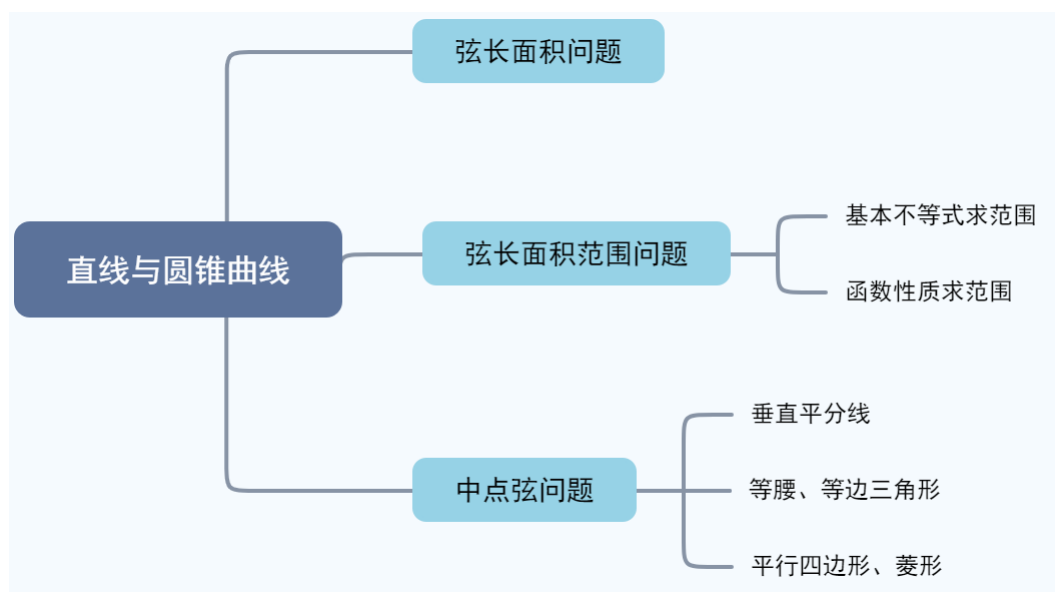


01直线与圆锥曲线的位置关系1



1. 弦长面积问题

【弦长公式】

设圆锥曲线 $C: f(x, y) = 0$ 与直线 $l: y = kx + b$ 相交于 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两点,

$$\text{则弦长 } |AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta_x}}{|a|},$$

$$\text{或 } |AB| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} |y_1 - y_2| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \cdot \sqrt{(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2} = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \cdot \frac{\sqrt{\Delta_y}}{|a|}.$$

💡 韦达定理与“设而不求”

【解题思路】 在解决直线与圆锥曲线的相关问题中, 我们常常使用“设而不求”法解决问题, 而韦达定理就是使用设而不求的工具之一, 也是最重要的工具, 弦长公式就是韦达定理的应用之一. 即不解出点的坐标, 直接去解出我们想要的结论.

1. 2020~2021学年天津滨海新区塘沽第一中学高二上学期中第15题 ★★

已知椭圆的中心在原点, 焦点在 x 轴上, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且过点 $P\left(-\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$.

(1) 求椭圆的标准方程.

(2) 已知斜率为 1 的直线 l 过椭圆的右焦点 F 交椭圆于 A 、 B 两点, 求弦 AB 的长.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) $\frac{8}{5}$.

【解析】 (1)

设椭圆的标准方程为： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，

$$\text{由题意得} \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{a^2} + \frac{1}{4b^2} = 1 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = \sqrt{3} \end{cases},$$

$\therefore$ 椭圆的标准方程为： $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 。

(2) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

由(1)可知, $F(\sqrt{3}, 0)$,

$\therefore$ 直线 l 的方程为： $y = x - \sqrt{3}$,

代入椭圆方程消去 y 得,

$$5x^2 - 8\sqrt{3}x + 8 = 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{8\sqrt{3}}{5},$$

$$\therefore |AB| = 2a - e(x_1 + x_2)$$

$$= 4 - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{8\sqrt{3}}{5}$$

$$= \frac{8}{5}.$$

故弦 AB 的长为 $\frac{8}{5}$ 。

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系；椭圆的标准方程；弦长求解问题

2. 2020年天津红桥区高三一模第18题15分 ★★★

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且过点 $(1, \frac{\sqrt{6}}{2})$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 设 Q 是椭圆 C 上且不在 x 轴上的一个动点, O 为坐标原点, 过右焦点 F 作 OQ 的平行线交椭圆于 M 、 N 两个不同的点, 求 $\frac{|MN|}{|OQ|^2}$ 的值。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 。

(2) 1。

【解析】 (1) 由题意可得 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 即 $c^2 = \frac{1}{2}a^2$, $b^2 = \frac{1}{2}a^2$,

将点 $(1, \frac{\sqrt{6}}{2})$ 代入方程组 $\frac{1}{a^2} + \frac{3}{2b^2} = 1$, 即 $\frac{1}{a^2} + \frac{3}{a^2} = 1$, 解得 $a^2 = 4$,

所以椭圆 C 的方程为： $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 。

(2) 由(1)知, $F(\sqrt{2}, 0)$,

设直线 $OQ: x = my$, 则直线 $MN: x = my + \sqrt{2}$,

$$\text{联立} \begin{cases} x = my \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}, \text{整理得 } x_Q^2 = \frac{4m^2}{m^2+2}, y_Q^2 = \frac{4}{m^2+2},$$

$$\text{所以 } |OQ|^2 = x_Q^2 + y_Q^2 = \frac{4m^2}{m^2+2} + \frac{4}{m^2+2} = \frac{4m^2+4}{m^2+2},$$

$$\text{联立} \begin{cases} x = my + \sqrt{2} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}, \text{整理得 } (m^2+2)y^2 + 2\sqrt{2}my - 2 = 0,$$

$$\text{设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), \text{ 则 } y_1 + y_2 = -\frac{2\sqrt{2}m}{m^2+2}, y_1y_2 = -\frac{2}{m^2+2},$$

所以

$$|MN| = \sqrt{1+m^2} \sqrt{(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2} = \sqrt{1+m^2} \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}m}{m^2+2}\right)^2 + \frac{8}{m^2+2}}$$

$$= \frac{4m^2+4}{m^2+2}$$

$$\text{所以 } \frac{|MN|}{|OQ|^2} = \frac{\frac{4m^2+4}{m^2+2}}{\frac{4m^2+4}{m^2+2}} = 1.$$

【标注】【知识点】弦长求解问题

3. 2020~2021学年12月北京东城区北京市第二中学高三上学期月考第20题15分 ★★★★★

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右顶点为 A , 上顶点为 B , 已知椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$, $|AB| = \sqrt{13}$.

(1) 求椭圆的方程.

(2) 设直线 $l: y = kx (k < 0)$ 与椭圆交于 P, Q 两点, l 与直线 AB 交于点 M , 且点 P, M 均在第四象限, 若 $\triangle BPM$ 的面积是 $\triangle BPQ$ 面积的 2 倍, 求 k 的值.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$

(2) $-\frac{1}{2}.$

【解析】 (1) $\frac{c^2}{a^2} = \frac{5}{9}$, 且 $a^2 = b^2 + c^2$, 可得 $2a = 3b$,

而且 $|AB| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$, 从而 $a = 3, b = 2$,

即椭圆方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$

(2) 设点 P 的坐标为 (x_1, y_1) , 点 M 的坐标为 (x_2, y_2) ,

由题意, $x_2 > x_1 > 0$, 点 Q 的坐标为 $(-x_1, -y_1)$,

由 $\triangle BPM$ 的面积是 $\triangle BPQ$ 面积的 2 倍可得 $|PM| = 2|PQ|$,

从而 $x_2 - x_1 = 2[x_1 - (-x_1)]$, 即 $x_2 = 5x_1$.

直线 AB 的方程为 $2x + 3y = 6$,

由方程组 $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ y = kx \end{cases}$ 消去 y , 可得 $x_2 = \frac{6}{3k+2}$,

由方程组 $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = kx \end{cases}$ 消去 y 可得 $x_1 = \frac{6}{\sqrt{9k^2+4}}$.

而且 $x_2 = 5x_1$, 带入两边平方, 整理可得 $18k^2 + 25k + 8 = 0$,

解得 $k = -\frac{8}{9}$ 或 $k = -\frac{1}{2}$.

当 $k = -\frac{8}{9}$ 时, $x_2 = -9 < 0$ 不合题意,

当 $k = -\frac{1}{2}$ 时, $x_2 = 12, x_1 = \frac{12}{5}$ 满足, 所以 $k = -\frac{1}{2}$.

【标注】【知识点】面积问题；椭圆的基本量求解

4. 2019~2020学年4月天津南开区天津市南开中学高三下学期月考第18题15分 ★★★★★

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 两焦点与短轴的一个端点的连线构成的三角形面积为 $\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 设与圆 $O: x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$ 相切的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点 (O 为坐标原点), 求

$|OA| \cos \angle OAB + \frac{\sqrt{3}}{2 \tan \angle OBA}$ 的最大值.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.

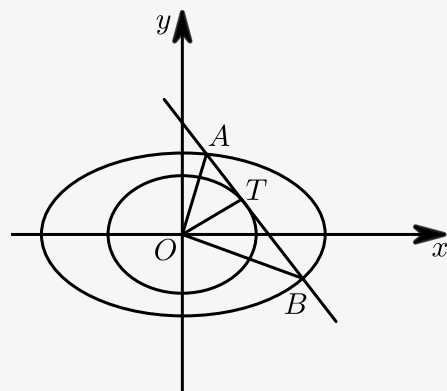
(2) 2.

【解析】 (1) 由题意可得, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $a^2 - b^2 = c^2$, $bc = \sqrt{2}$,

解得 $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, $c = \sqrt{2}$,

即有椭圆的方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.

(2)



由题意可知, k 存在,

设直线为 $y = kx + m (k \neq 0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\begin{aligned} & |OA| \cos \angle OAB + \frac{\sqrt{3}}{2 \tan \angle OBA} \\ &= |AT| + \frac{|OT|}{\tan \angle OBA} = |AT| + |BT| = |AB|. \end{aligned}$$

将直线 $y = kx + m$ 代入椭圆方程可得 $(1 + 3k^2)x^2 + 6kmx + 3m^2 - 3 = 0$,

$$x_1 + x_2 = -\frac{6km}{1 + 3k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{3m^2 - 3}{1 + 3k^2},$$

由直线 l 与圆 $O: x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$ 相切,

$$\text{可得 } \frac{|m|}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{即有 } 4m^2 = 3(1 + k^2),$$

$$|AB| = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{\left(-\frac{6km}{1 + 3k^2}\right)^2 - \frac{12(m^2 - 1)}{1 + 3k^2}}$$

$$= \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{1 + 10k^2 + 9k^4}{1 + 6k^2 + 9k^4}}$$

$$= \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 + \frac{4k^2}{1 + 6k^2 + 9k^4}}$$

$$= \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{9k^2 + \frac{1}{k^2} + 6}} \leq \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{2\sqrt{9} + 6}} = 2,$$

$$\text{当且仅当 } 9k^2 = \frac{1}{k^2},$$

$$\text{即 } k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 时等号成立,}$$

$$\therefore |OA| \cos \angle OAB + \frac{\sqrt{3}}{2 \tan \angle OBA} \text{ 的最大值为 } 2.$$

【标注】【知识点】最值问题；弦长求解问题

5. 2017年天津南开区高三一模文科第19题14分 ★★★★★

已知过点 $(0, -2\sqrt{3})$, 斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l 过椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的焦点, 椭圆 C 的中心关于直线 l 的对称点在直线 $x = \frac{a^2}{2}$ 上.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 过点 $E(-2, 0)$ 的直线 m 交椭圆 C 于点 M 、 N , 且满足 $\tan \angle MON = \frac{4\sqrt{6}}{3\vec{OM} \cdot \vec{ON}}$ (O 为坐标原点), 求直线 m 的方程.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 2)$ 或 $x = -2$.

【解析】 (1) $\because$ 过点 $(0, -2\sqrt{3})$, 斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l 过椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的焦点,

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$, 令 $y = 0$, 得椭圆焦点坐标为 $(2, 0)$,

$\therefore$ 椭圆 C 的中心关于直线 l 的对称点在直线 $x = \frac{a^2}{2}$ 上,

设椭圆 C 的中心关于直线 l 的对称点为 (m, n) ,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{n}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}m - 2\sqrt{3} \\ \frac{n}{m} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ m = \frac{a^2}{2} \end{cases}, \text{解得 } n = -\sqrt{3}, m = 3, a^2 = 2m = 6,$$

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 6 - 4 = 2,$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

$$(2) \text{ ①当直线 } m \text{ 的斜率不存在时, 满足 } \tan \angle MON = \frac{4\sqrt{6}}{3\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}, \text{ 此时直线 } m \text{ 的方程}$$

$$\text{为 } x = -2.$$

②当直线 m 的斜率存在时, 由题设知直线 m 的斜率不为零,

$$\therefore \text{直线 } m \text{ 的方程可设为 } y = k(x + 2).$$

$$\text{代入椭圆方程得: } (3k^2 + 1)x^2 + 12k^2x + 12k^2 - 6 = 0.$$

$$\text{设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), \therefore x_1 + x_2 = -\frac{12k^2}{3k^2 + 1}, x_1 \cdot x_2 = \frac{12k^2 - 6}{3k^2 + 1},$$

$$\text{由 } \tan \angle MON = \frac{4\sqrt{6}}{3\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}, \text{ 得: } |\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}| \sin \angle MON = \frac{4\sqrt{6}}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle OMN} = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{又 } |MN| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| = \frac{2\sqrt{6}(1 + k^2)}{3k^2 + 1}, \text{ 原点 } O \text{ 到 } m \text{ 的距离 } d = \frac{|2k|}{\sqrt{1 + k^2}},$$

$$\text{则 } S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} |MN| d = \frac{\sqrt{6}(1 + k^2)}{3k^2 + 1} \cdot \frac{|2k|}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{解得 } k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore m \text{ 的方程是 } y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 2) \text{ 或 } x = -2.$$

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系；向量问题

2. 弦长面积范围问题

【备注】弦长面积表示方法同上, 但范围问题往往结合函数最值问题, 例如二次函数、对勾函数等, 需复习一下对勾函数的常见用法.

6. 2016~2017学年辽宁沈阳于洪区辽宁省实验中学分校高二上学期期中理科第22题12分 ★★★★★

平面直角坐标系 xOy 中, 过椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 右焦点的直线 $x + y - \sqrt{3} = 0$ 交 M 于 A, B 两点, P 为 AB 的中点, 且 OP 的斜率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求 M 的方程.

(2) C, D 为 M 上两点, 若四边形 $ACBD$ 的对角线 $CD \perp AB$, 求四边形 $ACBD$ 面积的最大值.

【备注】二次函数最值问题

【答案】(1) M 的方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 四边形 $ABCD$ 面积最大值为 $\frac{8\sqrt{6}}{3}$.

【解析】(1) 方法一：设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(x_0, y_0)$,

$$\text{则 } \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -1.$$

$$\text{由此可得 } \frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 1.$$

$$\text{因为 } x_1 + x_2 = 2x_0, y_1 + y_2 = 2y_0, \frac{y_0}{x_0} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{所以 } a^2 = 2b^2.$$

由题意知, M 的右焦点为 $(\sqrt{3}, 0)$,

$$\text{故 } a^2 - b^2 = 3.$$

$$\text{因此 } a^2 = 6, b^2 = 3.$$

$$\text{所以 } M \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

方法二：把右焦点 $(c, 0)$ 代入直线 $x + y - \sqrt{3} = 0$,

$$\text{得 } c + 0 - \sqrt{3} = 0, \text{ 解得 } c = \sqrt{3}.$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 线段 AB 的中点 $P(x_0, y_0)$,

$$\text{则 } \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \text{ 相减得 } \frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0,$$

$$\therefore \frac{x_1 + x_2}{a^2} + \frac{y_1 + y_2}{b^2} \times \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 0,$$

$$\therefore \frac{2x_0}{a^2} + \frac{2y_0}{b^2} \times (-1) = 0,$$

$$\text{又 } k_{OP} = \frac{1}{2} = \frac{y_0}{x_0},$$

$$\therefore \frac{1}{a^2} - \frac{1}{2b^2} = 0, \text{ 即 } a^2 = 2b^2.$$

$$\text{联立得 } \begin{cases} a^2 = 2b^2 \\ a^2 = b^2 + c^2 \\ c = \sqrt{3} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} b^2 = 3 \\ a^2 = 6 \end{cases},$$

$$\therefore M \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

$$(2) \text{ 方法一: } \text{由 } \begin{cases} x + y - \sqrt{3} = 0 \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{3} \end{cases},$$

$$\text{因此 } |AB| = \frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

由题意可设直线 CD 的方程为 $y = x + n \left(-\frac{5\sqrt{3}}{3} < n < \sqrt{3} \right)$ 设 $C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$

$$\text{由 } \begin{cases} y = x + n \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \text{ 得 } 3x^2 + 4nx + 2n^2 - 6 = 0.$$

$$\text{于是 } x_{34} = \frac{-2n \pm \sqrt{2(9 - n^2)}}{3}.$$

因为直线 CD 的斜率为 1.

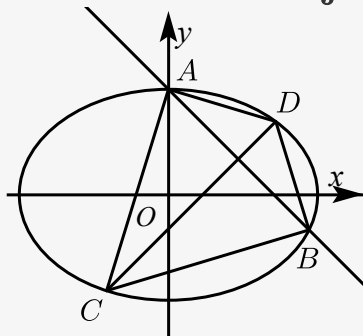
$$\text{所以 } |CD| = \sqrt{2} |x_4 - x_3| = \frac{4}{3} \sqrt{9 - n^2}.$$

由已知，四边形 $ABCD$ 的面积 $S = \frac{1}{2}|CD| \cdot |AB| = \frac{8\sqrt{6}}{9}\sqrt{9-n^2}$ ，

当 $n = 0$ 时， S 取最大值，最大值为 $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ 。

所以四边形 $ABCD$ 面积最大值为 $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ 。

方法二：



$\because CD \perp AB$ ，

$\therefore$ 可设直线 CD 的方程为 $y = x + t$ ，

联立 $\begin{cases} y = x + t \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ ，消去 y 得到 $3x^2 + 4tx + 2t^2 - 6 = 0$ ，

$\therefore$ 直线 CD 与椭圆有两个不同的交点，

$\therefore \Delta = 16t^2 - 12(2t^2 - 6) = 72 - 8t^2 > 0$ ，解 $-3 < t < 3$ (*)。

设 $C(x_3, y_3)$ ， $D(x_4, y_4)$ ，

$\therefore x_3 + x_4 = -\frac{4t}{3}$ ， $x_3x_4 = \frac{2t^2 - 6}{3}$ 。

$\therefore |CD| = \sqrt{(1+1^2)[(x_3+x_4)^2 - 4x_3x_4]} = \sqrt{2\left[\left(-\frac{4t}{3}\right)^2 - 4 \times \frac{2t^2 - 6}{3}\right]}$
 $= \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{18 - 2t^2}}{3}$ 。

联立 $\begin{cases} x + y - \sqrt{3} = 0 \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ ，得到 $3x^2 - 4\sqrt{3}x = 0$ ，解得 $x = 0$ 或 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ，

$\therefore$ 交点为 $A(0, \sqrt{3})$ ， $B\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ，

$\therefore |AB| = \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3} - 0\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ 。

$\therefore S_{\text{四边形}ACBD} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{18 - 2t^2}}{3} = \frac{8\sqrt{3} \cdot \sqrt{18 - 2t^2}}{9}$ ，

$\therefore$ 当且仅当 $t = 0$ 时，四边形 $ACBD$ 面积的最大值为 $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ ，满足 (*)。

$\therefore$ 四边形 $ACBD$ 面积的最大值为 $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ 。

【标注】【知识点】椭圆的标准方程；直线和椭圆的位置关系

7. 2021年天津河西区高三一模第19题15分 ★★★★★

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 ， F_2 ，且满足离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$|F_1F_2| = 4\sqrt{3}$ ，过原点 O 且不与坐标轴垂直的直线 l 交椭圆 C 于 M ， N 两点。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 设点 $A(2,1)$, 求 $\triangle AMN$ 面积的最大值.

【备注】基本不等式求最值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) $4\sqrt{2}$.

【解析】(1) 由题意可知 $c = 2\sqrt{3}$, 根据 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

得 $a = 4$, 故 $b = 2$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 设直线 l 的方程为 $y = kx (k \neq 0)$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases},$$

$$\text{得 } x_1 = \frac{4}{\sqrt{1+4k^2}}, x_2 = -\frac{4}{\sqrt{1+4k^2}}, |MN| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$= \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2|$$

$$= \frac{8\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{1+4k^2}},$$

点 A 到直线 l 的距离

$$d = \frac{|2k-1|}{\sqrt{1+k^2}},$$

$$S_{\triangle AMN}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{|2k-1|}{\sqrt{1+k^2}} \times \frac{8\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{1+4k^2}}$$

$$= \frac{4|2k-1|}{\sqrt{1+4k^2}}$$

$$= 4\sqrt{1 - \frac{4k}{1+4k^2}},$$

当 $k > 0$ 时, $S_{\triangle AMN} < 4$;

$$\text{当 } k < 0 \text{ 时, } S_{\triangle AMN} = 4\sqrt{1 + \frac{4}{\frac{1}{-k} + (-4k)}} \leq 4\sqrt{1 + \frac{4}{2\sqrt{\frac{1}{-k} \cdot (-4k)}}} = 4\sqrt{2},$$

当且仅当 $k = -\frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 所以 $S_{\triangle AMN}$ 的最大值为 $4\sqrt{2}$.

【标注】【知识点】椭圆的标准方程; 最值问题; 面积问题

8. 2019~2020学年10月天津和平区高三上学期月考第19题15分 ★★★

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $(\sqrt{6}, 1)$, 且离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 若直线 l 与椭圆 C 相交于 A 、 B 两点, 且满足 $\angle AOB = 90^\circ$ (O 为坐标原点), 求 $|AB|$ 的取值范围.

【备注】可以换元成二次函数.

【答案】(1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) $\left[\frac{4\sqrt{6}}{3}, 2\sqrt{3}\right]$.

【解析】(1) 由题可知,
$$\begin{cases} \frac{6}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \\ e = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{c}{a} \end{cases},$$

$\therefore a = 2\sqrt{2}, b = c = 2,$

$\therefore$ 椭圆方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) ①当斜率不存在时, $x = m, (-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2})$,

$\therefore A\left(m, \sqrt{\frac{8-m^2}{2}}\right), B\left(m, -\sqrt{\frac{8-m^2}{2}}\right),$

$\therefore \angle AOB = 90^\circ,$

$\therefore \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0,$

即 $m^2 - \frac{8-m^2}{2} = 0,$

$\therefore m^2 = \frac{8}{3},$

$\therefore m = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3},$

$|AB| = 2\sqrt{\frac{8-m^2}{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{3},$

②当斜率存在时, 设直线 l 方程 $y = kx + m (k \neq 0),$

$$\begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + 2y^2 = 8 \end{cases},$$

$\therefore (1+2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 8 = 0,$

$\Delta = (4km)^2 - 4(1+2k^2)(2m^2-8)$

$= 8(8k^2 - m^2 + 4) > 0,$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2),$

$\therefore x_1x_2 = \frac{2m^2-8}{1+2k^2}, x_1+x_2 = \frac{-4km}{1+2k^2},$

$y_1y_2 = \frac{m^2-8k^2}{1+2k^2}, \vec{OA} = (x_1, y_1), \vec{OB} = (x_2, y_2),$

$\therefore \angle AOB = 90^\circ,$

$\therefore \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0,$

即 $x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{3m^2-8-8k^2}{1+2k^2} = 0,$

$\therefore 3m^2 = 8(1+k^2),$

$|AB| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x+x')^2 - 4xx'}$

$= \sqrt{1+k^2} \frac{\sqrt{8k^2+4-m^2}}{1+2k^2}$

$= \frac{4\sqrt{6}}{3} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(1+2k^2)^2} - \frac{1}{1+2k^2} \right]}$

$$\begin{aligned} \text{令 } t &= \frac{1}{1+2k^2} \in (0, 1], \text{ 所以} \\ |AB| &= \frac{4\sqrt{6}}{3} \sqrt{1 - \frac{1}{2}(t^2 - t)}, \\ \text{当 } t &= \frac{1}{2}, \quad g(t) = 1 - \frac{1}{2}(t^2 - t) \text{ 最大为 } 2\sqrt{3}, \\ t \rightarrow 0, \quad g(t) &\rightarrow \frac{4\sqrt{6}}{3}, \\ \text{综上所述 } AB &\text{ 的取值范围 } \left[\frac{4\sqrt{6}}{3}, 2\sqrt{3} \right]. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】椭圆的标准方程；直线和椭圆的位置关系；弦长求解问题

9. 2020年天津高三二模十二重点中学毕业班联考（二）第18题15分 ★★★★★

在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，短轴长为 2，若点 A, B 分别是椭圆 E 的左、右顶点，动点 $M(a, t)$ ， $(t \geq \sqrt{2})$ ，直线 AM 交椭圆 E 于点 P 。

(1) 求椭圆 E 的方程。

(2)

① 求证： $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BP}$ 是定值。

② 设 $\triangle ABP$ 的面积为 S_1 ，四边形 $OBMP$ 的面积为 S_2 ，求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最大值。

【备注】 直接利用单调性。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 。

(2) ① 证明见解析。

② $\frac{S_1}{S_2}$ 的最大值为 1，

【解析】 (1) $\because$ 短轴长为 2，

$$\therefore b = 1,$$

$$\because e = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore a = \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$$

(2) ① 方法一： $\because k_{AM} = \frac{t}{2\sqrt{2}}$ ，

$$\text{设 } l_{AM}: y = \frac{t}{2\sqrt{2}}(x + \sqrt{2}),$$

$$\therefore \begin{cases} y = \frac{t}{2\sqrt{2}}(x + \sqrt{2}) \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases},$$

$$\therefore (t^2 + 4)x^2 + 2\sqrt{2}t^2x + 2t^2 - 8 = 0,$$

$$\therefore (-\sqrt{2})x_P = \frac{2t^2 - 8}{t^2 + 4},$$

$$\therefore x_P = \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{2}t^2}{t^2 + 4},$$

$$\begin{aligned}\therefore y_P &= \frac{t}{2\sqrt{2}}(x_P + \sqrt{2}) = \frac{4t}{t^2 + 4}, \\ \therefore P &\left(\frac{4\sqrt{2} - \sqrt{2}t^2}{t^2 + 4}, \frac{4t}{t^2 + 4} \right), \\ \therefore \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BP} &= (\sqrt{2}, t) \cdot \left(\frac{-2\sqrt{2}t^2}{t^2 + 4}, \frac{4t}{t^2 + 4} \right) = 0.\end{aligned}$$

方法二：设 $AM: y = k(x + \sqrt{2})$,

$$\begin{aligned}\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ y = k(x + \sqrt{2}) \end{cases} \\ \Rightarrow (1 + 2k^2)x^2 + 4\sqrt{2}k^2x + 4k^2 - 2 = 0, \\ x_A x_P = \frac{4k^2 - 2}{1 + 2k^2} \Rightarrow x_P = \frac{\sqrt{2}(1 - 2k^2)}{1 + 2k^2}, \\ y_P = k(x_P + \sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}k}{1 + 2k^2}, \\ \therefore P \left(\frac{\sqrt{2}(1 - 2k^2)}{1 + 2k^2}, \frac{2\sqrt{2}k}{1 + 2k^2} \right),\end{aligned}$$

其中 $M(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}k)$, $B(\sqrt{2}, 0)$,

$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{BP} &= \left(\frac{-4\sqrt{2}k^2}{1 + 2k^2}, \frac{2\sqrt{2}k}{1 + 2k^2} \right), \quad \overrightarrow{OM} = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}k), \\ \therefore \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{OM} &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{2} \text{ 方法一: } \because S_1 &= \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot y_P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{4t}{t^2 + 4} = \frac{4\sqrt{2}t}{t^2 + 4}, \\ S_2 &= S_{\triangle ABM} - S_{\triangle AOP} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{4t}{t^2 + 4} \\ &= \sqrt{2}t - \frac{2\sqrt{2}t}{t^2 + 4}, \\ \therefore \frac{S_1}{S_2} &= \frac{\frac{4\sqrt{2}t}{t^2 + 4}}{\sqrt{2}t - \frac{2\sqrt{2}t}{t^2 + 4}} = \frac{1}{\frac{t^2 + 4}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{t^2}{4} + \frac{1}{2}} \leq 1,\end{aligned}$$

当 $t = \sqrt{2}$ 时取等,

$\therefore \frac{S_1}{S_2}$ 的最大值为 1.

$$\text{方法二: } S_1 = \frac{1}{2} |AB| |y_P| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}k}{1 + 2k^2} = \frac{|4k|}{1 + 2k^2}$$

$$\begin{aligned}S_2 &= S_{\triangle ABM} - S_{\triangle AOP} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot |2\sqrt{2}k| - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{|2\sqrt{2}k|}{1 + 2k^2} \\ &= \frac{|2k|(1 + 4k^2)}{1 + 2k^2}, \\ \therefore \frac{S_1}{S_2} &= \frac{|4k|}{1 + 2k^2} \cdot \frac{1 + 2k^2}{|2k|(1 + 4k^2)} = \frac{2}{1 + 4k^2},\end{aligned}$$

由于 $t \geq \sqrt{2}$, 所以直线 AM 的斜率 $k \geq \frac{1}{2}$,

$\therefore \frac{S_1}{S_2}$ 的最大值为 1, 当且仅当 $k = \frac{1}{2}$ 取等.

【标注】【知识点】椭圆的标准方程；直线和椭圆的位置关系；定值问题（证明、探究）；最值问题；面积问题

3. 中点弦问题

【备注】 中点弦问题包括垂直平分问题、等腰三角形、等边三角形、平行四边形、菱形.

【解题思路】 与弦中点相关的问题是圆锥曲线中常见问题, 一般解决思路有两种, 一是将直线与曲线联立, 消去一个变量后建立二次方程, 利用韦达定理求得中点坐标来进行求解; 二是点差法, 步骤一般为: ①设点; ②代入; ③作差; ④整理. 下面的解法即是利用点差法来解决中点弦问题的例子.

常用“点差法”结论 (AB 为弦, M 为弦中点):

(1) 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 中, 点差法结论为 $k_{OM} \cdot k_{AB} = -\frac{b^2}{a^2}$;

(2) 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 中, 点差法结论为 $k_{OM} \cdot k_{AB} = \frac{b^2}{a^2}$;

(3) 在抛物线 $y^2 = 2px$ 中, 点差法结论为 $y_0 k_{AB} = p$; 对于抛物线 $x^2 = 2py$, 有 $x_0 = pk_{AB}$.

注意: “点差法”过程中要考虑 $k=0$ 或 k 不存在的情况.

【备注】

【例题】 椭圆 $\frac{y^2}{75} + \frac{x^2}{50} = 1$, 求经过此椭圆内的一点 $M\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, 且被点 M 平分的弦所在的直线方程.

【解答】 设过点 M 的直线交椭圆于点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,
且 M 是弦 AB 的中点,

将 A , B 两点的坐标代入椭圆方程 $\frac{y^2}{75} + \frac{x^2}{50} = 1$, 得

$$\begin{cases} \frac{y_1^2}{75} + \frac{x_1^2}{50} = 1 \\ \frac{y_2^2}{75} + \frac{x_2^2}{50} = 1 \end{cases}$$

$$\text{①-②并整理得 } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = \frac{3}{2},$$

$$\text{即 } k = \frac{3}{2}.$$

$$\text{所以, 所求的直线方程为 } y + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right),$$

$$\text{即 } 6x - 4y - 5 = 0.$$

10. 2020年天津塘沽区天津市塘沽区第一中学高三二模第18题15分 ★★★★★

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 2, 且过点 $P(2, 0)$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 设 F 为 C 的左焦点, 点 M 为直线 $x = -4$ 上任意一点, 过点 F 作 MF 的垂线交 C 于两点 A, B

① 证明: OM 平分线段 AB (其中 O 为坐标原点).

② 当 $\frac{|MF|}{|AB|}$ 取最小值时, 求点 M 的坐标.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) ① 证明见解析.

② $m = 0$ 时, $\frac{|MF|}{|AB|}$ 最小、点 M 的坐标为 $(-4, 0)$.

【解析】(1)

(2) ① 设点 M 的坐标为 $(-4, m)$,

当 $m = 0$ 时, AB 与 x 轴垂直, F 为 AB 的中点, OM 平分 AB 显然成立,

当 $m \neq 0$, 由已知可得: $K_{MF} = -\frac{m}{3}$,

$$\therefore K_{AB} = \frac{3}{m} ,$$

则直线 AB 的方程为: $y = \frac{3}{m}(x+1)$,

联立消去 y 得: $(m^2 + 12)x^2 + 24x - 4m^2 + 12 = 0$,

由韦达定理得, AB 中点 P 的坐标为 $\left(-\frac{12}{m^2 + 12}, \frac{3m}{m^2 + 12}\right)$,

又: 直线 OM : $y = -\frac{m}{4}x$,

$\therefore P$ 在直线 OM 上.

综上 OM 平分线段 AB .

② 当 $m = 0$ 时, $\frac{|MF|}{|AB|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

当 $m \neq 0$ 时, 由 (i) 可知 $|AB| = 4\sqrt{\frac{(m^2 + 9)^2}{(m^2 + 12)^2}}$, $|MF| = \sqrt{m^2 + 9}$,

$$\frac{|MF|}{|AB|} = \frac{1}{4}\sqrt{m^2 + 9 + \frac{9}{m^2 + 9}} + 6 > 1 ,$$

又 $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$,

$\therefore m = 0$ 时, $\frac{|MF|}{|AB|}$ 最小、点 M 的坐标为 $(-4, 0)$.

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系; 椭圆的标准方程; 中点弦问题; 最值问题; 弦长求解问题

11. 高二下学期单元测试《弦长与面积》自招第5题 ★★★★★

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的焦距为 4, 其短轴的两个端点与长轴的一个端点构成正三角形.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 设 F 为椭圆 C 的左焦点, T 为直线 $x = -3$ 上任意一点, 过 F 作 TF 的垂线交椭圆 C 于点 P, Q .

(i) 证明: OT 平分线段 PQ (其中 O 为坐标原点);

(ii) 当 $\frac{|TF|}{|PQ|}$ 最小时, 求点 T 的坐标.

【答案】(1) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) (i) 证明见解析

(ii) $(-3, \pm 1)$.

【解析】(1) 由题意得 $2c = 4, c = 2$,

且由正三角形的性质可知 $a = \sqrt{3}b, a^2 = 3b^2 = 4 + b^2$,

$$\therefore b^2 = 2, a^2 = 6,$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的标准方程: } \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

(2) 方法一: (i) 由题意 $F(-2, 0)$, 设 $T(-3, m) (m \neq 0)$,

$$k_{FT} = \frac{m-0}{-3+2} = -m, \therefore k_{PQ} = \frac{1}{m}, \therefore PQ: y = \frac{1}{m}(x+2),$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{m}(x+2) \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}, \left(1 + \frac{3}{m^2}\right)x^2 + \frac{12}{m^2}x + \frac{12}{m^2} - 6 = 0,$$

$$\text{即 } (m^2 + 3)x^2 + 12x + 12 - 6m^2 = 0,$$

$$\Delta > 0,$$

$$x_P + x_Q = \frac{-12}{m^2 + 3},$$

$$x_P \cdot x_Q = \frac{12 - 6m^2}{m^2 + 3},$$

$$y_P + y_Q = \frac{1}{m}(x_P + 2) + \frac{1}{m}(x_Q + 2) = \frac{1}{m}(x_P + x_Q) + \frac{4}{m} = \frac{4m}{m^2 + 3},$$

$$PQ \text{ 中点 } \left(\frac{-6}{m^2 + 3}, \frac{2m}{m^2 + 3}\right), OT: y = -\frac{m}{3}x,$$

$$\frac{-6}{m^2 + 3} \cdot \left(-\frac{m}{3}\right) = \frac{2m}{m^2 + 3} \therefore OT \text{ 平分 } PQ,$$

当 $m = 0$ 时, 显然 OT 平分 PQ .

$$(ii) |TF| = \sqrt{(-2+3)^2 + (0-m)^2} = \sqrt{m^2 + 1},$$

$$|PQ| = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} \frac{2\sqrt{6}|m|\sqrt{m^2 + 1}}{m^2 + 3} = \frac{2\sqrt{6}(m^2 + 1)}{m^2 + 3} t = \frac{|TF|}{|PQ|} = \frac{m^2 + 3}{2\sqrt{6}\sqrt{m^2 + 1}},$$

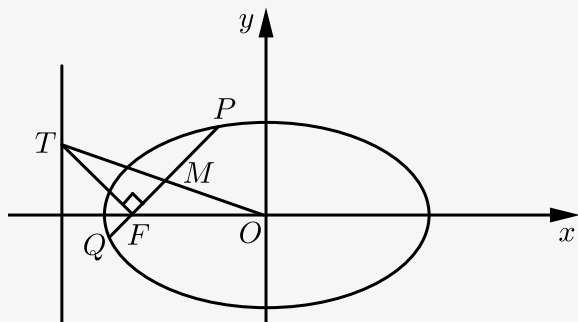
$$t^2 = \frac{(m^2 + 3)^2}{24(m^2 + 1)} = \frac{(m^2 + 1)^2 + 4(m^2 + 1) + 4}{24(m^2 + 1)} = \frac{m^2 + 1}{24} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6(m^2 + 1)}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{1}{144}} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

当且仅当 $\frac{m^2 + 1}{24} = \frac{1}{6(m^2 + 1)}$ 时取等号,

$$\therefore (m^2 + 1)^2 = 4, m^2 + 1 = 2, m^2 = 1, \therefore T(-3, \pm 1).$$

方法二: 设 $T(-3, t)$, $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, 线段 PQ 的中点为 M , 连接 OT , 如图.



(i) 情形一： $t \neq 0$.

一方面，直线 TF 的斜率为 $-t$ ，直线 PQ 的斜率为 $\frac{1}{t}$ ，直线 OT 的斜率为 $-\frac{t}{3}$ ，

另一方面，由于 $\frac{x_1^2}{6} + \frac{y_1^2}{2} = 1$ ， $\frac{x_2^2}{6} + \frac{y_2^2}{2} = 1$ ，两式相减，并应用平方差公式可得

$$\frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{6} + \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{2} = 0,$$

$$\text{从而 } \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} \cdot \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{3},$$

即直线 PQ 与直线 OM 的斜率之积为 $-\frac{1}{3}$ ，进而直线 OM 的斜率为 $-\frac{t}{3}$ ，

综合以上两方面， O, M, T 三点共线，因此命题成立。

情形二： $t = 0$ 。此时 OT 显然平分 PQ 。

综上所述，命题得证。

(ii) 设直线 PQ 的倾斜角为 θ ，则

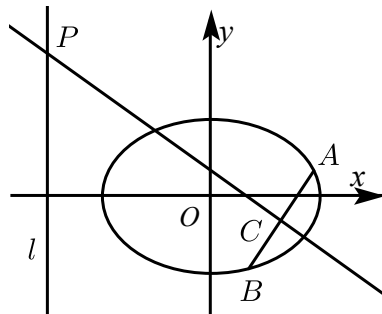
$$\frac{|TF|}{|PQ|} = \frac{\frac{1}{\sin \theta}}{\frac{4\sqrt{6}}{2 + 4\sin^2 \theta}} = \frac{\frac{1}{\sin \theta} + 2\sin \theta}{2\sqrt{6}} \geq \frac{1}{\sqrt{3}},$$

当且仅当 $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取得等号，因此当 $\frac{|TF|}{|PQ|}$ 最小时， T 点的坐标为 $(-3, \pm 1)$ 。

【标注】【知识点】最值问题；弦长求解问题

12. 2015年高考真题江苏卷第18题 ★★★

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，且右焦点 F 到左准线 l 的距离为 3。



(1) 求椭圆的标准方程。

(2) 过 F 的直线与椭圆交于 A, B 两点，线段 AB 的垂直平分线分别交直线 l 和 AB 于点 P, C ，若 $PC = 2AB$ ，求直线 AB 的方程。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

(2) 直线 AB 的方程为 $y = x - 1$ 或 $y = -x + 1$ 。

【解析】 (1) 由题意得 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 且 $c + \frac{a^2}{c} = 3$ ，

解得 $a = \sqrt{2}$ ， $c = 1$ ，则 $b = 1$ ，

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 。

(2) 当 $AB \perp x$ 轴时, $AB = \sqrt{2}$, $CP = 3$, 不合题意.

当 AB 垂直于准线时, 显然不合题意.

当 AB 与 x 轴不垂直, 且不垂直于准线时,

设直线 AB 的方程为 $y = k(x - 1)$ ($k \neq 0$), $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

将直线 AB 方程代入椭圆可得 $(1 + 2k^2)x^2 - 4k^2x + 2(k^2 - 1) = 0$.

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{1 + 2k^2}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{2(k^2 - 1)}{1 + 2k^2},$$

线段

$$AB = \sqrt{(1 + k^2)(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(1 + k^2)[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]} = \frac{2\sqrt{2}(1 + k^2)}{1 + 2k^2},$$

$$\text{且点 } C \text{ 横坐标为 } \frac{2k^2}{1 + 2k^2},$$

又因为 $CP \perp AB$,

$$\text{所以 } k_{CP} = -\frac{1}{k}, \text{ 则 } CP = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)\left(\frac{2k^2}{1 + 2k^2} + 2\right)^2} = \frac{2(1 + 3k^2)\sqrt{1 + k^2}}{(1 + 2k^2)|k|}.$$

因为 $PC = 2AB$,

$$\text{所以 } \frac{2(1 + 3k^2)\sqrt{1 + k^2}}{(1 + 2k^2)|k|} = \frac{4\sqrt{2}(1 + k^2)}{1 + 2k^2}, \text{ 解得 } k = \pm 1.$$

则直线 AB 的方程为 $y = x - 1$ 或 $y = -x + 1$.

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系；中点弦问题

13. 2018年天津河东区高三二模理科第19题14分 ★★★★★

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一个焦点为 $F(2, 0)$, 且离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(1) 求椭圆方程.

(2) 斜率为 k 的直线 l 过点 F , 且与椭圆交于 A, B 两点, P 为直线 $x = 3$ 上的一点, 若 $\triangle ABP$ 为等边三角形, 求直线 l 的方程.

【答案】 (1) 椭圆方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 直线 l 的方程为 $x - y - 2 = 0$, 或 $x + y - 2 = 0$.

【解析】 (1) 依题意有 $c = 2$, $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. 可得 $a^2 = 6$, $b^2 = 2$.

故椭圆方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 直线 l 的方程为 $y = k(x - 2)$.

$$\text{联立方程组 } \begin{cases} y = k(x - 2), \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1. \end{cases}$$

消去 y 并整理得 $(3k^2 + 1)x^2 - 12k^2x + 12k^2 - 6 = 0$. 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

$$\text{故 } x_1 + x_2 = \frac{12k^2}{3k^2 + 1}, \quad x_1x_2 = \frac{12k^2 - 6}{3k^2 + 1}.$$

$$\begin{aligned} \text{则 } |AB| &= \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2]} \\ &= \frac{2\sqrt{6}(k^2+1)}{3k^2+1}. \end{aligned}$$

设 AB 的中点为 $M(x_0, y_0)$.

$$\text{可得 } x_0 = \frac{6k^2}{3k^2+1}, \quad y_0 = -\frac{2k}{3k^2+1}.$$

直线 MP 的斜率为 $-\frac{1}{k}$, 又 $x_P = 3$,

$$\text{所以 } |MP| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \cdot |x_0 - x_P| = \sqrt{\frac{k^2+1}{k^2}} \cdot \frac{3(k^2+1)}{(3k^2+1)}.$$

当 $\triangle ABP$ 为正三角形时, $|MP| = \frac{\sqrt{3}}{2} |AB|$,

$$\text{可得 } \sqrt{\frac{k^2+1}{k^2}} \cdot \frac{3(k^2+1)}{(3k^2+1)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{6}(k^2+1)}{3k^2+1},$$

解得 $k = \pm 1$.

即直线 l 的方程为 $x - y - 2 = 0$, 或 $x + y - 2 = 0$.

【标注】【知识点】弦长求解问题

14. 2017~2018学年1月天津和平区天津市耀华中学高三上学期月考理科第19题14分 ★★★

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点在直线 $l: x - 1 = 0$ 上, 且离心率 $e = \frac{1}{2}$.

(1) 求该椭圆的方程.

(2) 若 P 与 Q 是该椭圆上不同的两点, 且线段 PQ 的中点 T 在直线 l 上, 试证: x 轴上存在定点 R , 对于所有满足条件的 P 与 Q , 恒有 $|RP| = |RQ|$.

(3) 在 (2) 的条件下, $\triangle PQR$ 能否为等腰直角三角形? 并证明你的结论.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) x 轴上存在定点 $R\left(\frac{1}{4}, 0\right)$.

(3) 在 (2) 条件下 $\triangle PQR$ 能在等腰直角三角形.

【解析】 (1) 由题意得: $c = 1$,

$$\because e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore a = 2, \quad b = \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 当直线 PQ 斜率存在时,

设 PQ 方程为 $y = kx + m$,

$$\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (4k^2 + 3)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0,$$

$$\Delta = 16k^2m^2 - (4k^2 + 3)(4m^2 - 12) > 0,$$

设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$,

则 $x_1 + x_2 = 2$,

$$\frac{-8km}{4k^2 + 3} = 2 \Rightarrow m = -k - \frac{3}{4k},$$

$$\therefore y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2m = 2k + 2m,$$

$$\therefore y_1 + y_2 = -\frac{3}{2k},$$

$$\text{将 } m = -k - \frac{3}{4k} \text{ 代入 } \Delta = 16k^2m^2 - (4k^2 + 3)(m^2 - 3) > 0,$$

$$\text{得: } 144k^4 + 72k^2 - 27 > 0, \quad k^2 > \frac{1}{4},$$

假设在 x 轴上存在定点 $R(n, 0)$,

$$|RP| = |RQ| \Rightarrow (n - x_1) + y_1^2 = (n - x_2)^2 + y_2^2,$$

$$\therefore (n - x_1)^2 - (n - x_2)^2 = y_2^2 - y_1^2 \Rightarrow (2n - 2)(x_2 - x_1) = -\frac{3}{2k} \times \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow n = \frac{1}{4}, \text{ 即 } R\left(\frac{1}{4}, 0\right),$$

当直线 PQ 的斜率不存在时, 直线 PQ 垂直于 x 轴, 此时 $|RP| = |RQ|$,

综上所述: x 轴上存在定点 $R\left(\frac{1}{4}, 0\right)$.

(3) 假设 $\triangle PQR$ 能为等腰直角三角形,

$$\text{则 } \overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} = 0,$$

$$\therefore \left(x_1 - \frac{1}{4}, y_1\right) \cdot \left(x_2 - \frac{1}{4}, y_2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(x_1 - \frac{1}{4}\right)\left(x_2 - \frac{1}{4}\right) + y_1y_2 = 0$$

$$x_1x_2 - \frac{1}{4}(x_1 + x_2) + \frac{1}{16} + (kx_1 + m)(kx_2 + m) = 0$$

$$\Rightarrow x_2 - \frac{1}{4}(x_1 + x_2) + \frac{1}{16} + k^2x_1x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2 = 0,$$

$$\text{又 } x_1 + x_2 = 2, \quad m = -k - \frac{3}{4k},$$

$$\therefore (k^2 + 1) \frac{2\left(-k - \frac{3}{4k}\right) - 12}{4k^2 + 3} - \frac{7}{16} + 2k\left(-k - \frac{3}{4k}\right) + \left(-k - \frac{3}{4k}\right)^2 = 0,$$

$$(12k^2 - 7)(k^2 + 1) = 0 \Rightarrow k = \pm \frac{\sqrt{21}}{6},$$

$\therefore$ 在 (2) 条件下 $\triangle PQR$ 能在等腰直角三角形.

【标注】【知识点】定点问题; 向量问题

15. 2018~2019学年4月天津南开区天津市南开中学高三下学期月考文科(九校联考)第19题14分

★★★★★

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 离心率等于 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且点 $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在椭圆上.

(1) 求椭圆 E 的方程.

(2) 请解答下列各题:

① 直线 $l: y = kx + m (k \neq 0)$ 与椭圆 E 交于两点 A, B . 求 $|AB|$ 的弦长.

②

若直线 l 与椭圆 E 交于两点 A, B ，且线段 AB 的垂直平分线经过点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ，求 $\triangle AOB$ 的面积的最大值。（ O 为原点）

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) ① $\frac{4}{1+4k^2} \sqrt{(1+k^2)(4k^2-m^2+1)}$.

② 1 .

【解析】(1) $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{3}{4}$,

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = \frac{1}{3}c^2 ,$$

$$\frac{\frac{x^2}{\frac{4}{3}c^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{3}c^2}} = 1 , \text{ 点 } \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ 代入 ,}$$

$$\therefore c^2 = 3 , a^2 = 4 , b^2 = 1 ,$$

$$\therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 .$$

(2) ① 设直线 $l: y = kx + m$,

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } \begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \text{ 代入化简 } (1+4k^2)x^2 + 8mkx + 4m^2 - 4 = 0 ,$$

$$\Delta = 64m^2k^2 - 4(1+4k^2)(4m^2-4) > 0 , 4k^2 + 1 > m^2 ,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{8mk}{1+4k^2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{4m^2-4}{1+4k^2} \end{cases} ,$$

$$|AB| = \sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2]} \\ = \frac{4}{1+4k^2} \sqrt{(1+k^2)(4k^2-m^2+1)} .$$

② 当 $k=0$ 时，设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times 2|x_1| \cdot |y_1|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{x_1^2(4-x_1^2)} \leq \frac{1}{2} \times \frac{x_1^2+4-x_1^2}{2} = 1 ,$$

当且仅当 $x_1 = \pm\sqrt{2}$ 时，取等；

$$\text{当 } k \neq 0 \text{ 时，由①知： } x_1 + x_2 = -\frac{8mk}{1+4k^2} ,$$

$$y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2m = \frac{2m}{1+4k^2}$$

$$\therefore AB \text{ 中点 } \left(\frac{-4mk}{1+4k^2}, \frac{m}{1+4k^2} \right) , P\left(0, \frac{1}{2}\right) ,$$

$$k \times \frac{\frac{m}{1+4k^2} - \frac{1}{2}}{\frac{-4mk}{1+4k^2}} = -1 ,$$

$$\therefore 1+4k^2 = -6m , -6 < m < 0 ,$$

$$\text{原点到 } l: kx - y + m = 0 \text{ 的距离 } , d = \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} ,$$

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|AB| \times d = \frac{2|m|}{1+4k^2} \sqrt{4k^2 - m^2 + 1},$$

$$\therefore 1+4k^2 = -6m \text{ 代入 } S_{\triangle AOB} = \frac{1}{3} \sqrt{-6m - m^2} = \frac{1}{3} \sqrt{-(m+3)^2 + 9},$$

当 $m = -3$, 即 $k = \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$ 时, $S_{\max} = 1$.

综上: $\triangle AOB$ 的面积的最大值为 1.

【标注】【知识点】椭圆的标准方程；直线和椭圆的位置关系；面积问题；最值问题；弦长求解问题