

$\therefore (-1 - x_1, -y_1) = 2(x_2 + 1, y_2)$, 即 $y_1 = -2y_2$, 则 $y_1 + y_2 = -y_2$,

$$\therefore y_2 = -\frac{18k}{9 + 4k^2},$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle OAB \text{ 的面积 } S_{\triangle OAB} &= S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \times 1 \times |y_1| + \frac{1}{2} \times 1 \times |y_2| \\ &= \frac{1}{2} |y_1 - y_2| = \frac{3}{2} |y_2| = \frac{3}{2} \times \frac{18|k|}{9 + 4|k|^2} = \frac{27}{\frac{9}{|k|} + 4|k|} \leq \frac{27}{2\sqrt{36}} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

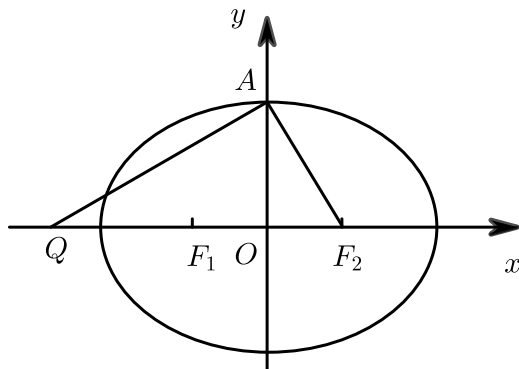
上式取等号的条件是 $|k|^2 = \frac{9}{4}$, 即 $k = \pm \frac{3}{2}$ 时, $\triangle OAB$ 的面积取得最大值.

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y = \frac{3}{2}(x+1)$ 或 $y = -\frac{3}{2}(x+1)$.

【标注】【知识点】最值问题; 直线和椭圆的位置关系

16. 2010~2011学年北京朝阳区高三上学期期末理科第19题 ★★★★★

设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 上顶点为 A , 过点 A 与 AF_2 垂直的直线交 x 轴负半轴于点 Q , 且 $2\overrightarrow{F_1F_2} + \overrightarrow{F_2Q} = \vec{0}$, 若过 A, Q, F_2 三点的圆恰好与直线 $l: x - \sqrt{3}y - 3 = 0$ 相切. 过定点 $M(0, 2)$ 的直线 l_1 与椭圆 C 交于 G, H 两点 (点 G 在点 M, H 之间).



- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 设直线 l_1 的斜率 $k > 0$, 在 x 轴上是否存在点 $P(m, 0)$, 使得以 PG, PH 为邻边的平行四边形是菱形. 如果存在, 求出 m 的取值范围, 如果不存在, 请说明理由;
- (3) 若实数 λ 满足 $\overrightarrow{MG} = \lambda \overrightarrow{MH}$, 求 λ 的取值范围.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 存在, 理由见解析.

(3) $[7 - 4\sqrt{3}, 1)$.

【解析】(1) 解：因为 $2\overrightarrow{F_1F_2} + \overrightarrow{F_2Q} = \vec{0}$,

所以 F_1 为 F_2Q 中点.

设 Q 的坐标为 $(-3c, 0)$,

因为 $AQ \perp AF_2$, 所以 $b^2 = 3c \times c = 3c^2$, $a^2 = 4c \times c = 4c^2$, 且过 A, Q, F_2 三点的圆的圆心为 $F_1(-c, 0)$, 半径为 $2c$.

因为该圆与直线 l 相切, 所以 $\frac{|-c-3|}{2} = 2c$.

解得 $c = 1$, 所以 $a = 2$, $b = \sqrt{3}$.

故所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 设 l_1 的方程为 $y = kx + 2 (k > 0)$,

由 $\begin{cases} y = kx + 2 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$, 得 $(3 + 4k^2)x^2 + 16kx + 4 = 0$.

由 $\Delta > 0$, 得 $k^2 > \frac{1}{4}$.

因为 $k > 0$, 所以 $k > \frac{1}{2}$.

设 $G(x_1, y_1)$, $H(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = -\frac{16k}{3 + 4k^2}$.

所以 $\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{PH} = (x_1 - m, y_1) + (x_2 - m, y_2) = (x_1 + x_2 - 2m, y_1 + y_2)$
 $= (x_1 + x_2 - 2m, k(x_1 + x_2) + 4)$

$\overrightarrow{GH} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (x_2 - x_1, k(x_2 - x_1))$.

由于菱形对角线互相垂直, 则 $(\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{PH}) \cdot \overrightarrow{GH} = 0$.

所以 $(x_2 - x_1)[(x_1 + x_2) - 2m] + k(x_2 - x_1)[k(x_1 + x_2) + 4] = 0$.

故 $(x_2 - x_1)[(x_1 + x_2) - 2m + k^2(x_1 + x_2) + 4k] = 0$.

因为 $k > \frac{1}{2}$, 所以 $x_2 - x_1 \neq 0$. 所以 $(x_1 + x_2) - 2m + k^2(x_1 + x_2) + 4k = 0$

即 $(1 + k^2)(x_1 + x_2) + 4k - 2m = 0$.

所以 $(1 + k^2)(-\frac{16k}{3 + 4k^2}) + 4k - 2m = 0$

解得 $m = -\frac{2k}{3 + 4k^2}$. 即 $m = -\frac{2}{\frac{3}{k} + 4k}$.

因为 $k > \frac{1}{2}$, 所以 $-\frac{\sqrt{3}}{6} \leq m < 0$.

故存在满足题意的点 P 且 m 的取值范围是 $[-\frac{\sqrt{3}}{6}, 0)$.

(3) 方法一：①当直线 l_1 斜率存在时,

设直线 l_1 方程为 $y = kx + 2$, 代入椭圆方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

得 $(3 + 4k^2)x^2 + 16kx + 4 = 0$.

由 $\Delta > 0$, 得 $k^2 > \frac{1}{4}$.

设 $G(x_1, y_1)$, $H(x_2, y_2)$,

则 $x_1 + x_2 = -\frac{16k}{3 + 4k^2}$, $x_1x_2 = \frac{4}{3 + 4k^2}$.

又 $\overrightarrow{MG} = \lambda \overrightarrow{MH}$, 所以 $(x_1, y_1 - 2) = \lambda(x_2, y_2 - 2)$. 所以 $x_1 = \lambda x_2$.

所以 $x_1 + x_2 = (1 + \lambda)x_2$, $x_1 x_2 = \lambda x_2^2$.

所以 $\left(\frac{x_1 + x_2}{1 + \lambda}\right)^2 = x_2^2 = \frac{x_1 x_2}{\lambda}$. 所以 $\frac{\left(\frac{-16k}{3+4k^2}\right)^2}{1 + \lambda^2} = \frac{\frac{4}{3+4k^2}}{\lambda}$.

整理得 $\frac{64}{\frac{3}{k^2} + 4} = \frac{(1 + \lambda)^2}{\lambda}$.

因为 $k^2 > \frac{1}{4}$, 所以 $4 < \frac{64}{\frac{3}{k^2} + 4} < 16$. 即 $4 < \frac{(1 + \lambda)^2}{\lambda} < 16$. 所以

$$4 < \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2 < 16.$$

解得 $7 - 4\sqrt{3} < \lambda < 7 + 4\sqrt{3}$.

又 $0 < \lambda < 1$, 所以 $7 - 4\sqrt{3} < \lambda < 1$.

② 又当直线 l_1 斜率不存在时, 直线 l_1 的方程为 $x = 0$,

此时 $G(0, \sqrt{3})$, $H(0, -\sqrt{3})$, $\overrightarrow{MG} = (0, \sqrt{3} - 2)$, $\overrightarrow{MH} = (0, -\sqrt{3} - 2)$,

$\overrightarrow{MG} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \overrightarrow{MH}$, 所以 $\lambda = 7 - 4\sqrt{3}$.

所以 $7 - 4\sqrt{3} \leq \lambda < 1$, 即所求 λ 的取值范围是 $[7 - 4\sqrt{3}, 1)$.

方法二: 设 $G(x_1, y_1)$ 、 $H(x_2, y_2)$, 显然 M 位于直线 GH 上, 且有 $\overrightarrow{GM} = -\lambda \overrightarrow{MH}$.

$x_M - x_1 = -\lambda(x_2 - x_M)$, $y_M - y_1 = -\lambda(y_2 - y_M)$. 解得 $M\left(\frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}\right)$.

设直线 GH 上一点 Q 满足 $\overrightarrow{GQ} = \lambda \overrightarrow{QH}$, 类似地可以解得 $Q\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\right)$.

将 A 、 B 坐标代入椭圆方程得到: $\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1$ ①, $\frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{3} = 1$ ②.

① - (② $\times \lambda^2$) 并进行因式分解得到:

$$\frac{(x_1 + \lambda x_2)(x_1 - \lambda x_2)}{4} + \frac{(y_1 + \lambda y_2)(y_1 - \lambda y_2)}{3} = 1 - \lambda^2,$$

$$\text{即: } \frac{(1 + \lambda)x_M \cdot (1 - \lambda)x_Q}{4} + \frac{(1 + \lambda)y_M \cdot (1 - \lambda)y_Q}{3} = 1 - \lambda^2.$$

$$\frac{x_M x_Q}{4} + \frac{y_M y_Q}{3} = 1. \text{ 代入 } x_M = 0, y_M = 2, \text{ 解得 } y_Q = \frac{3}{2}$$

故有: $\begin{cases} \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} = 2 \\ \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{3}{2} \end{cases}$. 解得: $y_1 = \frac{7 - \lambda}{4}$. 根据椭圆的有界性, 有:

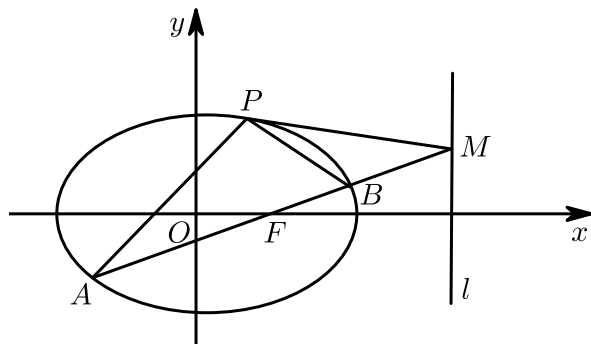
$$-\sqrt{3} \leq \frac{7 - \lambda}{4} \leq \sqrt{3}, \text{ 再结合 } 0 < \lambda < 1, \text{ 解得 } \lambda \in [7 - 4\sqrt{3}, 1).$$

【标注】【知识点】共线比例问题

4. 几何关系综合问题

17. 2013年高考真题江西卷理科第21题 ★★★

如图, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 离心率 $e = \frac{1}{2}$, 直线 l 的方程为 $x = 4$.



(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) AB 是经过右焦点 F 的任一弦 (不经过点 P), 设直线 AB 与直线 l 相交于点 M , 记

PA, PB, PM 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 问: 是否存在常数 λ , 使得 $k_1 + k_2 = \lambda k_3$. 若存在求 λ 的值; 若不存在, 说明理由.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 存在常数 $\lambda = 2$ 符合题意, 证明见解析.

【解析】 (1) 由 $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 在椭圆上得, $\frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1$ ①

依题设知 $a = 2c$, 则 $b^2 = 3c^2$ ②,

②代入①解得 $c^2 = 1, a^2 = 4, b^2 = 3$.

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 方法一: 由题意可设 AB 的斜率为 k ,

则直线 AB 的方程为 $y = k(x - 1)$ ③

代入椭圆方程 $3x^2 + 4y^2 = 12$ 并整理, 得 $(4k^2 + 3)x^2 - 8k^2x + 4(k^2 - 3) = 0$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

则有 $x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{4k^2 + 3}, x_1x_2 = \frac{4(k^2 - 3)}{4k^2 + 3}$ ④

在方程③中令 $x = 4$ 得, M 的坐标为 $(4, 3k)$.

从而 $k_1 = \frac{y_1 - \frac{3}{2}}{x_1 - 1}, k_2 = \frac{y_2 - \frac{3}{2}}{x_2 - 1}, k_3 = \frac{3k - \frac{3}{2}}{4 - 1} = k - \frac{1}{2}$.

注意到 A, F, B 共线, 则有 $k = k_{AF} = k_{BF}$, 即有 $\frac{y_1}{x_1 - 1} = \frac{y_2}{x_2 - 1} = k$.

所以 $k_1 + k_2 = \frac{y_1 - \frac{3}{2}}{x_1 - 1} + \frac{y_2 - \frac{3}{2}}{x_2 - 1} = \frac{y_1}{x_1 - 1} + \frac{y_2}{x_2 - 1} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} \right)$
 $= 2k - \frac{3}{2} \cdot \frac{x_1 + x_2 - 2}{x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1}$ ⑤

④代入⑤得 $k_1 + k_2 = 2k - \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{8k^2}{4k^2 + 3} - 2}{\frac{4(k^2 - 3)}{4k^2 + 3} - \frac{8k^2}{4k^2 + 3} + 1} = 2k - 1$,

又 $k_3 = k - \frac{1}{2}$, 所以 $k_1 + k_2 = 2k_3$. 故存在常数 $\lambda = 2$ 符合题意.

方法二: 设 $B(x_0, y_0) (x_0 \neq 1)$, 则直线 FB 的方程为: $y = \frac{y_0}{x_0 - 1}(x - 1)$,

令 $x = 4$, 求得 $M\left(4, \frac{3y_0}{x_0 - 1}\right)$,

从而直线 PM 的斜率为 $k_3 = \frac{2y_0 - x_0 + 1}{2(x_0 - 1)}$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = \frac{y_0}{x_0 - 1}(x - 1) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 得 } A\left(\frac{5x_0 - 8}{2x_0 - 5}, \frac{3y_0}{2x_0 - 5}\right),$$

则直线 PA 的斜率为 $k_1 = \frac{2y_0 - 2x_0 + 5}{2(x_0 - 1)}$; 直线 PB 的斜率为: $k_2 = \frac{2y_0 - 3}{2(x_0 - 1)}$,

$$\text{所以 } k_1 + k_2 = \frac{2y_0 - 2x_0 + 5}{2(x_0 - 1)} + \frac{2y_0 - 3}{2(x_0 - 1)} = \frac{2y_0 - x_0 + 1}{x_0 - 1} = 2k_3,$$

故存在常数 $\lambda = 2$ 符合题意.

【标注】【知识点】定值问题 (证明、探究)

18. 2021年天津高三二模 (十二区县重点学校) 第18题15分 ★★★

已知点 $F(2, 0)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦点, 且点 $P\left(2, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ 在椭圆上.

(1) 求椭圆的方程.

(2) 已知直线 l 与椭圆交于 M, N 两点, 且坐标原点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{30}}{6}$, $\angle MON$ 的大小是否为定值? 若是, 求出该定值; 若不是, 请说明理由.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$.

(2) 是, $\angle MON = \frac{\pi}{2}$.

【解析】 (1) 因为点 $F(2, 0)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦点,

所以 $c = 2$,

又因为 $P\left(2, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ 在椭圆上,

所以 $a^2 = 5, b = 1$,

所以椭圆的方程为: $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$.

(2) 当直线 l 的斜率不存在时, 由原点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{30}}{6}$,

可得直线 l 的方程为: $x = \pm \frac{\sqrt{30}}{6}$,

代入椭圆可得 $M\left(\frac{\sqrt{30}}{6}, \frac{\sqrt{30}}{6}\right), N\left(\frac{\sqrt{30}}{6}, -\frac{\sqrt{30}}{6}\right)$,

或 $M\left(\frac{\sqrt{30}}{6}, \frac{\sqrt{30}}{6}\right), N\left(\frac{\sqrt{30}}{6}, -\frac{\sqrt{30}}{6}\right)$,

可得 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 0$,

所以 $\angle MON$ 为 $\frac{\pi}{2}$,

当直线 l 的斜率存在时, 设直线的方程为: $y = kx + m$,

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 由原点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{30}}{6}$,

可得 $\frac{\sqrt{30}}{6} = \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$, 可得 $6m^2 = 5(1+k^2)$,

$$\text{直线与椭圆联立} \begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{5} + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{整理可得 } (1 + 5k^2)x^2 + 10kmx + 5m^2 - 5 = 0,$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = \frac{-10km}{1 + 5k^2}, \quad x_1x_2 = \frac{5m^2 - 5}{1 + 5k^2},$$

$$\text{因为 } y_1y_2 = k^2x_1x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2,$$

$$\text{所以 } y_1y_2 = \frac{m^2 - 5k^2}{1 + 5k^2},$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} &= x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{5m^2 - 5}{1 + 5k^2} + \frac{m^2 - 5k^2}{1 + 5k^2} \\ &= \frac{6m^2 - 5k^2 - 5}{1 + 5k^2} = 0, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \angle MON = \frac{\pi}{2},$$

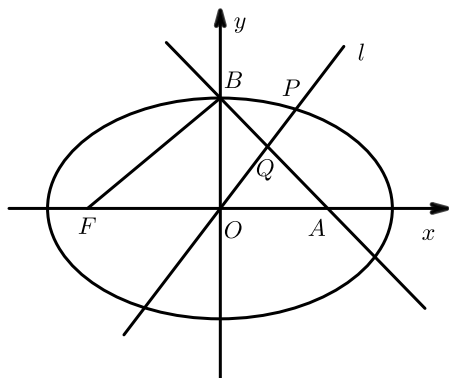
$$\text{综上所述 } \angle MON = \frac{\pi}{2} \text{ 恒成立.}$$

【标注】【知识点】角度问题；定值问题（证明、探究）

19. 2020~2021学年1月陕西西安雁塔区西安高新第一中学高三上学期月考文科（七模）第20题12分

★★★

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F ，上顶点为 B ，已知椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ，点 A 的坐标为 $(b, 0)$ ，且 $|FB| \cdot |AB| = 6\sqrt{2}$ 。



(1) 求椭圆的方程。

(2) 设直线 $l: y = kx (k > 0)$ 与椭圆在第一象限的交点为 P ，且 l 与直线 AB 交于点 Q ，若

$$\frac{|AQ|}{|PQ|} = \frac{5\sqrt{2}}{4} \sin \angle AOQ \quad (O \text{ 为原点}), \text{ 求 } k \text{ 的值.}$$

【答案】(1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{11}{28}$.

【解析】(1) 设椭圆焦距为 $2c$ ，由题意可得 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{5}{9}$ ，

$$\text{又由于 } a^2 = b^2 + c^2, \text{ 可得 } 2a = 3b,$$

$$\text{由已知可得 } |FB| = a, \quad |AB| = \sqrt{2}b,$$

$$\text{由 } |FB| \cdot |AB| = 6\sqrt{2} \text{ 可得 } ab = 6,$$

得 $a = 3$, $b = 2$, 所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 设 P, Q 两点的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 由已知可得 $y_1 > y_2 > 0$,

故 $|PQ| \sin \angle AOQ = y_1 - y_2$, 又因为 $|AQ| = \frac{y_2}{\sin \angle OAB}$,

而 $\angle OAB = \frac{\pi}{4}$, 故 $|AQ| = \sqrt{2}y_2$,

由 $\frac{|AQ|}{|PQ|} = \frac{5\sqrt{2}}{4} \sin \angle AOQ$ 可得 $5y_1 = 9y_2$,

由方程组 $\begin{cases} y = kx \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$, 消去 x 可得 $y_1 = \frac{6k}{\sqrt{9k^2 + 4}}$,

易知直线 AB 的方程为 $x + y - 2 = 0$,

由方程组 $\begin{cases} y = kx \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$, 消去 x 可得 $y_2 = \frac{2k}{k+1}$,

由 $5y_1 = 9y_2$ 可得 $5(k+1) = 3\sqrt{9k^2 + 4}$,

两边平方, 整理可得 $56k^2 - 50k + 11 = 0$, 解得 $k = \frac{1}{2}$ 或 $k = \frac{11}{28}$,

故 k 的值为 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{11}{28}$.

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系

20. 2016年天津南开区高三一模理科第19题14分 ★★★★★

椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的两焦点为 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, 椭圆的上顶点 M 满足 $\overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{F_2M} = 0$.

(1) 求椭圆 C 的离心率 e .

(2) 若以点 $N(0, 2)$ 为圆心, 且与椭圆 C 有公共点的圆的最大半径为 $\sqrt{26}$.

① 求此时椭圆 C 的方程.

② 椭圆 C 上是否存在两点 A, B 关于直线 $l: y = kx - 1$ ($k \neq 0$) 对称, 若存在, 求出 k 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) ① $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$.

② $k \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

【解析】 (1) $\because \overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{F_2M} = (c, b) \cdot (-c, b) = -c^2 + b^2 = 0$,

$\therefore b = c$, 从而 $a = \sqrt{2}c$,

$\therefore$ 椭圆 C 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) ① 由 (1) 可得椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

设 $P(x, y)$ 是椭圆上任一点,

依题意, $|PN|$ 的最大值为 $\sqrt{26}$,

则 $|PN|^2 = x^2 + (y-2)^2 = (2b^2 - 2y^2) + (y-2)^2 = -(y+2)^2 + 2b^2 + 8$ ($-b \leq y \leq b$) .

() 若 $b \geq 2$, 则 $y = -2$ 时 , $|PN|_{\max} = \sqrt{2b^2 + 8} = \sqrt{26}$,

$\therefore b = 3$, 此时椭圆方程为 $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$.

② 若 $0 < b < 2$, 则 $y = -b$ 时 , $|PN|_{\max} = b + 2 = \sqrt{26}$,

$\therefore b = \sqrt{26} - 2 > 2$, 矛盾 .

综上得椭圆方程为 $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$.

②解法一：设直线 AB 的方程为 $x = -ky + m$,

$$\text{联立方程组} \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 18 \\ x = -ky + m \end{cases}$$

化简得： $(k^2 + 2)y^2 - 2kmy + m^2 - 18 = 0$,

由 $\Delta = 4k^2m^2 - 4(k^2 + 2)(m^2 - 18) > 0$, 解得： $9k^2 - m^2 + 18 > 0$.

由韦达定理得： $y_A + y_B = \frac{2km}{k^2 + 2}$,

可求得 AB 的中点坐标为 $\left(\frac{2m}{k^2 + 2}, \frac{km}{k^2 + 2} \right)$,

代入直线 $y = kx - 1$ 得 $\frac{km}{k^2 + 2} = \frac{2km}{k^2 + 2} - 1$, 求得 $m = \frac{k^2 + 2}{k}$,

代入 $9k^2 - m^2 + 18 > 0$ 得 $9k^2 - \left(\frac{k^2 + 2}{k} \right)^2 + 18 > 0$,

解得 $k \in \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty \right)$.

②解法二：设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, AB 中点 $Q(x_0, y_0)$, 则 $k_{AB} = -\frac{1}{k}$,

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{18} + \frac{y_1^2}{9} = 1 \\ \frac{x_2^2}{18} + \frac{y_2^2}{9} = 1 \end{cases} , \text{两式相减, 得: } \frac{x_1^2 - x_2^2}{18} = -\frac{y_1^2 - y_2^2}{9} ,$$

即 $2y_0 = kx_0$, ①

又 AB 中点在直线 $y = kx - 1$ 上 ,

$\therefore y_0 = kx_0 - 1$, ②

联立①②, 得 AB 中点 $Q\left(\frac{2}{k}, 1\right)$,

Q 在椭圆内, 则 $\frac{x_0^2}{18} + \frac{y_0^2}{9} < 1$,

即 $\frac{\frac{4}{k^2}}{18} + \frac{1}{9} < 1$, $\therefore k^2 > \frac{1}{4}$,

$\therefore k < -\frac{1}{2}$ 或 $k > \frac{1}{2}$,

$\therefore k \in \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty \right)$.

【标注】【知识点】 对称问题；最值问题；椭圆中其他最值问题