

01直线与圆锥曲线的位置关系1习题

1. 弦长面积问题

1. 2020年天津河西高三二模第19题15分 ★★★

如图, 已知中心在原点, 焦点在 x 轴上的椭圆的一个焦点为 $(\sqrt{3}, 0)$, $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 是椭圆上的一点.

(1) 求椭圆的标准方程.

(2) 设椭圆的上、下顶点分别为 A 、 B , $P(x_0, y_0)$ ($x_0 \neq 0$) 是椭圆上异于 A 、 B 的任意一点, $PQ \perp y$ 轴, Q 为垂足, M 为线段 PQ 的中点, 直线 AM 交直线 $l: y = -1$ 于点 C , N 为线段 BC 的中点.

① 求证: $OM \perp MN$.

② 若 $\triangle MON$ 的面积为 $\frac{3}{2}$, 求 y_0 的值.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) ① 证明见解析.

② $\frac{4}{5}$.

【解析】 (1) 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$),

由题意, 得 $c = \sqrt{3}$ 因为 $a^2 - c^2 = b^2$, 所以 $a^2 - 3 = b^2$.

又 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 是椭圆上的一个点, 所以 $\frac{1}{a^2} + \frac{\frac{3}{4}}{a^2 - 3} = 1$,

解得 $a^2 = 4$ 或 $a^2 = \frac{3}{4}$ (舍去),

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) ① 因为 $P(x_0, y_0)$, ($x \neq 0$), 则 $Q(0, y_0)$, 且 $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$.

因为 M 为线段 PQ 中点, 所以 $M(\frac{x_0}{2}, y_0)$,

又 $A(0, 1)$, 所以直线 AM 的方程为 $y = \frac{2(y_0 - 1)}{x_0}x + 1$,

因为 $x_0 \neq 0$,

$\therefore y_0 \neq 1$

令 $y = -1$, $C(\frac{x_0}{1 - y_0}, -1)$

又 $B(0, -1)$, N 为段 BC 的中点, 有 $N(\frac{x_0}{2(1 - y_0)}, -1)$,

$\overrightarrow{NM} = (\frac{x_0}{2} - \frac{x_0}{2(1 - y_0)}, y_0 + 1)$,

因此,

$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{NM} = \frac{x_0}{2} (\frac{x_0}{2} - \frac{x_0}{2(1 - y_0)}) + y_0 \cdot (y_0 + 1) = \frac{x_0^2}{4} - \frac{x_0^2}{4(1 - y_0)} + y_0^2 + y_0$

$$= \left(\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 \right) - \frac{x_0^2}{4(1-y_0)} + y_0 = 1 - (1+y_0) + y_0 = 0,$$

所以 $OM \perp MN$.

② 由 (1) 知, $OM \perp MN$.

$$|OM| = \sqrt{\frac{x_0^2}{4} + y_0^2} = 1,$$

$$|ON| = \sqrt{\frac{x_0^2}{4(1-y_0)^2} + 1} = \sqrt{\frac{1-y_0^2}{(1-y_0)^2} + 1} = \sqrt{\frac{2}{1-y_0}},$$

所以在 $Rt\triangle MON$ 中, $|MN| = \sqrt{|ON|^2 - |OM|^2}$,

$$\text{因此 } S_{\triangle AOM} = \frac{1}{2}|OM| \cdot |MN| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+y_0}{1-y_0}},$$

$$\text{从而有 } \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+y_0}{1-y_0}} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{解得 } y_0 = \frac{4}{5}.$$

【标注】【知识点】面积问题；坐标表示平面向量的垂直

2. 弦长面积范围问题

2. 2019~2020学年福建漳州龙海市龙海市程溪中学高二上学期期中第22题12分 ★★★★★

在平面 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $P(2, 1)$, 且离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 直线 l 方程为 $y = \frac{1}{2}x + m$, 直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 2.

【解析】 (1) 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $P(2, 1)$, 且离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\text{可得: } \begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^2 - c^2} = 1 \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \text{ 解得 } a = 2\sqrt{2}, c = \sqrt{6}, \text{ 则 } b = \sqrt{2},$$

$$\text{椭圆方程为: } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

(2) 设直线方程为 $y = \frac{1}{2}x + m$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立方程组 } \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + m \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases} \text{ 整理得: } x^2 + 2mx + 2m^2 - 4 = 0, x_1 + x_2 = -2m,$$

$$x_1 x_2 = 2m^2 - 4,$$

$$\text{利用弦长公式得: } |AB| = \sqrt{5(4 - m^2)},$$

由点线距离公式得到 P 到 l 的距离 $d = \frac{2|m|}{\sqrt{5}}$.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |AB| \cdot d \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5(4-m)^2} \cdot \frac{2|m|}{\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{m^2(4-m^2)} \leq \frac{m^2 + (4-m^2)}{2} = 2, \end{aligned}$$

当且仅当 $m^2 = 2$, 即 $m = \pm\sqrt{2}$ 时取到最大值, 最大值为: 2.

【标注】【知识点】面积问题; 最值问题; 直线和椭圆的位置关系; 椭圆的标准方程

3. 中点弦问题

3. 2020年天津南开区高三二模第18题15分 ★★★★★

已知 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 椭圆 C 过点 $M\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 且

$MF_2 \perp F_1F_2$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 经过点 $P(2, 0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点, 若存在点 $Q(m, 0)$, 使得 $|QA| = |QB|$.

① 求实数 m 的取值范围.

② 若线段 F_1A 的垂直平分线过点 Q , 求实数 m 的值.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) ① $m \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$.

② $\frac{1}{5}$.

【解析】 (1) $\because M\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), MF_2 \perp F_1F_2$,

$$\therefore \begin{cases} c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1 \\ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2b^2} = 1 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a^2 = 2 \\ b^2 = 1 \end{cases},$$

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) ① 设直线的方程为 $y = k(x - 2)$,

代入椭圆 C 的方程, 消去 y , 得 $(1 + 2k^2)x^2 - 8k^2x + 8k^2 - 2 = 0$.

$\because$ 直线 l 交椭圆 C 于两点,

$\therefore \Delta = (-8k^2)^2 - 4(1 + 2k^2)(8k^2 - 2) > 0$, 解得 $2k^2 < 1$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则有 $x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{1 + 2k^2}, x_1x_2 = \frac{8k^2 - 2}{1 + 2k^2}$.

设 AB 中点为 $M(x_0, y_0)$,

则有 $x_0 = \frac{4k^2}{1 + 2k^2}, y_0 = k(x_0 - 2) = -\frac{2k}{1 + 2k^2}$.

当 $k \neq 0$ 时, $\because |QA| = |QB|, \therefore QM \perp l$,

$$\therefore k_{QM} \cdot k = \frac{-\frac{2k}{1+2k^2} - 0}{\frac{4k^2}{1+2k^2} - m} \cdot k = -1, \text{ 解得 } m = \frac{2k^2}{1+2k^2}.$$

$$\therefore m = \frac{2k^2}{1+2k^2} = 1 - \frac{1}{1+2k^2} \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

当 $k=0$ 时, 可得 $m=0$,

综上, $m \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$.

② 依题意有 $|QF_1| = |QA| = |QB|$, 且 $F_1(-1, 0)$,

$$\therefore \text{由 } \begin{cases} (x-m)^2 + y^2 = (m+1)^2 \\ x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases}, \text{ 消去 } y, \text{ 得 } x^2 - 4mx^2 - 4m = 0,$$

$\therefore x_1, x_2$ 也是此方程的两个根.

$$\therefore x_1 + x_2 = 4m = \frac{8k^2}{1+2k^2}, \quad x_1 x_2 = -4m = \frac{8k^2 - 2}{1+2k^2}.$$

$$\therefore \frac{8k^2}{1+2k^2} = \frac{2-8k^2}{1+2k^2}, \text{ 解得 } k^2 = \frac{1}{8},$$

$$\therefore m = \frac{2k^2}{1+2k^2} = \frac{1}{5}.$$

【标注】【知识点】中点弦问题；直线和椭圆的位置关系

4. 2019年天津河北区高三一模文科第19题14分 ★★★★★

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $M(2, 1)$, 且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 若过原点的直线 l_1 与椭圆 C 交于 P, Q 两点, 且在直线 $l_2: x - y + 2\sqrt{6} = 0$ 上存在点 M , 使得 $\triangle MPQ$ 为等边三角形, 求直线 l_1 的方程.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) $y = 0$ 或 $y = \frac{2}{3}x$.

【解析】 (1) $\therefore$ 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $M(2, 1)$, 且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\therefore \begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \\ e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \text{ 又 } a^2 = b^2 + c^2,$$

解得 $a = 2\sqrt{2}, b = \sqrt{2}$,

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 显然, 直线 l 的斜率 k 存在, 设 $P(x_0, y_0)$, 则 $Q(-x_0, -y_0)$,

当 $k=0$, 直线 PQ 的垂直平分线为 y 轴, y 轴与 l 的交点为 $M(0, 2\sqrt{6})$,

由 $|PO| = 2\sqrt{2}, |MO| = 2\sqrt{6}$,

$\therefore \angle MPO = 60^\circ$, 则 $\triangle MPQ$ 为等边三角形,

此时直线 l_1 的方程为 $y = 0$,

当 $k \neq 0$ 时, 设直线 l_1 的方程为 $y = kx$,

$$\text{则 } \begin{cases} y = kx \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}, \text{ 整理得: } (1 + 4k^2)x^2 = 8,$$

$$\text{解得: } |x_0| = \sqrt{\frac{8}{1 + 4k^2}},$$

$$\text{则 } |PO| = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{\frac{8}{1 + 4k^2}},$$

$$\text{则 } PQ \text{ 的垂直平分线为 } y = -\frac{1}{k}x,$$

$$\text{则 } \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ y = -\frac{1}{k}x \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} x = -\frac{2\sqrt{6}k}{k+1} \\ y = \frac{2\sqrt{6}}{k+1} \end{cases},$$

$$\text{则 } M\left(-\frac{2\sqrt{6}k}{k+1}, \frac{2\sqrt{6}}{k+1}\right),$$

$$\therefore |MO| = \sqrt{\frac{24(k^2 + 1)}{(k+1)^2}},$$

$$\because \triangle MPQ \text{ 为等边三角形, 则 } |MO| = \sqrt{3}|PO|,$$

$$\therefore \sqrt{\frac{24(k^2 + 1)}{(k+1)^2}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{\frac{8}{1 + 4k^2}},$$

$$\text{解得: } k = 0 \text{ (舍去)}, k = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \text{直线 } l_1 \text{ 的方程为 } y = \frac{2}{3}x,$$

$$\text{综上可知: 直线 } l_1 \text{ 的方程为 } y = 0 \text{ 或 } y = \frac{2}{3}x.$$

【标注】【知识点】弦长求解问题

5. 2020~2021学年12月广东广州荔湾区广州市真光中学高三上学期月考第21题 ★★★

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点为 $A(0, -3)$, 右焦点为 F , 且 $|OA| = |OF|$, 其中 O 为原点.

(1) 求椭圆的方程.

(2) 已知点 C 满足 $3\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OF}$, 点 B 在椭圆上 (B 异于椭圆的顶点), 直线 AB 与以 C 为圆心的圆相切于点 P , 且 P 为线段 AB 的中点. 求直线 AB 的方程.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$

(2) $y = \frac{1}{2}x - 3$ 或 $y = x - 3$

【解析】 (1) 解: 由已知可得 $b = 3$, 记半焦距为 c , 由 $|OF| = |OA|$, 可得 $c = b = 3$,

$$\text{由 } a^2 = b^2 + c^2, \text{ 可得 } a^2 = 18,$$

$$\therefore \text{椭圆的方程为 } \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

(2) 解: $\because$ 直线 AB 与以 C 为圆心的圆相切于点 P ,

$$\therefore AB \perp CP,$$

根据题意可得直线 AB 和直线 CP 的斜率均存在, 设直线 AB 的方程为 $y = kx - 3$,

由方程组 $\begin{cases} y = kx - 3 \\ \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$, 消去 y 可得 $(2k^2 + 1)x^2 - 12kx = 0$, 解得 $x = 0$, 或 $x = \frac{12k}{2k^2 + 1}$,

依题意可得点 B 的坐标为 $\left(\frac{12k}{2k^2 + 1}, \frac{6k^2 - 3}{2k^2 + 1}\right)$,

$\because P$ 为线段 AB 的中点, 点 A 的坐标为 $(0, -3)$,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $\left(\frac{6k}{2k^2 + 1}, \frac{-3}{2k^2 + 1}\right)$,

由 $3\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OF}$, 可得点 C 的坐标为 $(1, 0)$,

故直线 CP 的斜率为 $\frac{\frac{-3}{2k^2 + 1}}{\frac{6k}{2k^2 + 1} - 1} = \frac{3}{2k^2 - 6k + 1}$,

$\because AB \perp CP$,

$\therefore k \cdot \frac{3}{2k^2 - 6k + 1} = -1$,

整理可得 $2k^2 - 3k + 1 = 0$,

解得 $k = \frac{1}{2}$ 或 $k = 1$,

$\therefore$ 直线 AB 的方程为 $y = \frac{1}{2}x - 3$ 或 $y = x - 3$.

【标注】【知识点】椭圆的定义；直线和椭圆的位置关系；切线综合问题